INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Calcul différentiel

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1er cycle, 1re année

Sommaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un point x_0.

Définition 1.1 (Continuité en x_0)

*On dit que la fonction f est **continue** en x_0 lorsque*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

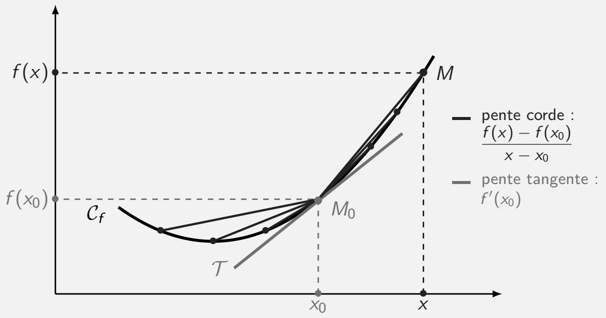
Définition 1.2 (Dérivabilité en x_0)

*On dit que la fonction f est **dérivable** en $x_0 \in I$ lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.*
*Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en x_0 :*

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Interprétation graphique (Tangente)

Si f est dérivable en x_0 alors $\mathcal{C}_f$ admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en M_0 qui est la position limite des **cordes** lorsque M se rapproche de M_0.



Équation de la **tangente** $\mathcal{T}$:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Propriété 1.3 (Approximation affine)

*Supposons f dérivable en x_0 et soit $T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ l'**application affine tangente** de f en x_0.*
*Alors T est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de x_0.*

En effet, en posant $\varepsilon(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, on a pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

soit encore

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\,\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On dit que $h\,\varepsilon(h)$ est **négligeable** devant h en 0.

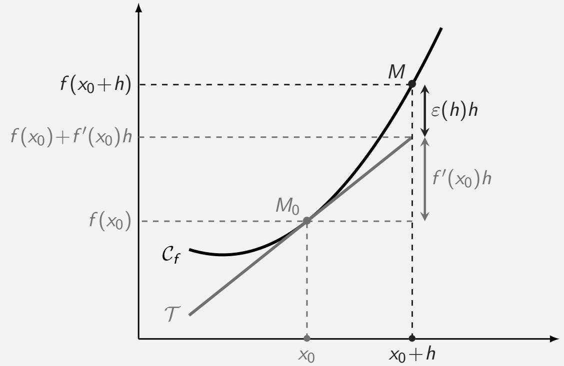
Avec $x = x_0 + h$, cela se réécrit selon

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x - x_0) = T(x) + (x - x_0)\,\varepsilon(x - x_0)$$

Ces écritures suggèrent l'**approximation du premier ordre** suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour } x \text{ « proche de » } x_0 : \\ f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\end{array}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{pour } h \text{ « petit » } : \\ f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h\end{array}}$$

Interprétation graphique (Approximation affine)



Exemples 1.4

1. Pour $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2x$. On obtient alors l'approximation suivante :

   $$\text{pour } h \text{ petit devant } x_0, \quad (x_0 + h)^2 \approx x_0^2 + 2x_0 h$$

   On en déduit « à la main » une valeur approchée de 3.05^2 :

   $$(3 + 0.05)^2 \approx 3^2 + 2 \times 3 \times 0.05 \approx 9.3$$

   La valeur exacte est $3.05^2 = 9.3025$.
   - Erreur absolue : $9.3 - 9.3025 = -0.0025$ ($< 0 \to$ approximation **par défaut**)
   - Erreur relative : $\frac{9.3 - 9.3025}{9.3025} \times 100\,\% \approx -0.03\,\%$

2. Pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On obtient alors l'approximation suivante :

   $$\text{pour } h \text{ petit devant } x_0, \quad \sqrt{x_0 + h} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}h$$

   On en déduit « à la main » une valeur approchée de $\sqrt{101}$:

   $$\sqrt{103} \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \times 3 = 10.15$$

   La valeur exacte est $\sqrt{103} = 10.14889\ldots$
   - Erreur absolue : $10.15 - 10.14889\cdots \approx 0.00111$ ($> 0 \to$ approximation **par excès**)
   - Erreur relative : $\frac{10.15 - 10.14889\ldots}{10.14889\ldots} \times 100\,\% \approx 1.1 \times 10^{-4}\,\%$

Définition 1.5 (Différentiabilité)

*On dit que f est **différentiable** en x_0 lorsqu'il existe une application **linéaire** notée df_{x_0} et une fonction ε telles que :*

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + h\,\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

*On dit que df_{x_0} est la **différentielle** de f en x_0.*

En fait $\varepsilon(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \dfrac{df_{x_0}(h)}{h}$ et l'on obtient dès lors l'équivalence entre différentiabilité et dérivabilité en x_0 pour f ci-dessous :

Propriété 1.6 (Équivalence dérivabilité–différentiabilité)

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f \text{ différentiable en } x_0 \iff f \text{ dérivable en } x_0.$$

*Lorsque f dérivable en x_0, la **différentielle** df_{x_0} est l'application **linéaire** $h \mapsto f'(x_0)h$:*

$$\boxed{df_{x_0}(h) = f'(x_0)h}$$

Remarque 1.7 (Notation différentielle de Leibniz)

- Si f est différentiable en x_0, d'après la propriété 1.3 sa différentielle est la meilleure approximation linéaire de l'accroissement de f en x_0.
- En notant $dx : h \mapsto h$ l'application linéaire représentant l'accroissement de la variable x, (donc $dx(h) = h$) on obtient en notation fonctionnelle : $df_{x_0} = f'(x_0)\,dx$.
  Cette écriture se généralise en $\boxed{df_x = f'(x)\,dx}$ ou encore $\boxed{df = f'\,dx}$ qui est à l'origine de la notation de Leibniz $\boxed{f' = \dfrac{df}{dx}}$ $\left(= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)$.
  Attention : le x dans dx **n'a rien** à voir avec le x dans df_x et $f'(x)$.
  Ce n'est qu'un **symbole.**

Propriété 1.8 (Formules dérivées / différentielle)

dérivées	*différentielles*
$(f + g)' = f' + g'$	$d(f + g) = df + dg$
$(fg)' = f'g + fg'$	$d(fg) = g\,df + f\,dg$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	$d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$
$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$	$d(g \circ f) = (g' \circ f)df$

En **sciences physiques**, on se sert de la différentielle pour approcher l'**accroissement** (positif ou négatif) d'une fonction lorsque la variable varie légèrement.
La quantité df sera donc considérée comme un **nombre** et pas une fonction.

En d'autres termes, en posant :

- $\delta x =$ **petit accroissement** de x sur x_0,
- $\delta f_{x_0} =$ **petit accroissement** de f en x_0 correspondant à δx :

$$"\delta f_{x_0}" = \delta f_{x_0}(\delta x) = f(x_0+\delta x) - f(x_0),$$

- $df_{x_0}=$ **différentielle** en x_0 :

$$"df_{x_0}" = df_{x_0}(\delta x) = f'(x_0)\delta x,$$

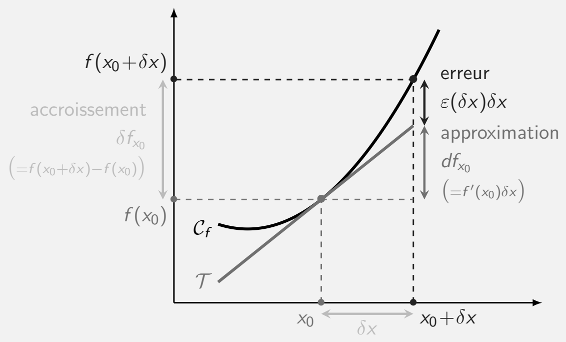
on considère que

$$\boxed{\delta f_{x_0} \approx df_{x_0}}$$

Ainsi, écrire $\delta f_{x_0} \approx df_{x_0}$ c'est, pour un x proche de x_0 :

- approcher au **premier ordre** la valeur de $f(x)$ par la valeur $T(x)$ de son application tangente au point x_0 ;
- commettre une erreur qui est un infiniment petit d'**ordre supérieur à 1**.

Interprétation graphique



$$\boxed{\underbrace{f(x_0+\delta x) - f(x_0)}_{\delta f_{x_0}} = \underbrace{f'(x_0)\delta x}_{df_{x_0}} + \varepsilon(\delta x)\delta x \approx df_{x_0}}$$

Exemple 1.9 (Pendule pesant)

La formule $P = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ donne la période d'un pendule de longueur ℓ, g désignant l'accélération de la pesanteur ($g = 9.81\ m/s^2$).

Déterminons une approximation de la variation de période en fonction d'une variation de longueur.

Posons $P(\ell) = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.

P définit ainsi une fonction de dérivée $P'(\ell) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\dfrac{1}{2\sqrt{\ell}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{g\ell}}$

donc de différentielle "dP_ℓ" $= dP_\ell(\delta\ell) = \dfrac{\pi}{\sqrt{g\ell}}\,\delta\ell$.

Si ℓ augmente de $\delta\ell$, une approximation de l'augmentation de P correspondante peut s'obtenir selon

$$\delta P_\ell \approx dP_\ell = \frac{\pi}{\sqrt{g\ell}}\,\delta\ell$$

Définition 2.1 (Continuité/Dérivabilité)

Soit $\overrightarrow{F} : \begin{array}{l} I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto f(t)\,\vec{e}_x + g(t)\,\vec{e}_y + h(t)\,\vec{e}_z \end{array}$ *une courbe paramétrée de l'espace.*

On dit que $\overrightarrow{F}$ *est* ***continue*** *(resp.* ***dérivable****) en* $t_0 \in I$ *lorsque ses trois fonctions composantes* f, g, h *sont* ***continues*** *(resp.* ***dérivables****) en* t_0.

Lorsque $\overrightarrow{F}$ *est dérivable, on a* $\boxed{\overrightarrow{F}'(t_0) = f'(t_0)\,\vec{e}_x + g'(t_0)\,\vec{e}_y + h'(t_0)\,\vec{e}_z}$ ***(vecteur tangent)****.*

Propriété 2.2 (Différentielle)

Si $\overrightarrow{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est dérivable en* t_0*, alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{F}(t_0+h) = \overrightarrow{F}(t_0) + h\overrightarrow{F}'(t_0) + h\,\vec{\varepsilon}(h)}$$

où $\vec{\varepsilon}$ *est une fonction vectorielle vérifiant* $\lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.
On a donc

$$\overrightarrow{F}\ \textbf{\textit{différentiable}}\ \text{en}\ t_0 \iff \overrightarrow{F}\ \textbf{\textit{dérivable}}\ \text{en}\ t_0$$

et la ***différentielle*** *de* $\overrightarrow{F}$ *en* t_0 *est l'application linéaire*

$$d\overrightarrow{F}_{t_0} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ h \longmapsto h\overrightarrow{F}'(t_0) = f'(t_0)h\,\vec{e}_x + g'(t_0)h\,\vec{e}_y + h'(t_0)h\,\vec{e}_z \end{array}$$

De nombreuses quantités physiques dépendent de plusieurs paramètres :

- la pression d'un gaz parfait donnée par $P = \dfrac{nRT}{V}$ dépend du volume V, de la température T et du nombre de moles n de ce gaz (R étant une constante) ;
- la pression atmosphérique sur terre dépend des variables de position x, y, z ;
- l'intensité d'un champ électrique dans l'espace dépend des variables de position x, y, z ;
- l'énergie cinétique d'une particule dans un gaz dépend des composantes de vitesse v_x, v_y, v_z...

Objectif du chapitre : adapter le calcul différentiel pour les fonctions à **une variable**, aux fonctions à **plusieurs variables**.

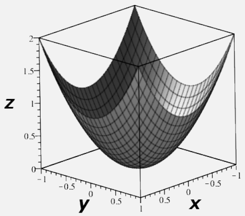
Notes :

- dans la suite, on énoncera les définitions et propriétés dans $\mathbb{R}^3$ (l'espace), mais – sauf mention du contraire – elles sont aussi valables dans $\mathbb{R}^2$ (le plan), en enlevant tout ce qui a trait à la variable « z » ;
- des **triplets** (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ peuvent être considérés comme les **coordonnées** d'un point M dans un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, mais aussi comme les **composantes** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Visualisation

Dans ce chapitre, on considère des fonctions à 2 ou 3 variables réelles, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction de deux variables $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}$ peut se visualiser graphiquement comme une **surface** d'équation cartésienne $z = f(x, y)$.
Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2$.

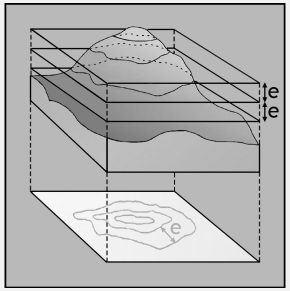


- Pour une fonction de 3 variables, penser qu'à chaque point de l'espace est associé un nombre (température $T(x, y, z)$, pression $P(x, y, z)$, etc.). On peut imaginer une représentation comme **« hypersurface »** d'équation cartésienne $u = f(x, y, z)$ dans un espace de dimension 4 (avec des coordonnées (x, y, z, u))...

Visualisation

Dans ce chapitre, on considère des fonctions à 2 ou 3 variables réelles, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction de deux variables $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}$ peut aussi se visualiser graphiquement comme une surface plane avec des **lignes de niveaux.**
Ce sont des courbes de « constance » de f.

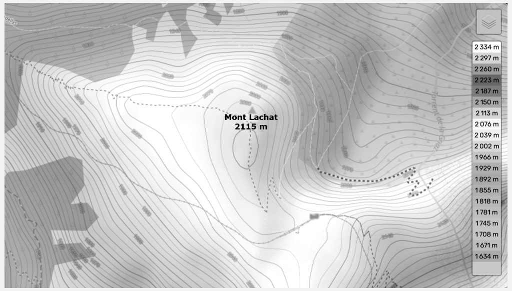


Lignes de niveau équidistantes

Visualisation

Dans ce chapitre, on considère des fonctions à 2 ou 3 variables réelles, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction de deux variables $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}$ peut aussi se visualiser graphiquement comme une surface plane avec des **lignes de niveaux.**
Ce sont des courbes de « constance » de f.

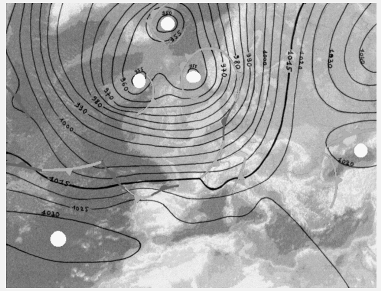


Carte topographique : lignes d'altitude

Visualisation

Dans ce chapitre, on considère des fonctions à 2 ou 3 variables réelles, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction de deux variables $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}$ peut aussi se visualiser graphiquement comme une surface plane avec des **lignes de niveaux.**
Ce sont des courbes de « constance » de f.



Carte météorologique : lignes de pression atmosphérique

Il est pratique de définir les fonctions partielles d'une fonction à plusieurs variables, ce qui correspond à fixer toutes les variables sauf une. On retrouve les fonctions à une variable habituelles.

Définition 3.1 (Applications partielles)

*Soit une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On appelle **applications partielles** au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ les applications de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes :*

$$x \mapsto f(x, y_0, z_0), \qquad y \mapsto f(x_0, y, z_0), \qquad z \mapsto f(x_0, y_0, z)$$

Exemple 3.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \cos(xy)\exp(2z - 3) + y^2 z$.
Les trois applications partielles de f en $(1, 0, 1)$ sont données par

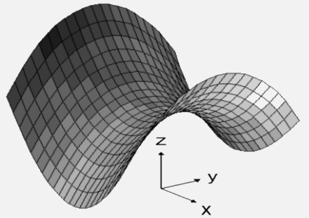
$$x \longmapsto f(x, 0, 1) = \cos(x \times 0)e^{2\times 1-3} + 0^2 \times 1 = \frac{1}{e}$$

$$y \longmapsto f(1, y, 1) = \cos(1 \times y)e^{2\times 1-3} + y^2 \times 1 = \frac{1}{e}\cos(y) + y^2$$

$$z \longmapsto f(1, 0, z) = \cos(1 \times 0)e^{2z-3} + 0^2 \times z = e^{2z-3}$$

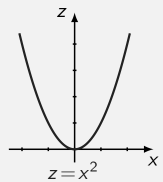
Exemple 3.3 (La « selle de cheval »)

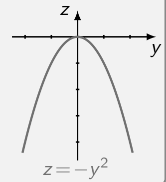
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - y^2$.



Les **applications partielles** de f en $(0, 0)$ et en $(1, -1)$ sont données par

- en $(0, 0)$:
  $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto -y^2$
- en $(1, -1)$:
  $x \mapsto x^2 - 1$ et $y \mapsto 1 - y^2$





La notion de **continuité** en un réel x_0 pour les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à l'aide de la notion de **limite** (rappel : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$) s'étend aux fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

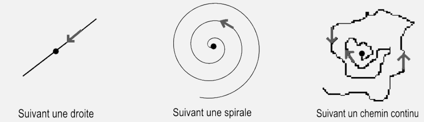
Définition 3.4 (Continuité)

*La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est **continue** en (x_0, y_0, z_0) lorsque*

$$\boxed{\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)}$$

Mais que signifie $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}$?

Différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$: il existe une infinité de directions suivant lesquelles s'approcher d'un point (x_0, y_0) du plan ou (x_0, y_0, z_0) de l'espace, alors que dans $\mathbb{R}$ il n'y a que deux possibilités (par la gauche ou par la droite).



Définition 3.5 (Limite dans le plan et l'espace)

- *On dit que le **point variable** M **tend vers** le point fixé M_0 si la **distance** M_0M **tend vers** 0.*
- *On dit que le **vecteur variable** $\vec{u}$ **tend vers** le vecteur fixé $\vec{u}_0$ si la **norme** $\|\vec{u} - \vec{u}_0\|$ **tend vers** 0.*

En termes de coordonnées ou composantes dans $\mathbb{R}^3$, cela se transcrit selon :

$$(x, y, z) \textbf{ tend vers } (x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{ssi } \left\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\right\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \textbf{ tend vers } 0.$$

Définition 3.6 (Boule ouverte)

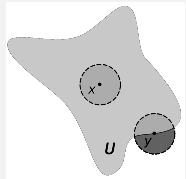
*Dans $\mathbb{R}^n$ avec $n = 1, 2, 3$, la **boule ouverte** centrée en un point M_0 et de rayon R est l'ensemble $\mathcal{B}_{M_0,R} = \{M \in \mathbb{R}^n : M_0M < R\}$.*

- *Dans $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{B}_{M_0,R} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\} =]x_0 - R, x_0 + R[$.
  C'est un **intervalle ouvert**.*
- *Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\mathcal{B}_{M_0,R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\right\}$.
  C'est un **disque ouvert**.*
- *Dans $\mathbb{R}^3$, on a $\mathcal{B}_{M_0,R} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < R^2\right\}$.*

Définition 3.7 (Ouvert de l'espace)

*On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ est **ouvert** lorsque pour tout x de U, U contient une **boule ouverte** de centre x.*

***Pseudo-définition :** dans $\mathbb{R}^n$, un **ouvert** U est un ensemble qui ne contient aucun point de sa frontière.*



Exemples 3.8 (Exemples élémentaires)

- Dans $\mathbb{R}$, un intervalle ouvert $]x_0 - R, x_0 + R[$ est **ouvert.**
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'intérieur d'un disque de centre M_0 et de rayon R est **ouvert.**
- Dans $\mathbb{R}^3$, l'intérieur d'une boule de centre M_0 et de rayon R est **ouvert.**
- Dans $\mathbb{R}^3$, un plan **n'est pas ouvert** ; $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ (espace pointé) est **ouvert** ; le demi-espace $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ est **ouvert** ; etc.

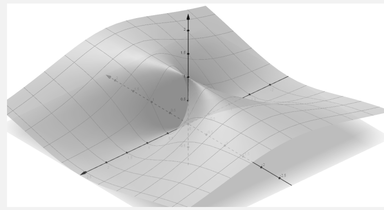
On définit souvent les applications à plusieurs variables sur des ensembles **ouverts** de $\mathbb{R}^n$ pour éviter les problèmes de bord lors du calcul d'une limite en un point.

Propriété 3.9 (Continuité et opérations)

*Toute fonction de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie à partir de fonctions continues des variables x, y, z par des opérations de **somme**, de **produit**, de **quotient** à dénominateur non nul et de **composition**, est elle-même continue.*

Exemples 3.10 (Continuité)

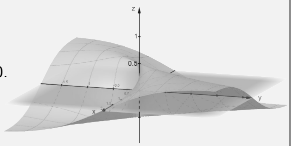
- Soit $f(x, y, z) = \cos(xy)\exp(2z - 3) + y^2 z$. f est continue sur $\mathbb{R}^3$ par opérations.
- Soit $g(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

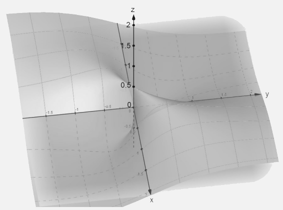


Exemple 3.11 (Discontinuité)

Soit $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Les applications partielles de f en $(0, 0)$ sont $x \mapsto f(x, 0) = 0$ et $y \mapsto f(0, y) = 0$. Elles sont donc continues en $(0, 0)$.
- Par ailleurs, pour $x \neq 0$:
  $f(x, x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$.
- Si f était continue, on devrait avoir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
  Or $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x) = \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi, selon le chemin choisi pour se rapprocher de $(0, 0)$ (ici les axes $x = 0$, $y = 0$ et $x = y$) on ne trouve pas la même limite.
  Donc f **n**'admet **pas** de limite en $(0, 0)$, elle **n**'est **pas** continue en $(0, 0)$.





Quand il y a deux ou trois variables, la dérivée n'a pas de sens !
Mais on peut dériver par rapport à l'une des variables, avec les autres fixées.
On obtient ainsi des **dérivées partielles**, les dérivées des fonctions partielles (si elles sont dérivables).

Définition 4.1 (Dérivée partielle)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

*On appelle **dérivée partielle de** f **par rapport à** x **au point** $M_0(x_0, y_0, z_0)$, la dérivée en x_0 de l'**application partielle** $x \mapsto f(x, y_0, z_0)$.*

On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)$.
On rencontre parfois d'autres notations : $f'_x(x_0, y_0, z_0)$ ou $\partial_x f(x_0, y_0, z_0)$.
∂ se lit « d rond » ou « d ronde ».

On a donc

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}}$$

C'est la limite du taux d'accroissement de f par rapport à x seulement.

On définit de même les dérivées partielles par rapport à y et z, respectivement notées $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

En pratique, on calcule la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en un point quelconque (x, y, z) en dérivant f par rapport à x, et en considérant y et z comme des constantes.

Exemple 4.2

Soit $f(x, y) = 2x^2 + 3xy - x + 1$.
Calculons les dérivées partielles de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis en $(1, 2)$.

1. En (x, y) : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 3y - 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x$.
2. En $(1, 2)$:
   - ***1^re^ méthode :*** on prend $(x, y) = (1, 2)$ dans $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et dans $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, ce qui fournit immédiatement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 9$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3$.
   - ***2^e^ méthode :*** on calcule les applications partielles en $(1, 2)$, puis on les dérive :
     - $f(x, 2) = 2x^2 + 5x + 1$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 2) = 4x + 5$, puis $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 9$.
     - $f(1, y) = 2 + 3y$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, y) = 3$, puis $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3$.

Exemple 4.3 (Dérivées partielles et continuité (cf. exemple 3.11))

Considérons la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Dérivées partielles en un point $(x,y) \neq (0,0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
- Dérivées partielles en $(0,0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0^2+y^2} = 0$$

Remarque 4.4 (Dérivées partielles et continuité)

Cette fonction de 2 variables n'est pas continue en $(0,0)$, mais admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Donc attention :

existence des dérivées partielles en un point $\not\Rightarrow$ continuité en ce point

Définition 4.5 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

*Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pour laquelle les dérivées partielles existent et sont **continues** sur U est dite de **classe $\mathcal{C}^1$** sur U.*

Exemple 4.6

Soit $g(x,y,z) = y\sin(x) + xy^2z^3$.

Calculons les trois dérivées partielles de g.

La fonction g est dérivable selon x, y ou z et ses dérivées partielles sont obtenues par opérations sur fonctions usuelles :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = y\cos(x) + y^2z^3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \sin(x) + 2xyz^3, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 3xy^2z^2$$

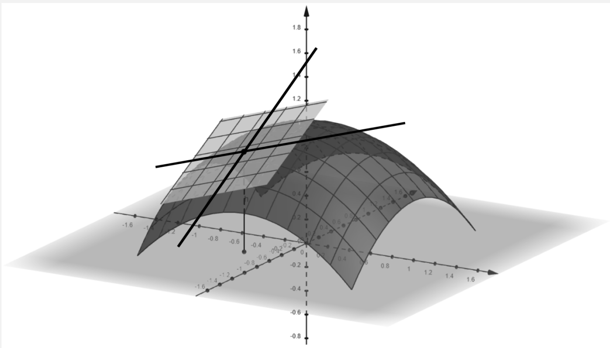
On voit clairement que les dérivées partielles de g sont **continues** sur $\mathbb{R}^3$, et donc g est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur $\mathbb{R}^3$.

Propriété 4.7 (Dérivées partielles et plan tangent)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables, Σ la surface représentant son graphe dans $\mathbb{R}^3$, (x_0,y_0) un point de U, et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ le point image sur Σ correspondant avec $z_0 = f(x_0,y_0)$.

- En M_0, les deux **vecteurs tangents** aux **courbes coordonnées** (graphes des fonctions partielles) donnés, lorsqu'ils existent, par $\vec{u}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$, sont **tangents** à la surface Σ.
- Ils engendrent un plan, le **plan tangent** à la surface en M_0. Ce plan a pour équation
$$\boxed{z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)}$$
- Dans ce cas, $\vec{n}_0 = \vec{u}_0 \wedge \vec{v}_0 \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur **normal** au **plan tangent** en M_0. On dit plus simplement qu'il est **normal** à la surface Σ en M_0.

Propriété 4.7 (Dérivées partielles et plan tangent)



Problèmatique

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Quelle est la **variation** δf de $f(x,y)$ pour de **petites variations** δx et δy ?

- Pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:
on remplace localement la courbe par sa **droite** tangente :
$\hookrightarrow$ approximation **affine** de f au voisinage de x_0 pour $h = \delta x = x - x_0$ petit :
$$\boxed{\begin{gathered} f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \\ \delta f \approx f'(x_0)\delta x \end{gathered}}$$
- Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$: on remplace localement la surface par son **plan** tangent :
$\hookrightarrow$ approximation **affine** de f au voisinage de (x_0,y_0) pour $h_x = \delta x = x - x_0$ et $h_y = \delta y = y - y_0$ petits :
$$\boxed{\begin{gathered} f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) \\ f(x_0+h_x, y_0+h_y) \approx f(x_0,y_0) + \alpha h_x + \beta h_y \\ \delta f \approx \alpha\delta x + \beta\delta y \end{gathered}}$$

Questions/réponses

$$\boxed{\begin{gathered} f(x_0+h_x, y_0+h_y) \approx f(x_0,y_0) + \alpha h_x + \beta h_y \\ \delta f \approx \alpha\delta x + \beta\delta y \end{gathered}}$$

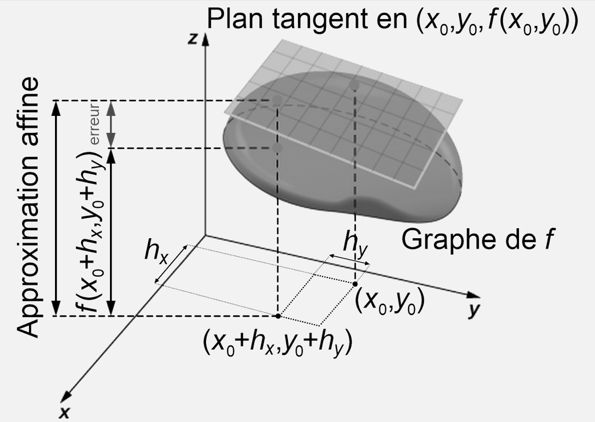
Questions :

1. Que valent les coefficients α, β pour obtenir la meilleure **approximation affine** (pour $f(x_0+h_x, y_0+h_y)$) ou **linéaire** δf ?
2. Quelle **erreur** commet-on ?

Réponses :

1. On peut montrer que $\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
On aura donc
$$\boxed{f(x_0+h_x, y_0+h_y) \approx f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_y}_{\text{différentielle de } f \text{ en } (x_0,y_0)}}$$
2. L'**erreur** commise sera de l'ordre de $\|(h_x,h_y)\|^2 = h_x^2 + h_y^2$, soit du **second ordre**, donc **négligeable** devant h_x et h_y.

Questions/réponses



On peut même prolonger cette notion pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $n \geqslant 3$.
Par exemple en dimension 3 :
$$f(x_0+h_x, y_0+h_y, z_0+h_z) \approx f(x_0,y_0,z_0) + \alpha h_x + \beta h_y + \gamma h_z$$

Définition 5.1 (Différentiabilité)

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et un point $m_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$.
*On dit que f est **différentiable** au point m_0 si il existe une application **linéaire** $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout vecteur $\vec{h}\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}$:*
$$\boxed{f(m_0+\vec{h}) = f(m_0) + \ell(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h}) \text{ avec } \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0}$$

Théorème 5.2 (Différentielle)

*L'application linéaire ℓ, lorsqu'elle existe, est **unique** : c'est la **différentielle de f en m_0**. Elle est notée df_{m_0} et l'on a la relation avec les dérivées partielles de f suivante :*
$$\boxed{\forall\vec{h}\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \quad df_{m_0}(\vec{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(m_0)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)h_y + \frac{\partial f}{\partial z}(m_0)h_z}$$
*Sous forme **fonctionnelle** :*
$$\boxed{df_{m_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(m_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(m_0)dz}$$

Théorème 5.3 (Continuité, classe $\mathcal{C}^1$ et différentiabilité)

1. *Si f est **différentiable** en m_0, alors elle est **continue** en m_0.*
2. *Si f est de **classe $\mathcal{C}^1$** en $m_0 \in \mathbb{R}^3$ (i.e. admet des **dérivées partielles continues** en m_0), alors f est **différentiable** en m_0.*

Exemple 5.4

Soit f la fonction définie par $f(x,y,z) = xy^2z^3$ et $m = (x,y,z)$ un point générique de l'espace. Les **dérivées partielles** de f en m sont données par
$$\frac{\partial f}{\partial x}(m) = y^2z^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(m) = 2xyz^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(m) = 3xy^2z^2$$
Elles sont **continues** en tout m donc f est **différentiable** en m et sa **différentielle** en m s'exprime selon
$$df_m = \frac{\partial f}{\partial x}(m)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(m)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(m)dz = y^2z^3\,dx + 2xyz^3\,dy + 3xy^2z^2\,dz$$
Plus explicitement, df_m est l'application linéaire définie par :
$$\forall\vec{h}\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \quad df_m(\vec{h}) = y^2z^3\,h_x + 2xyz^3\,h_y + 3xy^2z^2\,h_z$$

Remarque 5.5 (Différentes notations)

On veillera à bien distinguer toutes les notations rencontrées ($d, \partial, \delta, \Delta$) :

- df est la **différentielle** de f (définition mathématique, variation infinitésimale sans sens physique, cf. théorème 5.2) ;
- ∂f indique une **dérivation partielle** de f (cf. définition 4.1) ;
- δf est une **petite variation** de f (cf. définition 6.1) ;
- Δf est une **incertitude** sur f (cf. définition 6.3).

Définition 5.6 (Différentielle logarithmique)

*On appelle **différentielle logarithmique** de f différentiable et non nulle, la quantité*

$$\boxed{d\big(\ln|f|\big) = \frac{df}{f}}$$

Propriété 5.7 (Différentiabilité et opérations)

Soit $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables et α des réels.

- $d(\alpha f) = \alpha df$
- $d(fg) = f\,dg + g\,df$
- $d(f+g) = df + dg$
- $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$
- $\dfrac{d(fg)}{fg} = \dfrac{df}{f} + \dfrac{dg}{g}$
- $\dfrac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{\frac{f}{g}} = \dfrac{df}{f} - \dfrac{dg}{g}$
- $\dfrac{d(|f|^\alpha)}{|f|^\alpha} = \alpha\dfrac{df}{f}$

Par exemple, pour $\varphi = \alpha\dfrac{|f|^p|g|^q}{|h|^r}$ où f, g, h sont différentiables non nulles et $\alpha, p, q, r \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = p\frac{df}{f} + q\frac{dg}{g} - r\frac{dh}{h}$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables.

- $d(g \circ f) = (g' \circ f) \times df$

Exemple 5.8 (Différentielle et composition)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ et $g = \sqrt{\ }$.
Posons $h = g \circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. On a donc $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Déterminons la **différentielle** de h en un point générique $m = (x,y,z)$ de l'espace.

- ***1re méthode : calcul direct***

  Les **dérivées partielles** de h en m sont données par

  $$\frac{\partial h}{\partial x}(m) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(m) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \frac{\partial h}{\partial z}(m) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

  La **différentielle** de h en m s'exprime alors selon

  $$dh_m = \frac{\partial h}{\partial x}(m)dx + \frac{\partial h}{\partial y}(m)dy + \frac{\partial h}{\partial z}(m)dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

- ***2e méthode : composition***

  La **différentielle** de f en m s'exprime selon $df_m = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ et la dérivée de g est donnée par $g'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

  On en déduit la **différentielle** de h en m selon

  $$dh_m = (g' \circ f)(m) \times df_m = \frac{1}{\sqrt{f(m)}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

De manière plus concise, on a illustré par cet exemple la formule $d(\sqrt{f}) = \dfrac{df}{\sqrt{f}}$.

Variation

Principe : On utilise la différentielle comme **approximation linéaire** de la **variation** :

$$\boxed{\delta f \approx df}$$

Définition 6.1 (Variation)

- *δf est la **variation absolue** de f ;*
- *$\dfrac{\delta f}{f}$ est la **variation relative** de f.*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point $m_0(x_0, y_0, z_0)$.
Si les quantités x_0, y_0 et z_0 sont modifiées respectivement de $\delta x, \delta y$ et δz, alors la **variation** δf de f **au premier ordre** est :

$$\delta f \approx df_{m_0}(\delta x, \delta y, \delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \times \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \times \delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(m_0) \times \delta z$$

On retiendra en abrégé $\boxed{\delta f \approx \dfrac{\partial f}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\delta z}$.

Exercices 6.2 (Variation, variation relative)

1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = xy^2$.
   Calculer la **variation** de f quand x varie de 3 à 2.98 et y varie de 2 à 2.01.

   Réponse :
   - **Différentielle :** $df_m = y^2\,dx + 2xy\,dy$ pour $m = (x,y)$.
   - **Variation :** $\delta f \approx y^2\,\delta x + 2xy\,\delta y$.
   - **Application numérique :** les données sont $m_0 = (3,2)$, $\delta x = -0.02$ et $\delta y = 0.01$.
     D'où la **variation** : $\delta f_{m_0} \approx 2^2 \times (-0.02) + 2 \times 3 \times 2 \times 0.01 = 0.04$
     puis l'**approximation** : $f(2.98, 2.01) \approx f(2,3) + 0.04 = 12.04$.
     Valeur exacte : $f(2.98, 2.01) \approx 12,0395$ à 10^{-4} près.

2. Donner une approximation de la **variation relative** du volume V d'un parallélépipède rectangle de côtés $x = 20\,\mathrm{cm}$, $y = 40\,\mathrm{cm}$, $z = 25\,\mathrm{cm}$, quand x et y augmentent de 0.2 et z diminue de 1. La fonction d'intérêt est $V(x,y,z) = xyz$.

   Réponse :
   - **Différentielle logarithmique :** $\dfrac{dV_m}{V} = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dz}{z}$ pour $m = (x,y,z)$.
   - **Variation relative :** $\dfrac{\delta V}{V} \approx \dfrac{\delta x}{x} + \dfrac{\delta y}{y} + \dfrac{\delta z}{z}$.
   - **Application numérique :** les données sont $\delta x = \delta y = 0.2\,\mathrm{cm}$ et $\delta z = -1\,\mathrm{cm}$.
     D'où la **variation relative** (ici diminution) : $\dfrac{\delta V}{V} \approx -0.025 = -2.5\ \%$.

Incertitude

Idée : le calcul d'incertitude, permet d'évaluer les erreurs qui se produisent lors de mesures de grandeurs physiques, les instruments de mesure n'étant pas d'une précision absolue. Il faut évaluer ces incertitudes pour répondre à la question :

« la relation n'est pas vérifiée exactement
*parce qu'elle est **fausse***
*ou parce que les mesures sont **imprécises** ? »*

On en déduit des marges d'erreurs, en dehors desquelles la relation sera invalidée.

Définition 6.3 (Incertitude)

Pour une grandeur physique f :

- *l'**incertitude de mesure absolue** sur f se note $\Delta f > 0$;*
- *l'**incertitude de mesure relative** sur f est alors $\dfrac{\Delta f}{f}$.*

*Multipliée par 100, l'incertitude relative donne la précision de la mesure en **pourcentage**.*

La valeur exacte de f se situe dans un « intervalle de confiance » $[f - \Delta f, f + \Delta f]$.
On note alors le résultat de la mesure sous la forme : $f \pm \Delta f$.

Incertitude

Pour éviter les compensations, on ajoute en valeur absolue toutes les erreurs pour obtenir la variation maximale de f.
On a $\delta f \approx df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots$.
Or, par inégalité triangulaire : $|df| \leqslant \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right||dx| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right||dy| + \cdots$.
Pour déterminer l'**incertitude** sur f, on envisage la « pire erreur » :

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \cdots}$$

Exemple 6.4 (Aire d'un rectangle)

Considérons un rectangle de longueur L et de largeur ℓ.
L'aire de ce rectangle est donnée par $S = L \times \ell$.

- **Incertitude absolue** sur S : à partir de la différentielle $dS = L\,d\ell + \ell\,dL$, on tire $\Delta S = \ell\,\Delta L + L\,\Delta\ell$.
- **Incertitude relative** sur S : $\dfrac{\Delta S}{S} = \dfrac{\ell\,\Delta L + L\,\Delta\ell}{L\ell} = \dfrac{\Delta L}{L} + \dfrac{\Delta\ell}{\ell}$.

Vérification : en effectuant le calcul exact, la **variation** de surface peut s'écrire

$$\delta S = (\ell + \delta\ell)(L + \delta L) - S = \ell\,\delta L + L\,\delta\ell + \delta\ell \times \delta L$$

Le terme $\delta\ell \times \delta L$ étant **négligeable** (d'**ordre 2**) par rapport aux termes $\ell\,\delta L$ et $L\,\delta\ell$ (d'**ordre 1**), on obtient bien $\delta S \approx L\,\delta\ell + \ell\,\delta L$.

Exemples 6.5 (Variations, incertitudes relatives)

1. ***Volume d'un gaz parfait :*** $V(P,T) = \dfrac{nRT}{P}$, n et R constantes.

   À l'aide de la différentielle logarithmique, on trouve $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{dT}{T} - \dfrac{dP}{P}$.

   - **Variation relative :** $\dfrac{\delta V}{V} \approx \dfrac{\delta T}{T} - \dfrac{\delta P}{P}$
   - **Incertitude relative :** $\dfrac{\Delta V}{V} \approx \dfrac{\Delta T}{T} + \dfrac{\Delta P}{P}$

2. ***Énergie cinétique :*** $E = \frac{1}{2}mv^2$.

   À l'aide de la différentielle logarithmique, on trouve $\dfrac{dE}{E} = \dfrac{dm}{m} + 2\dfrac{dv}{v}$.

   - **Variation relative :** $\dfrac{\delta E}{E} \approx \dfrac{\delta m}{m} + 2\dfrac{\delta v}{v}$
   - **Incertitude relative :** $\dfrac{\Delta E}{E} \approx \dfrac{\Delta m}{m} + 2\dfrac{\Delta v}{v}$

Remarque : l'utilisation de la différentielle logarithmique est particulièrement intéressante dans le cas de grandeurs produit, quotient ou puissance de plusieurs variables. Elle permet d'approximer l'**erreur relative** et l'**incertitude relative.**

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est dérivable suivant x ou y ou z, la dérivée partielle correspondante est également une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
Elle peut donc elle aussi admettre des dérivées partielles.

Définition 7.1 (Dérivées partielles secondes)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles telles que celles-ci également admettent des dérivées partielles.
*On peut alors définir 9 **dérivées partielles secondes :***

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{matrix}$$

Remarque 7.2 (Ordre de dérivation)

L'**ordre de dérivation** est important ! Par exemple $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ signifie que l'on dérive d'abord par rapport à x puis y : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Le tableau des dérivées partielles secondes constituent la **matrice hessienne** de f (cf. cours de maths de 2e année).

Théorème 7.3 (Théorème de Schwarz)

*Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont toutes les **dérivées partielles secondes** existent. Si, de plus, ces dérivées secondes sont **continues** (on dit que f est de **classe $\mathcal{C}^2$**), alors l'ordre de dérivation **n'a pas** d'importance ; on dit que les dérivées partielles de f **commutent :***

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}$$

Exemple 7.4

Soit f définie par $f(x, y, z) = y\cos(2x) + y^2 e^{3z}$.
Vérifions que les dérivées partielles secondes « croisées » coïncident.
Posons $m = (x, y, z)$ pour simplifier les écritures.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(m) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\cos(2x) + 2y\,e^{3z}\right) = -2\sin(2x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(m) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-2y\sin(2x)\right) = -2\sin(2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(m) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3y^2 e^{3z}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(m) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-2y\sin(2x)\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(m) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3y^2 e^{3z}\right) = 6y\,e^{3z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(m) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\cos(2x) + 2y\,e^{3z}\right) = 6y\,e^{3z} \end{cases}$$

Définition 8.1 (Forme différentielle)

*Soit $U \in \mathbb{R}^3$ un ouvert. Une **forme différentielle** sur U est une application de la forme $(x, y, z) \in U \longmapsto \omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ où P, Q, R sont trois fonctions de $U \to \mathbb{R}$.*

Notation abrégée : $\boxed{\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$

Si P, Q, R sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ω est dite de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemples 8.2

- Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable sur U, sa différentielle
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
est une **forme différentielle.** C'est plus précisément l'application
$$(x, y, z) \longmapsto df_{(x,y,z)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz$$
- $\omega = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$
- l'évolution élémentaire d'un système thermodynamique (chaleur δQ, énergie dU, entropie dS...)

Définition 8.3 (Forme exacte)

Soit $\omega : U \to \mathbb{R}$ une forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
*Une forme différentielle ω est **exacte** lorsqu'elle est la différentielle d'une fonction différentiable.*
Il existe donc une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = df$.
*On dit que f est une **primitive** de ω.*

Exemples 8.4

- Soit $\omega_1 = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$.
En remarquant que $2x\,dx = d(x^2)$ et de même avec y et z,
puis en posant $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, on voit que $\omega_1 = df_1$.
Donc ω_1 est **exacte** sur $\mathbb{R}^3$ et f_1 est une **primitive** de ω_1.
- Soit $\omega_2 = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dz}{z}$.
En remarquant que $\dfrac{dx}{x} = d\big(\ln|x|\big)$ et de même avec y et z,
puis en posant $f_2(x, y, z) = \ln|xyz|$, on voit que $\omega_2 = df_2$ sur $(\mathbb{R}^*)^3$.
Donc ω_2 est **exacte** sur $\mathbb{R}^3$ et f_2 est une **primitive** de ω_2.
- Soit $\omega_3 = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.
En posant $f_3(x, y, z) = xyz$, on voit que $\omega_3 = df_3$.
Donc ω_3 est **exacte** sur $\mathbb{R}^3$ et f_3 est une **primitive** de ω_3.

Définition 8.5 (Forme fermée)

*Une forme différentielle ω de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est **fermée** sur U lorsqu'en tout point de U (conditions de **fermeture**) :*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Remarque 8.6

- Moyen mnémotechnique : la condition de fermeture se retrouve en écrivant le **produit vectoriel symbolique** $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Pour une forme différentielle à deux variables $\omega = Pdx + Qdy$, il n'y a qu'une condition de fermeture : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Exemple 8.7

Soit $\omega = 2y\,dx + (2x + z)\,dy + y\,dz$.
On a $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 0 = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 1 = \dfrac{\partial R}{\partial y}$. Donc ω est **fermée** sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème 8.8 (Théorème de Schwarz (conséquence))

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U.
*ω est **exacte** sur $U \implies \omega$ est **fermée** sur U.*

Remarque 8.9

Contraposée très utile : sur tout ouvert U,
ω de classe $\mathcal{C}^1$ **n'est pas fermée** sur $U \implies \omega$ **n'est pas exacte** sur U.

Sur certains ouverts, la réciproque est vraie.

Théorème 8.10 (Théorème de Poincaré)

*Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **produit d'intervalles** U.*
*ω est **fermée** sur $U \implies \omega$ est **exacte** sur U.*

*Donc, avec le théorème précédent, sur un **produit d'intervalles,***
ω fermée $\iff \omega$ exacte.

Remarque 8.11 (Extension (facultatif))

En fait, le théorème de Poincaré est valable sur une classe d'ouverts bien plus vaste que les simples produits d'intervalles : les ouverts **connexes simplement connexes** (i.e. « sans trou ni poignée »)...

Exemple 8.6 (Suite)

On reprend $\omega = 2y\,dx + (2x + z)\,dy + y\,dz$.
C'est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ qui est un **produit d'intervalles** et elle est **fermée.** Donc d'après le théorème de Poincaré, elle est **exacte.**
On cherche f tel que $\omega = df$.
Or $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$.
On identifie les dérivées partielles de f à P, Q, R et on intègre successivement.
On a donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x + z$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y$.
On obtient ainsi le système ci-dessous

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x + z \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y \end{cases}$$

que l'on va résoudre progressivement par intégrations successives.

Exemple 8.6 (Suite)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + z & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = y & (3) \end{cases}$$

1. On intègre (1) par rapport à x : $\underline{f(x, y, z) = 2yx + g(y, z)}$.
2. On dérive f par rapport à y et on identifie avec (2) :
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ et (2) : $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + z$, ainsi $\dfrac{\partial g}{\partial y} = z$.
En intégrant par rapport à y, $g(y, z) = zy + h(z)$.
Pour le moment $\underline{f(x, y, z) = 2yx + zy + h(z)}$.
3. On dérive f par rapport à z et on identifie avec (3) :
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = y + \dfrac{dh}{dz}$ et (3) : $\dfrac{\partial f}{\partial z} = y$, ainsi $\dfrac{dh}{dz} = 0$ et donc h est constante.

Finalement, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{f(x, y, z) = 2yx + zy + \lambda}$.

Avec une condition ponctuelle éventuelle : par exemple si l'on sait que $f(0, 0, 0) = 4$, alors $\lambda = 4$ et f est entièrement déterminée.

Notions à retenir

- Concept de fonction de plusieurs variables
- Visualisation des fonctions de deux variables
- Calcul des dérivées partielles premières et secondes
- Notion de différentielle et lien avec les dérivées partielles
- Application des différentielles :
  - ⋆ à la détermination du plan tangent à la surface représentative d'une fonction de deux variables
  - ⋆ au calcul de petites variations et d'incertitudes
- Reconnaître une forme différentielle exacte et maîtriser la méthode d'intégration

Annexe

- **Compléments, divers exemples**

A. Dérivées partielles | Notations symboliques

Exemple A.1 (Loi de gaz parfaits)

La ***loi des gaz parfaits*** $PV = kT$ est une équation reliant trois variables P, V, T, avec P : pression du gaz (en Pa), V : volume du gaz (en m^3), T : température du gaz (en $^\circ K$), et $k > 0$ une constante.
Elle définit ainsi pour chacune de ces trois variables une fonction des deux autres :

$$T(P,V) = \frac{PV}{k} \qquad P(V,T) = \frac{kT}{V} \qquad V(P,T) = \frac{kT}{P}$$

On a

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{k}, \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{P}{k}, \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{kT}{V^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{k}{V}, \quad \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{kT}{P^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{P}.$$

On observe les relations

$$\frac{\partial T}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{kV}{kV} = 1 \qquad \frac{\partial T}{\partial V} \times \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{kP}{kP} = 1 \qquad \frac{\partial P}{\partial V} \times \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{k^2T^2}{P^2V^2} = 1$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{kT}{PV} = -1$$

Contrairement aux premières relations, les deuxièmes relations montrent que la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **ne** peut **pas** être interprétée comme un quotient. Il s'agit d'une notation purement **symbolique.**

B. Différentielle | Une composition

Exemple B.1 (Différentielle et composition (facultatif))

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(u,v) = uv$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $g(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(t\cos(\omega t), t\sin(\omega t)\big)$ où $\omega > 0$ est fixé.

Posons $h = f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a donc $h(t) = t^2\cos(\omega t)\sin(\omega t)$.

Déterminons la **dérivée** de h en t.

- ***1re méthode : calcul direct***

  La **dérivée** de h en t est donnée par

  $$h'(t) = 2t\cos(\omega t)\sin(\omega t) + t^2\big(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\big) = t\sin(2\omega t) + t^2\cos(2\omega t)$$

- ***2e méthode : composition***

  La **différentielle** de f en (u,v) est donnée par $df_{(u,v)} = v\,du + u\,dv$
  et le **vecteur dérivé** de g s'exprime dans la base canonique $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ de $\mathbb{R}^2$ selon

  $$\vec{g}\,'(t) = x'(t)\vec{e}_x + y'(t)\vec{e}_y = \big(\cos(\omega t) - t\sin(\omega t)\big)\vec{e}_x + \big(\sin(\omega t) + t\cos(\omega t)\big)\vec{e}_y$$

  On en déduit la **dérivée** de h en t selon

  $$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{d}{dt} f\big(x(t), y(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) \\ &= t\sin(\omega t)\big(\cos(\omega t) - t\sin(\omega t)\big) + t\cos(\omega t)\big(\sin(\omega t) + t\cos(\omega t)\big) \\ &= 2t\cos(\omega t)\sin(\omega t) + t^2\big(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\big) = t\sin(2\omega t) + t^2\cos(2\omega t) \end{aligned}$$

De manière plus concise, on a vérifié sur cet exemple la formule $(f \circ g)' = df_g(\vec{g}\,')$.

C. Approximation | Un calcul d'incertitude

Exercice C.1

On souhaite déterminer la masse m d'un manchon cylindrique en acier de masse volumique $\rho = (7,80 \pm 0,01)\,\mathrm{g.cm^{-3}}$.

On mesure les différentes cotes du manchon à l'aide d'un pied à coulisse dont l'incertitude est de l'ordre de $\varepsilon = 0,2\,\mathrm{mm}$.
On obtient les résultats suivants pour les rayons extérieur et intérieur ainsi que la longueur du manchon : $R_e = 40,0\,\mathrm{mm}$, $R_i = 25,0\,\mathrm{mm}$ et $h = 21,2\,\mathrm{mm}$.

1. Donner l'expression littérale du volume V du manchon.
   Déterminer l'incertitude sur la mesure du volume.
   Réponse :
   - **Volume :** $V = \pi(R_e^2 - R_i^2)h$. Numériquement : $V = 64936.7\,\mathrm{mm}^3$.
   - **Différentielle :** $dV = \dfrac{\partial V}{\partial R_e}\,dR_e + \dfrac{\partial V}{\partial R_i}\,dR_i + \dfrac{\partial V}{\partial h}\,dh$
     $= \pi\big[2hR_e\,dR_e - 2hR_i\,dR_i + (R_e^2 - R_i^2)\big]\,dh.$
   - **Incertitude :** $\Delta V = \pi\,\big[2hR_e\,\Delta R_e + 2hR_i\,\Delta R_i + (R_e^2 - R_i^2)\,\Delta h\big]$.
     Ici $\Delta R_e = \Delta R_i = \Delta h = \varepsilon$, donc $\Delta V = \pi\big[2hR_e + 2hR_i + (R_e^2 - R_i^2)\big]\varepsilon \approx 2344.3\,\mathrm{mm}^3$,
     d'où $V = (64.9 \pm 2.4)\,\mathrm{cm}^3$.
2. Déterminer l'incertitude sur la masse du manchon.
   Réponse :
   - **Masse :** $m = \rho V$.
   - **Différentielle :** $dm = \rho\,dV + V\,d\rho$.
   - **Incertitude :** $\Delta m = \rho\,\Delta V + V\,\Delta\rho$.

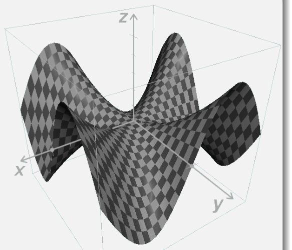
   Numériquement : $\rho = 7,80\,\mathrm{g.cm^{-3}}$, $\Delta\rho = 0,01\,\mathrm{g.cm^{-3}}$, $m = 506.2\,\mathrm{g}$, donc $\Delta m \approx 19.4\,\mathrm{g}$, d'où $m = (506 \pm 20)\mathrm{g}$.

D. Dérivées partielles secondes | Un contre-exemple

Exemple D.1 (Contre-exemple)

Soit f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Calculons les dérivées partielles secondes croisées en $(0,0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} \end{cases}$$

- Dérivées partielles premières intermédiaires :

  $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = -y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = x \end{cases}$$

- Dérivées partielles secondes :

  $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ On observe ainsi que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

E. Formes différentielles exactes, fermées | Un exemple de thermodynamique

Exemple E.1 (Équation de van der Waals)

L'***équation d'état de van der Waals*** $\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = kT$ relie trois variables P, V, T, avec P : pression du gaz, V : volume du gaz, T : température du gaz, $\alpha, \beta, k > 0$: constantes.
Considérons les formes différentielles variations d'énergie et de chaleur

$$w = \gamma\,dT + \frac{\alpha}{V^2}\,dV \quad \text{et} \quad q = w + P\,dV \quad (\text{avec } \gamma > 0 \text{ constante})$$

1. ***Étude de la forme*** w
   Posons $w = w_1\,dT + w_2\,dV$ avec $w_1 = \gamma$ et $w_2 = \dfrac{\alpha}{V^2}$.
   - On a $\dfrac{\partial w_1}{\partial V} = \dfrac{\partial w_2}{\partial T} = 0$, et alors la forme différentielle w est **fermée**.
   - Les fonctions w_1, w_2 sont de **classe $\mathcal{C}^1$** sur le **produit d'intervalles** $]0,+\infty[\times]\beta,+\infty[$.
     Le théorème de Poincaré assure que la forme différentielle w est **exacte**.
   - Remarquant que $\dfrac{dV}{V^2} = d\Big(-\dfrac{1}{V}\Big)$, on obtient directement $w = d\Big(\gamma T - \dfrac{\alpha}{V}\Big)$.
2. ***Étude de la forme*** q
   On a $q = \gamma\,dT + \Big(\dfrac{\alpha}{V^2} + P\Big)dV$. Posons $q = w_1\,dT + w_3\,dV$ avec $w_3 = \dfrac{kT}{V - \beta}$.
   On a $\dfrac{\partial w_1}{\partial V} = 0$ et $\dfrac{\partial w_3}{\partial T} = \dfrac{k}{V - \beta}$, donc $\dfrac{\partial w_1}{\partial V} \neq \dfrac{\partial w_3}{\partial T}$.
   Ainsi, la forme différentielle q **n**'est **pas fermée**, donc **pas exacte**.