

Équations différentielles linéaires du 1^{er} et du 2nd ordre à coefficients constants

Aimé Lachal

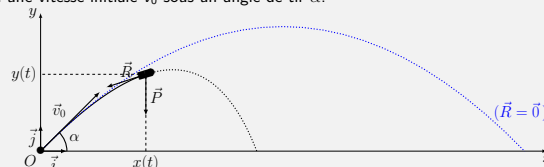
Cours d'OMNI
1^{er} cycle, 1^{re} année

1. Motivations

a) Un problème de cinématique

Trajectoire d'un projectile

Mise en équation du mouvement d'un projectile de masse m , celui-ci étant propulsé dans l'air à une vitesse initiale \vec{v}_0 sous un angle de tir α .



Le bilan des forces s'exerçant sur le projectile donne $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$, où :

- \vec{P} est le poids du projectile d'intensité mg : $\vec{P} = m\vec{g}$, avec m : masse du projectile, g : accélération de la pesanteur terrestre ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$);
- \vec{R} la résistance de l'air proportionnelle à la vitesse : $\vec{R} = -k\vec{v}$, k étant le coefficient de frottement de l'air, \vec{v} le vecteur-vitesse du projectile ($\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$).

Le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}$ fournit le système ci-dessous (\vec{a} étant le vecteur-accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$), en posant $\kappa = k/m$:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\kappa \dot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\kappa \dot{y}(t) - g \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaire du 2nd ordre avec conditions initiales.

2. Équations différentielles du 1^{er} ordre

a) Définitions

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne indifféremment les ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 2.1 (Équation différentielle du 1^{er} ordre)

Une équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$u'(t) + au(t) = \varphi(t) \quad (\text{E})$$

où

- a est une constante fixée (un élément de \mathbb{K}),
- $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une application fixée continue sur un intervalle I , appelée **second membre** de l'équation,
- u est une fonction inconnue dérivable sur I .

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations $u'(t) = \frac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t)$. (Notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

Définition 2.2

Résoudre l'équation (E), c'est trouver toutes les fonctions $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur I qui vérifient (E).

Une telle fonction est alors appelée une **solution** de (E) sur l'intervalle I .

Sommaire

1 Motivations

- Un problème de cinématique
- Un problème de rhéologie
- Un problème d'électrocinétique

2 Équations différentielles du 1^{er} ordre

- Définitions
- Solution générale
- Problème de Cauchy
- Second membre exponentiel
- Second membre trigonométrique
- Principe de superposition
- Exemples

3 Équations différentielles du 2nd ordre

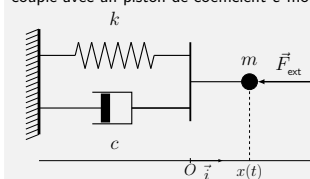
- Définitions
- Solution générale de l'équation homogène
- Solution générale
- Second membre exponentiel ou trigonométrique
- Principe de superposition
- Exemples

1. Motivations

b) Un problème de rhéologie

Système visco-élastique

Mise en équation du mouvement d'un solide de masse m accroché à un ressort de raideur k couplé avec un piston de coefficient c montés en parallèle, sollicité par une force externe.



- \vec{F}_k : force de rappel exercée par le ressort
- \vec{F}_c : force de friction du piston
- \vec{F}_{ext} : force externe
- x : déplacement rectiligne du mobile par rapport à sa position d'équilibre O

Les lois de Hooke et de Reynolds s'écrivent

$$F_k(t) = -k\dot{x}(t), \quad F_c(t) = -c\dot{x}(t).$$

Le bilan des forces s'exerçant sur le solide donne $\vec{F} = \vec{F}_k + \vec{F}_c + \vec{F}_{ext}$ et le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}$ (avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$) fournit l'équation différentielle linéaire du 2nd ordre

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_{ext}(t)$$

avec conditions initiales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ pour un mobile initialement au repos.

2. Équations différentielles du 1^{er} ordre

b) Solution générale

Définition 2.3 (Équation homogène associée)

On appelle **équation homogène** (ou **équation sans second membre**) associée à (E) l'équation suivante :

$$u'(t) + au(t) = 0. \quad (\text{E}_0)$$

Théorème 2.4 (Solution générale de (E₀))

L'ensemble des solutions de l'équation **homogène** (E₀) est constitué des fonctions $u_H : I \rightarrow \mathbb{K}$ de la forme

$$u_H : t \mapsto \lambda e^{-at} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ (constante arbitraire).}$$

On dit que u_H (dépendant du paramètre λ) est la **solution générale** de (E₀).

Proposition 2.5 (Un premier principe de superposition)

Soit $u_p : I \rightarrow \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation (E) sur I .

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable. Alors :

u est une **solution de (E)** ssi $(u - u_p)$ est une **solution de (E₀)**.

Par suite, l'ensemble des solutions de (E) sur I est constitué des applications de la forme $u = u_H + u_p$ où u_H est une solution quelconque de l'équation homogène associée (E₀).

1. Motivations

Prologue

De nombreux phénomènes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, économiques, etc. sont régis par des équations différentielles ou des systèmes différentiels.

On va décrire trois problèmes conduisant à de telles équations :

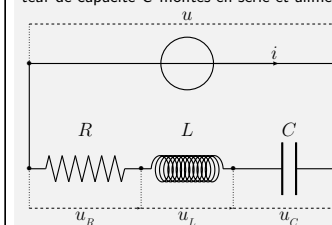
- un problème de cinématique : trajectoire balistique;
- un problème de rhéologie : système visco-élastique;
- un problème d'électrocinétique : circuit RLC.

1. Motivations

c) Un problème d'électrocinétique

Circuit RLC série

On dispose d'un résistor de résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u .



- u_R : tension aux bornes du résistor
- u_L : tension aux bornes de la bobine
- u_C : tension aux bornes du condensateur
- u : tension délivrée par le générateur
- i : courant traversant le circuit
- q : quantité d'électricité correspondante ($\frac{dq}{dt}(t) = i(t)$)

Les lois d'Ohm, de Faraday et de Kirchhoff s'écrivent

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R(t) + u_C(t) + u_L(t); \\ u_R(t) &= R i(t), \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}(t), \quad q(t) = C u_C(t). \end{aligned}$$

Elles conduisent à l'équation différentielle linéaire du 2nd ordre

$$L\ddot{u}_C(t) + R\dot{u}_C + \frac{1}{C}u_C(t) = \frac{1}{C}u(t)$$

avec conditions initiales $u_C(0) = \dot{u}_C(0) = 0$ pour un condensateur initialement déchargé.

2. Équations différentielles du 1^{er} ordre

c) Problème de Cauchy

On admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I . En fait (E) admet **une infinité de solutions** (une pour chaque valeur de la constante λ dans le théorème 2.4).

Définition 2.6 (Problème de Cauchy)

Soit $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Une équation différentielle du premier ordre sur I de fonction inconnue u vérifiant la **condition initiale** $u(t_0) = u_0$ est appelée un **problème de Cauchy**.

Théorème 2.7 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

L'équation (E) admet **une unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$. En particulier, l'équation **homogène** (E₀) admet **une unique solution** u sur I qui vérifie la condition initiale $u(t_0) = u_0$: elle est donnée par $u : t \mapsto u_0 e^{-a(t-t_0)}$.

Autrement dit, rajouter une condition initiale permet de **fixer** la valeur de la constante λ dans le théorème 2.4.

Exemple 2.8 (Loi de désintégration radioactive)

La réduction du nombre de noyaux radioactifs (instables) dans un échantillon est proportionnelle au nombre de noyaux restants. Ce phénomène peut se modéliser, en notant $N(t)$ le nombre moyen de noyaux restants à l'instant t , N_0 le nombre de noyaux initialement présents et λ le taux moyen de désintégration, par l'équation $N'(t) = -\lambda N(t)$ avec $N(0) = N_0$. La solution est donnée par $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 2.9 (Second membre polynômial (facultatif))

Si le second membre φ de (E) est une fonction polynôme P non nulle de degré d :

- si $a \neq 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré d ;
- si $a = 0$, alors il existe une solution polynômiale de degré $d + 1$.

Proposition 2.10 (Second membre exponentiel)

Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}$ avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:

- si $\alpha \neq -a$, alors la fonction $u_p : t \mapsto \frac{A}{\alpha + a} e^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;
- si $\alpha = -a$, alors la fonction $u_p : t \mapsto At e^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E).

Remarque 2.11 (Méthode pratique)

En pratique, dans le cas où $\alpha \neq -a$, on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto B e^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$ que l'on reporte dans (E) pour en tirer une équation sur B .

Exemple 2.14

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) + 3u(t) = 4e^{-t} - 5e^{-3t} + 13 \sin(2t). \quad (E)$$

- 1 L'équation homogène associée $u'_H(t) + 3u_H(t) = 0$ admet pour solution générale

$$u_H(t) = \lambda e^{-3t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 2 Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $4\varphi_1 - 5\varphi_2 + 13\varphi_3$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = e^{-3t}$ et $\varphi_3(t) = \sin(2t)$.

Une solution particulière de (E) est de la forme $u_p = 4u_1 - 5u_2 + 13u_3$ où u_1, u_2 et u_3 sont des fonctions vérifiant

$$(E_1): u'_1(t) + 3u_1(t) = e^{-t}; \quad (E_2): u'_2(t) + 3u_2(t) = e^{-3t}; \quad (E_3): u'_3(t) + 3u_3(t) = \sin(2t).$$

- (E₁) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{2}$.
- (E₂) admet une solution de la forme $u_2(t) = B_2 t e^{-3t}$. On trouve $B_2 = 1$.
- (E₃) admet une solution de la forme $u_3(t) = \mu \cos(2t) + \nu \sin(2t)$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. En reportant dans (E₃), on trouve le système $3\mu + 2\nu = 0$ et $-2\mu + 3\nu = 1$ de solution $\mu = -\frac{2}{13}$, $\nu = \frac{3}{13}$.

D'où $u_p(t) = 2e^{-t} - 5t e^{-3t} - 2 \cos(2t) + 3 \sin(2t)$.

- 3 La solution générale de (E) s'écrit finalement

$$u(t) = (\lambda - 5t)e^{-3t} + 2e^{-t} - 2 \cos(2t) + 3 \sin(2t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.1 (Équation différentielle du 2nd ordre)

- 1 Une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t) \quad (E)$$

où a et b sont des **constantes réelles** fixées, appelées **coefficients** de l'équation, et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une application **continue** fixée, appelée **second membre** de l'équation.

On rencontre aussi (notamment en physique) les notations $\begin{cases} u'(t) = \frac{du}{dt}(t) = \dot{u}(t) \\ u''(t) = \frac{d^2u}{dt^2}(t) = \ddot{u}(t) \end{cases}$ (notations de Lagrange/Leibniz/Newton.)

- 2 On appelle **équation homogène associée à (E)** l'équation

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0. \quad (E_0)$$

- 3 On appelle **équation caractéristique associée à (E)** l'équation

$$r^2 + ar + b = 0. \quad (C)$$

Remarque 3.2 (Solutions exponentielles)

Une fonction exponentielle $t \mapsto e^{rt}$ est **solution de (E₀)** ssi r est **racine de (C)**.

On suppose ici que dans l'équation différentielle (E), la constante a est **réelle**.

Proposition 2.12 (Second membre trigonométrique)

Si le second membre φ de (E) est défini par $\varphi(t) = A \cos(\omega t)$ ou $A \sin(\omega t)$ avec $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}^*$, voici deux méthodes pour déterminer une solution particulière de (E) reposant sur le fait que $A \cos(\omega t) = \Re(Ae^{i\omega t})$ et $A \sin(\omega t) = \Im(Ae^{i\omega t})$.

- 1 **Méthode 1 (utilisée en physique)**

- On cherche une solution particulière **complexe** de l'équation « **complexifiée** »

$$z'(t) + az(t) = Ae^{i\omega t}$$

de la forme $z_p : t \mapsto B e^{i\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$ (en physique, on recherche souvent B sous la forme $R e^{i\psi}$ avec $R > 0$ et $\psi \in \mathbb{R}$, donc z_p est de la forme $t \mapsto R e^{i(\omega t + \psi)}$).

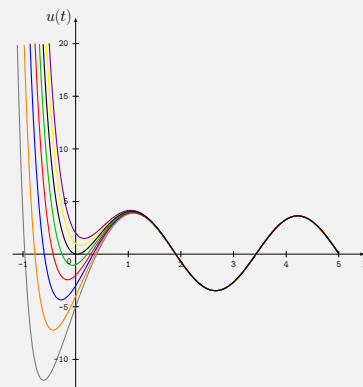
- Si $\varphi(t) = \cos(\omega t)$ (resp. $\sin(\omega t)$) on prend la partie **réelle** (resp. **imaginaire**) de z_p , et l'on obtient une solution particulière **réelle** $u_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E).

- 2 **Méthode 2**

On recherche directement une solution particulière **réelle** de (E)

de la forme $u_p : t \mapsto \mu \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t)$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ (ou de la forme $u_p : t \mapsto R \cos(\omega t + \psi)$ avec $R > 0$ et $\psi \in \mathbb{R}$).

Exemple 2.14



Quelques courbes pour $\lambda \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

Théorème 3.3 (Solution générale de (E₀))

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C).

On note $\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions à valeurs **complexes** et $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions à valeurs **réelles** de l'équation homogène (E₀). Bien sûr $\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} \subset \mathcal{S}_{H,\mathbb{C}}$.

- 1 Si $\Delta > 0$: l'équation (C) a deux racines **réelles distinctes** r_1 et r_2 , et :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\};$$

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- 2 Si $\Delta = 0$: l'équation (C) a une racine **réelle double** r , et :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \{t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\};$$

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- 3 Si $\Delta < 0$: l'équation (C) a deux racines **complexes non réelles conjuguées**

$r_1 = \delta + i\omega$ et $r_2 = \delta - i\omega$ ($\delta \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^*$), et :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\};$$

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{\delta t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exemple 3.4 (Oscillateur harmonique libre)

L'équation $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$ ($\omega > 0$ fixé) admet pour solution générale réelle $t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 2.13 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $a \in \mathbb{K}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et φ_1, φ_2 deux applications continues de I dans \mathbb{K} . Supposons avoir trouvé deux fonctions particulières u_1 et u_2 telles que :

- u_1 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_1(t)$ sur I ;
- u_2 est une solution de l'équation $u'(t) + au(t) = \varphi_2(t)$ sur I .

Alors la fonction $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est une solution de l'équation

$$u'(t) + au(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t).$$

Ce principe de superposition est très utile pour trouver des solutions particulières dans le cas où le second membre de l'équation (E) s'écrit comme somme de fonctions élémentaires.

Cela permet de décomposer un problème compliqué en plusieurs problèmes plus simples. Il faut toutefois faire attention à appliquer ce principe uniquement aux équations différentielles **linéaires**.

Remarque 2.15 (Approche complexe)

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E₃) : $u'_3(t) + 3u_3(t) = \sin(2t)$, on peut aussi utiliser la méthode des complexes. On introduit l'équation complexifiée

$$z'(t) + 3z(t) = e^{2it}. \quad (E'_3)$$

On cherche une solution particulière de la forme $z_3(t) = B_3 e^{2it}$ avec $B_3 \in \mathbb{C}$.

En reportant dans (E'₃), on trouve $B_3 = \frac{1}{3 + 2i} = \frac{1}{13}(3 - 2i)$.

- 1 **Première approche :**

$$z_3(t) = \frac{1}{13}(3 - 2i)(\cos(2t) + i \sin(2t))$$

$$= \frac{1}{13}[(3 \cos(2t) + 2 \sin(2t)) + i(-2 \cos(2t) + 3 \sin(2t))].$$

Enfin $u_3(t) = \Im(z_3(t)) = \frac{1}{13}(-2 \cos(2t) + 3 \sin(2t))$.

- 2 **Deuxième approche :**

On écrit $B_3 = R e^{i\psi}$ avec $R = |B_3| = \frac{1}{\sqrt{13}}$ et $\psi = \arg(B_3) = -\arctan \frac{2}{3}$

puis $z_3(t) = R e^{i(2t + \psi)} = \frac{1}{\sqrt{13}}(\cos(2t + \psi) + i \sin(2t + \psi))$.

Enfin $u_3(t) = \Im(z_3(t)) = \frac{1}{\sqrt{13}} \sin(2t - \arctan \frac{2}{3})$.

On reprend l'équation avec second membre (E) : $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi(t)$.

Proposition 3.5 (Un premier principe de superposition)

Soit u_p une solution particulière de (E) sur I .

L'ensemble des solutions de (E) sur I est constitué des applications de la forme $u = u_p + u_H$ où u_H est une solution de l'équation homogène associée (E₀).

Comme dans le cas des équations d'ordre 1, on admet que lorsque φ est continue, l'équation (E) admet toujours au moins une solution sur I .

En fait (E) admet une **infinité de solutions** (car les constantes λ_1 et λ_2 du théorème 3.3 peuvent prendre une infinité de valeurs). En général, comme les solutions dépendent de 2 paramètres, il faut deux conditions pour obtenir une solution unique.

Théorème 3.6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

Soit $t_0 \in I$ et $u_0, v_0 \in \mathbb{K}$ fixés. Alors il existe une **unique solution** de l'équation (E) sur I vérifiant les **conditions initiales** $u(t_0) = u_0$ et $u'(t_0) = v_0$.

Il s'agit d'un **problème de Cauchy** pour le second ordre.

Exemple 3.7 (Oscillateur harmonique libre)

L'équation $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$ ($\omega > 0$ fixé) avec conditions initiales $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = v_0$ admet pour unique solution réelle $u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 3.8 (2nd membre polynômial, exponentiel ou trigonométrique)

- 1 Si le second membre φ de (E) est une fonction polynôme de degré d :
 - si $b \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré d ;
 - si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d + 1$;
 - si $b = 0$ et $a = 0$ alors il existe une solution polynômiale de degré $d + 2$.
- 2 Si le second membre φ de (E) est une fonction de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}$ sur I , avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$:
 - si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_p : t \mapsto \frac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b} e^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;
 - si α est une racine simple de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_p : t \mapsto \frac{A}{2\alpha + a} t e^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E) ;
 - si α est une racine double de l'équation caractéristique (C), alors la fonction $u_p : t \mapsto \frac{A}{2} t^2 e^{\alpha t}$ est une solution particulière de (E).
- 3 Si $\varphi(t) = A \cos(\omega t)$ ou $A \sin(\omega t)$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$: la méthode est similaire à celle utilisée pour les équations d'ordre 1 en passant par le second membre intermédiaire $t \mapsto Ae^{\omega t}$.

Méthode pratique

Pour un second membre de (E) de la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t}$ sur I avec $(\alpha, A) \in \mathbb{K}^2$, il est inutile de retenir les formes précédentes. En pratique, on préférera la méthode suivante :

- lorsque α n'est pas une racine de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto B e^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α est une racine simple de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto B t e^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,
- lorsque α est une racine double de (C), on recherche une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto B t^2 e^{\alpha t}$ avec $B \in \mathbb{K}$,

que l'on reporte dans (E) pour en tirer une équation sur B .

Remarque 3.9 (Second membre polynôme exponentiel (facultatif))

Cette méthode est généralisable au cas de seconds membres de la forme $t \mapsto P(t) e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré p . Plus précisément : dans le cas où α n'est pas une racine (resp. est une racine simple, est une racine double) de (C), il existe une solution particulière de la forme $u_p : t \mapsto Q(t) e^{\alpha t}$ (resp. $t \mapsto tQ(t) e^{\alpha t}$, $t \mapsto t^2 Q(t) e^{\alpha t}$) où Q est un polynôme de degré p .

Proposition 3.10 (Un deuxième principe de superposition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}$ et φ_1, φ_2 deux applications continues de I dans \mathbb{K} . Supposons avoir trouvé deux fonctions u_1 et u_2 telles que :

- u_1 est une solution de l'équation $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_1(t)$ sur I ;
- u_2 est une solution de l'équation $u''(t) + au'(t) + bu(t) = \varphi_2(t)$ sur I .

Alors $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est une solution de l'équation

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t).$$

Remarque 3.11 (Ordre supérieur (facultatif))

Toutes les méthodes présentées dans ce chapitre sont généralisables au cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque :

$$u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)} + a_2 u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} u'(t) + a_n u(t) = \varphi(t) \dots$$

Exemple 3.12

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 5u'(t) + 4u(t) = 6e^{-t} - 10e^{-2t} \cos t. \quad (E)$$

- 1 L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle a pour solutions -1 et -4 .
- 2 L'équation homogène associée $u_H''(t) + 5u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale $u_H(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-4t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- 3 Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 10\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-2t} \cos t = \Re(e^{(-2+i)t})$. Une solution particulière de (E) est de la forme $u_p = 6u_1 - 10u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
 - (E₁) : $u_1''(t) + 5u_1'(t) + 4u_1(t) = e^{-t}$, (E₂) : $u_2''(t) + 5u_2'(t) + 4u_2(t) = e^{-2t} \cos t$.
 - (E₁) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{3}$.
 - (E₂) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re(B_2 e^{(-2+i)t})$. On trouve $B_2 = -\frac{3+i}{10}$.
 D'où $u_p(t) = 2t e^{-t} + (3 \cos t - \sin t) e^{-2t}$.
- 4 La solution générale de (E) s'écrit finalement

$$u(t) = (2t + \lambda) e^{-t} + \mu e^{-4t} + (3 \cos t - \sin t) e^{-2t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.13

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 6e^{-t} - 8e^{-2t} \cos t. \quad (E)$$

- 1 L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 5 = 0$. Elle a pour solutions $-2 + i$ et $-2 - i$.
- 2 L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 5u_H(t) = 0$ admet alors pour solution générale $u_H(t) = e^{-2t}(\lambda \cos t + \mu \sin t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- 3 Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $6\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-2t} \cos t = \Re(e^{(-2+i)t})$. Une solution particulière de (E) est de la forme $u_p = 6u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
 - (E₁) : $u_1''(t) + 4u_1'(t) + 5u_1(t) = e^{-t}$, (E₂) : $u_2''(t) + 4u_2'(t) + 5u_2(t) = e^{-2t} \cos t$.
 - (E₁) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t e^{-t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{3}$.
 - (E₂) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Re(B_2 t e^{(-2+i)t})$. On trouve $B_2 = -\frac{1}{2}$.
 D'où $u_p(t) = 3t e^{-t} - 4t e^{-2t} \sin t$.
- 4 La solution générale de (E) s'écrit finalement

$$u(t) = (\lambda \cos t + \mu \sin t - 4t \sin t) e^{-2t} + 3t e^{-t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.14

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = 2e^{-2t} - 8e^{-t} \sin(\sqrt{3} t). \quad (E)$$

- 1 L'équation caractéristique associée à (E) s'écrit $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une racine double -2 .
- 2 L'équation homogène associée $u_H''(t) + 4u_H'(t) + 4u_H(t) = 0$ a alors pour solution générale $u_H(t) = e^{2t}(\lambda t + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- 3 Recherchons une solution particulière de (E). On décompose le second membre selon $2\varphi_1 - 8\varphi_2$ avec $\varphi_1(t) = e^{-2t}$ et $\varphi_2(t) = e^{-t} \sin(\sqrt{3} t) = \Im(e^{(-1+i\sqrt{3})t})$. Une solution particulière de (E) est de la forme $u_p = 2u_1 - 8u_2$ où u_1 et u_2 sont des fonctions vérifiant
 - (E₁) : $u_1''(t) + 4u_1'(t) + 4u_1(t) = e^{-2t}$, (E₂) : $u_2''(t) + 4u_2'(t) + 4u_2(t) = e^{-t} \sin(\sqrt{3} t)$.
 - (E₁) admet une solution de la forme $u_1(t) = B_1 t^2 e^{-2t}$. On trouve $B_1 = \frac{1}{3}$.
 - (E₂) admet une solution de la forme $u_2(t) = \Im(B_2 e^{(-1+i\sqrt{3})t})$. On trouve $B_2 = -\frac{i\sqrt{3}}{4}$.
 D'où $u_p(t) = t^2 e^{-2t} + 2e^{-t} \sin(\sqrt{3} t + \frac{\pi}{3})$.
- 4 La solution générale de (E) s'écrit finalement

$$u(t) = (t^2 + \lambda t + \mu) e^{-2t} + 2e^{-t} \sin(\sqrt{3} t + \frac{\pi}{3}), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$


http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_equations_differeentielles/equations_differeentielles0.html

Notions à retenir

- Techniques de résolution
 - * Équation homogène associée
 - * Recherche de solutions particulières pour un second membre exponentiel/trigonométrique (approches réelles et complexes)
 - * Principes de superposition
 - * Résolution de problème de Cauchy

Annexe
• Résolution des problèmes décrits en introduction

Exemple A.1 (Tir d'un projectile)

Reprenons le problème du projectile décrit en introduction de masse m , propulsé dans l'air à une vitesse initiale v_0 sous un angle de tir α .

Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ au cours du temps vérifient les systèmes

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \kappa \dot{x}(t) = 0 & (E_x) \\ \dot{y}(t) + \kappa \dot{y}(t) = -g & (E_y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha & (C)_x \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha & (C)_y \end{cases}$$

1. Equation caractéristique

Les équations (E_x) et (E_y) admettent la même équation caractéristique $r^2 + \kappa r = 0$, de racines 0 et $-\kappa$.

2. Résolution de (E_x) -(C)_x

La solution générale de (E_x) est donnée par $x(t) = \lambda + \mu e^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. En reportant cette expression dans $(C)_x$, on trouve $\lambda = -\mu = \frac{v_0 \cos \alpha}{\kappa}$. D'où

$$x(t) = \frac{v_0 \cos \alpha}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}).$$

3. Résolution de (E_y) -(C)_y

La solution générale de l'équation homogène associée à (E_y) est donnée par $y_h(t) = \lambda + \mu e^{-\kappa t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de (E_y) est $y_p(t) = -\frac{g}{\kappa} t$. La solution générale de (E_y) est alors $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

En reportant cette expression dans $(C)_y$, on trouve $\lambda = -\mu = \frac{v_0 \sin \alpha}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2}$. D'où

$$y(t) = \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2} \right) (1 - e^{-\kappa t}) - \frac{g}{\kappa} t.$$

Exemple A.1 (Tir d'un projectile)

4. Trajectoire du projectile

La trajectoire du projectile est donc portée par la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0 \cos \alpha}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) \\ y(t) = \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2} \right) (1 - e^{-\kappa t}) - \frac{g}{\kappa} t \end{cases}$$

Une représentation cartésienne peut être obtenue en éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$. La première équation fournit $t = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(1 - \frac{\kappa}{v_0 \cos \alpha} x(t) \right)$ que l'on reporte dans la deuxième. Cela donne

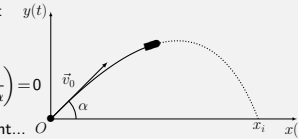
$$y = \left(\tan \alpha + \frac{g}{\kappa v_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{g}{\kappa^2} \ln \left(1 - \frac{\kappa}{v_0 \cos \alpha} x \right).$$

Remarque : la portée du tir est le point d'impact $(x_i, 0)$ du projectile au sol.

Ce point vérifie l'équation $y_i = 0$, soit :

$$\left(\tan \alpha + \frac{g}{\kappa v_0 \cos \alpha} \right) x_i + \frac{g}{\kappa^2} \ln \left(1 - \frac{\kappa x_i}{v_0 \cos \alpha} \right) = 0$$

que l'on ne peut pas résoudre explicitement...



Exemple A.1 (Tir d'un projectile)

5. Cas d'un tir dans le vide

Dans cette situation, il n'y a plus de résistance et l'on a $\kappa = 0$. Les coordonnées du projectile vérifient les systèmes simplifiés

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 & (E_x) \\ \dot{y}(t) = -g & (E_y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha & (C)_x \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha & (C)_y \end{cases}$$

Les équations (E_x) et (E_y) se résolvent directement et l'on trouve

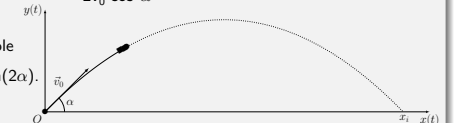
$$\begin{cases} x(t) = v_0 (\cos \alpha) t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (\sin \alpha) t \end{cases}$$

En éliminant le paramètre t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve immédiatement que la trajectoire est portée par la courbe d'équation

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x.$$

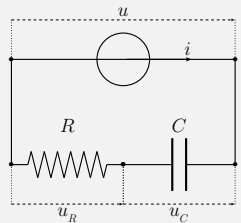
Il s'agit d'une parabole

de portée $x_i = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$.



Exemple A.2 (Circuit électrique de type RC)

On dispose d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C montés en série et alimentés par un générateur délivrant une tension u .



- i : courant traversant le circuit
- q : quantité d'électricité correspondante $\left(\frac{dq}{dt} = i(t) \right)$
- u_R : tension aux bornes du résistor $u_R(t) = R i(t) = R \dot{q}(t)$
- u_C : tension aux bornes du condensateur $u_C = \frac{1}{C} q(t)$
- u : tension délivrée par le générateur

La loi des mailles s'écrit $u_R + u_C = u$. Elle conduit à l'équation différentielle

$$R \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = u(t)$$

avec condition initiale $q(0) = 0$ pour un condensateur initialement déchargé.

Exemple A.2 (Circuit électrique de type RC)

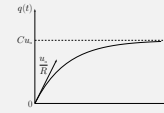
Résolution

1. Premier cas : générateur de courant continu, i.e. u est une constante $u_0 > 0$.

Solution :

$$q(t) = C u_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

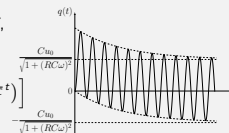
puis $i(t) = \frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$



2. Deuxième cas : générateur de courant alternatif, i.e. $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ avec $u_0 > 0$.

Solution :

$$q(t) = \frac{C u_0}{1 + (RC\omega)^2} \left[\sin(\omega t) - RC\omega (\cos(\omega t) - e^{-\frac{t}{RC}}) \right]$$

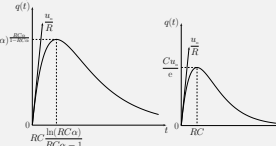


3. Troisième cas : générateur de courant amorti, i.e. $u(t) = u_0 e^{-\alpha t}$ avec $u_0, \alpha > 0$.

Solution :

$$q(t) = \begin{cases} \frac{C u_0}{1 - RC\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}}) & \text{si } \alpha \neq \frac{1}{RC} \\ \frac{u_0}{R} t e^{-\frac{t}{RC}} & \text{si } \alpha = \frac{1}{RC} \end{cases}$$

(cas de résonance)



Exemple A.3 (Circuit électrique de type RLC)

Reprenons le circuit RLC décrit en introduction avec une tension en entrée sinusoïdale d'amplitude $u_0 > 0$ et de pulsation $\omega \geq 0$: $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.

La tension aux bornes du condensateur vérifie le système

$$\begin{cases} L \ddot{u}_C(t) + R \dot{u}_C + \frac{1}{C} u_C(t) = \frac{1}{C} u_0 \cos(\omega t) & (E) \\ u_C(0) = \dot{u}_C(0) = 0 & (C) \end{cases}$$

1. Résolution de l'équation homogène associée à (E)

L'équation homogène associée à (E) s'écrit

$$L \ddot{u}_h(t) + R \dot{u}_h + \frac{1}{C} u_h(t) = 0 \quad (E_0)$$

d'équation caractéristique (C) : $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$.

Notons r_1 et r_2 les racines de (C), $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$ son discriminant et posons $\delta = \sqrt{|\Delta|}$.

La solution générale de (E_0) sur \mathbb{R} s'écrit, selon le signe de Δ selon :

- si $4\frac{L}{C} < R^2$, alors $r_1 = -\frac{R-\delta}{2L}$, $r_2 = -\frac{R+\delta}{2L}$ et $u_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [\lambda \operatorname{ch}(\frac{\delta}{2L}t) + \mu \operatorname{sh}(\frac{\delta}{2L}t)]$;
 - si $4\frac{L}{C} > R^2$, alors $r_1 = -\frac{R-i\delta}{2L}$, $r_2 = -\frac{R+i\delta}{2L}$ et $u_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [\lambda \cos(\frac{\delta}{2L}t) + \mu \sin(\frac{\delta}{2L}t)]$;
 - si $4\frac{L}{C} = R^2$, alors $r_1 = r_2 = -\frac{R}{2L}$ et $u_h(t) = (\lambda + \mu t) e^{-\frac{R}{2L}t}$
- où, dans chaque cas, λ et μ sont des réels quelconques.

Exemple A.3 (Circuit électrique de type RLC)

2. Recherche d'une solution particulière de (E)

Remarquons que le second membre de (E) peut s'écrire $u_0 \cos(\omega t) = u_0 \Re(e^{i\omega t})$ et que, lorsque $R \neq 0$, (C) n'a pas de racine imaginaire pure (i.e. $i\omega$ n'est pas racine de (C)).

• Cas $R \neq 0$. On recherche une solution particulière de la forme $u_p(t) = \Re(A e^{i\omega t})$. On trouve $A = \frac{u_0}{2[(1-LC\omega^2) + iRC\omega]}$ puis en posant $D = (1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$:

$$u_p(t) = \frac{u_0}{D} \left[(1-LC\omega^2) \cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t) \right].$$

• Cas $R = 0$. On a $\delta = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ et les racines de (C) sont $r_1 = -\frac{i}{\sqrt{LC}}$ et $r_2 = \frac{i}{\sqrt{LC}}$. Deux cas sont à distinguer :

* si $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la solution u_p du cas précédent se simplifie selon

$$u_p(t) = \frac{u_0}{1-LC\omega^2} \cos(\omega t);$$

* si $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, condition qui s'écrit encore $LC\omega^2 = 1$, on recherche ici une solution particulière de la forme $u_p(t) = \Re(B t e^{i\omega t})$. On obtient $B = -\frac{i u_0}{2}$ puis

$$u_p(t) = \frac{u_0}{2} \omega t \sin(\omega t).$$

Exemple A.3 (Circuit électrique de type RLC)

3. Résolution du système (E)-(C)

La solution générale de (E) s'obtient selon $u_C = u_h + u_p$.

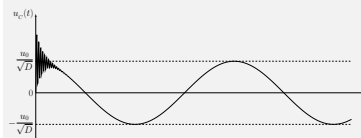
Enfin les conditions initiales (C) permettent de fixer les paramètres λ et μ .

• Cas $R \neq 0$.

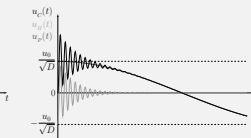
$$u_p(t) = \frac{u_0}{D} \left[(1-LC\omega^2) \cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t) \right]$$

et

$$u_h(t) = \begin{cases} -\frac{u_0}{D} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[(1-LC\omega^2) \operatorname{ch}(\frac{\delta}{2L}t) + \frac{R}{\delta} (1+LC\omega^2) \operatorname{sh}(\frac{\delta}{2L}t) \right] & \text{si } 4\frac{L}{C} < R^2 \\ -\frac{u_0}{D} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[(1-LC\omega^2) \cos(\frac{\delta}{2L}t) + \frac{R}{\delta} (1+LC\omega^2) \sin(\frac{\delta}{2L}t) \right] & \text{si } 4\frac{L}{C} > R^2 \\ -\frac{u_0}{D} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[(1-LC\omega^2) + \frac{R}{2L} (1+LC\omega^2) t \right] & \text{si } 4\frac{L}{C} = R^2 \end{cases}$$



En temps long : régime permanent (« quasi-périodique »)



Zoom en temps petit : régime transitoire

Exemple A.3 (Circuit électrique de type RLC)

3. Résolution du système (E)-(C)

La solution générale de (E) s'obtient selon $u_C = u_h + u_p$.

Enfin les conditions initiales (C) permettent de fixer les paramètres λ et μ .

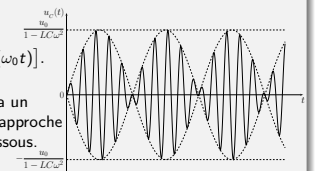
• Cas $R = 0$. Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (c'est la pulsation propre du circuit).

L'équation (E) se réécrit alors $\ddot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 u_0 \cos(\omega t)$.

* Si $\omega \neq \omega_0$:

$$u_C(t) = \frac{\omega_0^2 u_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)].$$

Lorsque ω se rapproche de ω_0 , il y a un phénomène de battements qui se rapproche de celui de résonance signalé ci-dessous.



* Si $\omega = \omega_0$:

$$u_C(t) = \frac{u_0}{2} \omega_0 t \sin(\omega_0 t).$$

La tension est amplifiée : il y a résonance.

