

# Courbes et surfaces

Aimé Lachal

Cours d'OMNI  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

## Sommaire

- 1 Courbes paramétrées
  - Droite, segment
  - Cercle
  - Courbes générales
  - Allure locale
- 2 Surfaces paramétrées
  - Plan
  - Surfaces générales
  - Cylindre
  - Cône
  - Sphère
  - Tore

## 1. Courbes paramétrées

### a) Droite, segment

#### Propriété 1.1 (Représentation paramétrique d'une droite)

Si  $(D)$  est une droite de l'espace de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  et passant par le point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , alors  $(D)$  admet la **représentation paramétrique** suivante, obtenue en projetant l'équation vectorielle  $M_0\vec{M} = t\vec{u}$  de paramètre  $t$  sur les 3 axes.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + u_x t \\ y(t) = y_0 + u_y t, t \in \mathbb{R} \\ z(t) = z_0 + u_z t \end{cases}$$

Chaque valeur du paramètre  $t$  donne un point  $M(t)$  de la droite. Cette représentation paramétrique n'est **pas unique**, puisqu'elle dépend du choix du point  $M_0$  et du vecteur directeur  $\vec{u}$ . On peut aussi changer le paramètre  $t$ ...

1

## 1. Courbes paramétrées

### a) Droite, segment

#### Exemple 1.2

- Les paramétrages  $\begin{cases} x(t) = -1 + 2t \\ y(t) = 3 - 5t \\ z(t) = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  et  $\begin{cases} x(t) = 5 + 4t \\ y(t) = -12 - 10t \\ z(t) = 7 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

correspondent tous deux à la même droite. En effet :

- \* le premier paramétrage indique immédiatement la droite dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$  et passant par le point  $A(-1, 3, 4)$ ;
- \* le deuxième paramétrage indique immédiatement la droite dont un vecteur directeur est  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$  et passant par le point  $B(5, -12, 7)$ .

On observe que  $\vec{v} = 2\vec{u}$  et  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\vec{u}$ , ce sont bien les mêmes droites.

- La représentation  $\begin{cases} x(t) = -1 + 2t^3 \\ y(t) = 3 - 5t^3 \\ z(t) = 4 + t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  est encore un autre paramétrage de la droite précédente, obtenue par substitution **bijective** de paramètre  $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$ .

2

## 1. Courbes paramétrées

### a) Droite, segment

#### Remarque 1.3 (Représentation paramétrique d'un segment)

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de coordonnées  $(x_A, y_A, z_A)$  et  $(x_B, y_B, z_B)$ .

- Un paramétrage de la **droite**  $(AB)$  est donc

$$\begin{cases} x(t) = x_A + t(x_B - x_A) \\ y(t) = y_A + t(y_B - y_A), t \in \mathbb{R} \\ z(t) = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}$$

- Un paramétrage du **segment**  $[AB]$  est

$$\begin{cases} x(t) = x_A + t(x_B - x_A) \\ y(t) = y_A + t(y_B - y_A), t \in [0, 1] \text{ ou encore } \begin{cases} x(t) = (1-t)x_A + tx_B \\ y(t) = (1-t)y_A + ty_B, t \in [0, 1] \\ z(t) = (1-t)z_A + tz_B \end{cases} \\ z(t) = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}$$

Avec ce choix de paramétrage,  $M(0) = A$  et  $M(1) = B$ .

#### Exemple 1.4

Un paramétrage du segment  $[AB]$  dans un repère du plan avec  $A(-1, 3)$  et  $B(2, 4)$  est

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 3t \\ y(t) = 3 + t, t \in [0; 1] \text{ (pas de composante en } z \text{)}. \end{cases}$$

3

## 1. Courbes paramétrées

### b) Cercle

#### Propriété 1.5 (Représentation paramétrique d'un cercle)

Le **cercle** du **plan** de centre  $A(x_A, y_A)$  et de rayon  $R$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  peut se paramétrer selon

$$\begin{cases} x(t) = x_A + R \cos(t) \\ y(t) = y_A + R \sin(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Une **représentation cartésienne** de ce cercle est donnée par l'équation  $(x - x_A)^2 + (y - y_B)^2 = R^2$ .

Le paramétrage d'un cercle de l'espace est plus difficile à obtenir, sauf dans des cas simples (lorsque le plan du cercle est parallèle à l'un des plans de coordonnées).

#### Exemple 1.6 (Cercle dans l'espace)

Un paramétrage du cercle de l'espace de rayon  $R > 0$  et de centre  $A(1, 2, 3)$  parallèle au plan  $(Oxz)$  est donné par

$$\begin{cases} x(t) = 1 + R \cos(t) \\ y(t) = 2 \\ z(t) = 3 + R \sin(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

4

## 1. Courbes paramétrées

### c) Courbes générales

#### Définition 1.7 (Courbe paramétrée)

Soit  $f, g$  et  $h$  des fonctions définies sur l'intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction vectorielle définie par  $\vec{F}(t) = f(t)\vec{e}_x + g(t)\vec{e}_y + h(t)\vec{e}_z$ .

- 1 Alors la donnée de  $I$  et de  $\vec{F}$  est appelée **courbe paramétrée** de l'espace ou **arc paramétré**. On utilisera aussi la notation  $\vec{OM}(t)$  pour  $\vec{F}(t)$ .

Dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le point  $M(t)$  a pour coordonnées  $(f(t), g(t), h(t))$

et dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le vecteur  $\vec{OM}(t)$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ .

- 2 L'ensemble des points de coordonnées  $(f(t), g(t), h(t))$  pour  $t \in I$  est appelé **support de la courbe**, et la variable  $t$  est appelée **paramètre**.

On dit que le système  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in I \text{ est une } \textbf{représentation paramétrique} \\ z = h(t) \end{cases}$

de la courbe paramétrée dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Parfois on marque la dépendance de  $x, y, z$  en  $t$  en écrivant  $x(t), y(t), z(t)$ .

- 3 On définit de manière similaire une courbe paramétrée du plan à l'aide d'une fonction vectorielle  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

5

## 1. Courbes paramétrées

### c) Courbes générales

#### Remarque 1.8 (Aspects statique/dynamique)

Deux courbes paramétrées ayant le même support peuvent avoir des paramétrages **différents**.

Le **support** donne une vision **statique** de la courbe, le **paramétrage** induit une **dynamique** de parcours sur le support.

- Par exemple, les courbes paramétrées

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t), t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x(t) = \sin(2t), t \in [0, \pi] \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

ont le même support : le cercle trigonométrique.

Mais ce cercle n'est pas décrit à la même vitesse, ni dans le même sens; de plus, le point de départ de la dynamique n'est pas le même.

- De même, les courbes paramétrées

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t), t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x(t) = \cos(2t), t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

ont le même support : le cercle trigonométrique.

Mais ce cercle n'est pas décrit à la même vitesse;

de plus, il est parcouru une fois dans le premier cas, deux fois dans le second.

6

## 1. Courbes paramétrées

### c) Courbes générales

#### Définition 1.9

La courbe paramétrée  $\vec{F}$  est **dérivable** si et seulement si les fonctions  $f, g, h$  sont dérivables. Sa dérivée est donnée par :

$$\vec{F}'(t) = f'(t)\vec{e}_x + g'(t)\vec{e}_y + h'(t)\vec{e}_z.$$

On dit alors que  $\vec{F}'(t)$  est le **vecteur tangent** à la courbe paramétrée au point  $M(t)$ .

#### Interprétation cinématique

Généralité	Cinématique
$t$	temps
support de la courbe paramétrée	trajectoire
$\vec{F}(t) = \vec{OM}(t)$	vecteur position
$\vec{F}'(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t)$	vecteur vitesse
$\vec{F}''(t) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}(t)$	vecteur accélération

7

Exemple 1.10 (Chute dans le vide)

On se place dans un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Un corps ponctuel de masse  $m$  situé à une position initiale (à l'instant 0)  $M_0(x_0, 0, z_0)$  et animé d'une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$  se déplace dans le plan vertical  $(Oxz)$  sous l'action d'une force de gravité constante  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  ( $g > 0$ ).

- Modélisation : soit  $M(t)(x(t), y(t), z(t))$  la position du corps à l'instant  $t$ .

On a les conditions initiales  $M(0)(x_0, 0, z_0)$  et  $\frac{d\vec{OM}}{dt}(0) = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$ .

Le vecteur **accélération** est donné par  $\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}(t) = -g \vec{e}_z$ .

- En intégrant une première fois, on trouve le vecteur **vitesse** :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = -gt \vec{e}_z + \vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + (-gt + v_z) \vec{e}_z$$

- En intégrant une deuxième fois, on trouve le vecteur **position** :

$$\vec{OM}(t) = v_x t \vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_z t\right) \vec{e}_z + \vec{OM}_0 = (v_x t + x_0) \vec{e}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0\right) \vec{e}_z$$

Ainsi, dans  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$M(t) \left( v_x t + x_0, 0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0 \right)$$

Exemple 1.10 (Chute dans le vide)

On se place dans un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Un corps ponctuel de masse  $m$  situé à une position initiale (à l'instant 0)  $M_0(x_0, 0, z_0)$  et animé d'une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$  se déplace dans le plan vertical  $(Oxz)$  sous l'action d'une force de gravité constante  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  ( $g > 0$ ).

- La trajectoire du corps admet une représentation **paramétrique** donnée par

$$\begin{cases} x(t) = v_x t + x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0 \end{cases}, t \geq 0$$

En « éliminant » le paramètre  $t$  dans les équations précédentes, on tire  $t = (x - x_0)/v_x$ , puis une équation **cartésienne** de la trajectoire

$$z = -\frac{g}{2v_x^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_z}{v_x}(x - x_0) + z_0, x \geq x_0$$

Il s'agit d'une **parabole** dans le plan  $(Oxz)$ .

Exemple 1.13 (Mouvement circulaire uniforme)

Considérons le cercle trigonométrique parcouru à une vitesse angulaire  $\omega > 0$  constante (mouvement **circulaire uniforme**) :

$$\vec{F}(t) = \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

- Le vecteur-dérivée est donné par

$$\vec{F}'(t_0) = -\omega \sin(\omega t_0) \vec{e}_x + \omega \cos(\omega t_0) \vec{e}_y$$

Puisque  $\|\vec{F}'(t_0)\| = \omega \neq 0$ , on a  $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ , donc ce vecteur dirige la tangente au cercle en  $t_0$ . C'est le **vecteur-vitesse**.

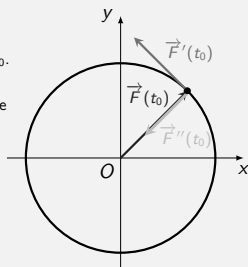
On remarque que  $\vec{F}(t_0) \cdot \vec{F}'(t_0) = 0$ , c'est-à-dire que les vecteurs  $\vec{F}(t_0)$  et  $\vec{F}'(t_0)$  sont **orthogonaux**.

- Le vecteur-dérivée seconde est donné par

$$\vec{F}''(t_0) = -\omega^2 \cos(\omega t_0) \vec{e}_x - \omega^2 \sin(\omega t_0) \vec{e}_y$$

On remarque que  $\vec{F}''(t_0) = -\omega^2 \vec{F}(t_0)$ .

Le **vecteur-accélération** est dirigé vers  $O$  selon l'opposé du rayon-vecteur, il s'agit d'un mouvement à **accélération centrale**.

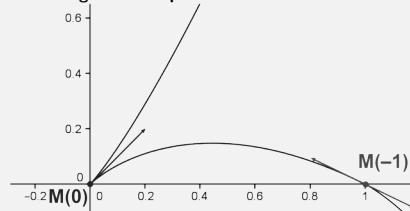


Exemple 1.14 (Une courbe plane)

Étude de l'allure de la **courbe paramétrée**  $t \mapsto \vec{F}(t) = t^2 \vec{e}_x + (t^2 + t^3) \vec{e}_y$ , au voisinage des points de paramètres  $-1$  et  $0$ .

On calcule  $\vec{F}'(t) = 2t \vec{e}_x + (2t + 3t^2) \vec{e}_y$ , et  $\vec{F}''(t) = 2 \vec{e}_x + (2 + 6t) \vec{e}_y$ .

- $t = -1$  : le point  $(1, 0)$  est **régulier** et  $\vec{F}'(-1) = -2 \vec{e}_x + \vec{e}_y$  est **vecteur tangent** à la courbe, qui reste du même côté que le vecteur  $\vec{F}''(-1) = 2 \vec{e}_x - 4 \vec{e}_y$ .
- $t = 0$  : le point  $(0, 0)$  est **stationnaire** car  $\vec{F}'(0) = \vec{0}$ . Un **vecteur tangent** est dans ce cas  $\vec{F}''(0) = 2 \vec{e}_x + 2 \vec{e}_y$  (et la position est donnée par  $\vec{F}'''(0) = 6 \vec{e}_y$  ; on a une **demi-tangente** et un **point de rebroussement de 1<sup>re</sup> espèce**).



Définition 1.11 (Point régulier/singulier)

- Lorsque  $\vec{F}'(t) \neq \vec{0}$  on dit que  $M(t)$  est un point **régulier**.
- Lorsque  $\vec{F}'(t) = \vec{0}$ , on dit que  $M(t)$  est un point **stationnaire** (ou **singulier**).

Propriété 1.12 (Point régulier/singulier et tangente)

Soit  $M_0$  le point de paramètre  $t_0$ .

- si  $M_0$  est **régulier**, alors la courbe admet en  $M_0$  une **tangente** de vecteur directeur  $\vec{F}'(t_0) = x'(t_0) \vec{e}_x + y'(t_0) \vec{e}_y + z'(t_0) \vec{e}_z$ . Elle admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0), t \in \mathbb{R} \\ Z = z'(t_0)(t - t_0) + z(t_0) \end{cases}$$

Si de plus  $\vec{F}''(t_0)$  **n'est pas colinéaire** à  $\vec{F}'(t_0)$ , alors la position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le sens de  $\vec{F}''(t_0)$  (il pointe du côté de la courbe indiquant la **concavité/convexité** locale).

- si  $M_0$  est **stationnaire**,  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ , le premier vecteur-dérivé **non nul**  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$  dirigera la **tangente** à la courbe en  $M_0$ .

Exemple 1.15 (Hélice circulaire)

L'**hélice circulaire** d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$  et de pas  $h$  admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t), t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$

Notons  $\vec{F}$  la fonction vectorielle correspondante :

$$\vec{F}(t) = R \cos(t) \vec{e}_x + R \sin(t) \vec{e}_y + \frac{h}{2\pi} t \vec{e}_z$$

Le **vecteur tangent** au point  $M_0$  de paramètre  $t_0$  vaut

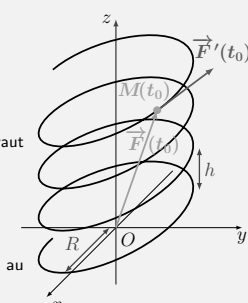
$$\vec{F}'(t_0) = -R \sin(t_0) \vec{e}_x + R \cos(t_0) \vec{e}_y + \frac{h}{2\pi} \vec{e}_z$$

Sa norme vaut  $\|\vec{F}'(t_0)\| = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} > 0$ .

Ainsi tous les points de l'hélice sont **réguliers**.

Une représentation paramétrique de la **tangente** au point  $M_0$  est donnée par :

$$\begin{cases} x = -R \sin(t_0)(t - t_0) + R \cos(t_0) \\ y = R \cos(t_0)(t - t_0) + R \sin(t_0), t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$



Propriété 2.1 (Représentation paramétrique d'un plan)

Si  $(P)$  est un plan de l'espace passant par  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et dirigé par les vecteurs non colinéaires  $\vec{a} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ , alors  $(P)$  admet la **représentation paramétrique**

suivante, obtenue en projetant l'équation vectorielle  $\vec{M}_0\vec{M} = u\vec{a} + v\vec{b}$  de paramètres  $u, v$  sur les 3 axes :

$$\begin{cases} x(u, v) = x_0 + a_x u + b_x v \\ y(u, v) = y_0 + a_y u + b_y v, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \\ z(u, v) = z_0 + a_z u + b_z v \end{cases}$$

À chaque valeur du couple  $(u, v)$  correspond un point  $M(u, v)$  du plan  $(P)$ .

Cette représentation paramétrique **n'est pas unique**, puisqu'elle dépend du choix du point  $M_0$  et des vecteurs directeurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  du plan  $(P)$ . On peut aussi changer les paramètres  $u, v, \dots$

Exemple 2.2 (Paramétrages différents d'un plan)

- Le paramétrage  $\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x(u, v) = 2u \\ y(u, v) = 5v, (u, v) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$  représente le plan passant par le point  $A(0, 0, 3)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

- Le paramétrage  $\mathcal{P}_2 : \begin{cases} x(s, t) = 2 + 2s + 2t \\ y(s, t) = 5t, (s, t) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$  représente le plan passant par le point  $B(2, 0, 3)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

- En choisissant  $u = 1$  et  $v = 0$  dans  $\mathcal{P}_1$ , on voit que  $B \in \mathcal{P}_1$ . De plus, on remarque que  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . Ainsi  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ . On peut le retrouver en posant  $u = s + t$  et  $v = t$ .

- Réciproquement,  $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$ , donc  $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ . On peut le retrouver en posant  $s = u - v$  et  $t = v$ .

- En conclusion,  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ .

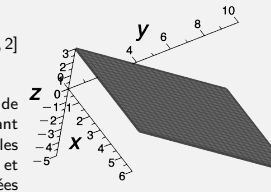
Exemple 2.2 (Paramétrages différents d'un plan)

- La représentation paramétrique  $\begin{cases} x(u, v) = 2u^3 \\ y(u, v) = 5v^5, (u, v) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$  est un autre paramétrage du plan  $\mathcal{P}_1$ . Il est simplement obtenu en remplaçant les paramètres  $u$  et  $v$  par  $u^3$  et  $v^5$  qui décrivent chacun  $\mathbb{R}$ .

- Le paramétrage

$$\begin{cases} x(u, v) = 2u \\ y(u, v) = 5v, (u, v) \in [0, 3] \times [0, 2] \\ z(u, v) = 3 - 4v \end{cases}$$

représente le **parallélogramme** de sommets obtenus en choisissant pour les paramètres  $u$  et  $v$  les bornes des intervalles  $[0, 3]$  et  $[0, 2]$ , soit les points de coordonnées  $(0, 0, 3), (6, 0, 3), (6, 10, -5), (0, 10, -5)$ .



Définition 2.3 (Surface paramétrée)

Soit  $f, g$  et  $h$  des fonctions définies sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction vectorielle définie par  $\vec{F}(u, v) = f(u, v)\vec{e}_x + g(u, v)\vec{e}_y + h(u, v)\vec{e}_z$ .

- Alors la donnée de  $D$  et de  $\vec{F}$  est appelée **surface paramétrée** de l'espace ou **nappe paramétrée**. On utilisera aussi la notation  $\vec{OM}(u, v)$  pour  $\vec{F}(u, v)$ .

Dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le point  $M(u, v)$  a pour coordonnées

$(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$  et dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le vecteur  $\vec{OM}(u, v)$  a pour

composantes  $\begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \\ h(u, v) \end{pmatrix}$ .

- L'ensemble des points de coordonnées  $(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$  pour  $(u, v) \in D$  est appelé **support de la surface**, et les variables  $u, v$  sont appelés **paramètres**.

On dit que le système  $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D$  est une **représentation paramétrique** de la surface paramétrée dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Parfois on marque la dépendance de  $x, y, z$  en  $u, v$  en écrivant  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ .

Le fait qu'il y ait 2 paramètres  $u$  et  $v$  correspond à la notion intuitive de « dimension 2 ».

Propriété 2.6 (Représentation paramétrique)

Le **cylindre infini** d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$  peut être paramétré par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

$$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \vec{F}(u, v) = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z$$

ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ :

$$\begin{cases} x(u, v) = R \cos(u) \\ y(u, v) = R \sin(u) \\ z(u, v) = v \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $x^2 + y^2 = R^2$  (sous-entendu  $z \in \mathbb{R}$  quelconque).

En effet, en choisissant le cercle  $C$  dans le plan  $(Oxy)$  centré en  $O$  et en notant  $R$  son rayon, un point générique  $m$  de  $C$  s'écrit sous la forme

$$\vec{Om} = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y, u \in [0, 2\pi]$$

D'autre part, un point générique  $M$  du cylindre s'obtient en remarquant que ses projetés orthogonaux sur le plan  $(Oxy)$  et sur l'axe  $(Oz)$  sont des points génériques respectivement  $m$  de  $C$  et  $P$  de  $(Oz)$ , donc de la forme  $\vec{OP} = v \vec{e}_z, v \in \mathbb{R}$ .

Enfin :  $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OP} = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$ .

Cylindres dans la nature



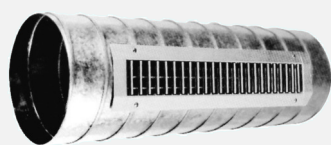
Chêneau



Colonnes de la citadelle d'Amman (Jordanie)



Solenéoide



Gaine de climatiseur



Manchon

Définition 2.4 (Courbes coordonnées)

Soit  $\Sigma$  le support de la surface paramétrée  $(u, v) \mapsto \vec{OM}(u, v)$ .

Lorsque  $u_0$  est fixé,  $v \mapsto \vec{OM}(u_0, v)$  définit une courbe contenue dans  $\Sigma$ ;

de même, lorsque  $v_0$  est fixé,  $u \mapsto \vec{OM}(u, v_0)$  définit une courbe contenue dans  $\Sigma$ . Ces courbes sont appelées **courbes coordonnées**.

Plan tangent

Les vecteurs tangents aux courbes coordonnées, s'il existent, sont tangents à la surface.

Par conséquent, les vecteurs  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$ , s'ils sont **non nuls**, sont **tangents** à la surface  $\Sigma$  au point  $M(u_0, v_0)$ .

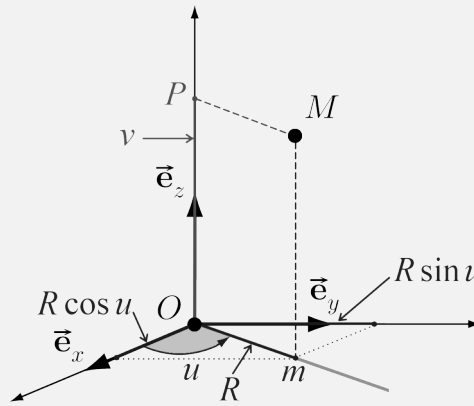
S'ils sont de plus **non colinéaires**, ces vecteurs permettent de définir le **plan tangent** à la surface  $\Sigma$  au point  $M(u_0, v_0)$ . On dit que le point  $M$  est **régulier**. Dans ce cas, le vecteur

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

est un vecteur **normal** à ce plan tangent, donc à la surface  $\Sigma$ .

Si ces vecteurs sont **colinéaires** (éventuellement si l'un d'entre eux est nul), on a  $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{0}$ . On dit que le point  $M$  est **singulier**.

Cylindre de révolution d'axe  $(Oz)$  de rayon  $R$



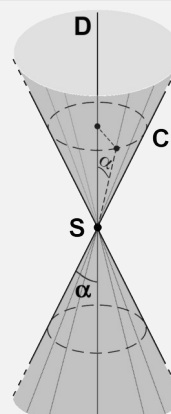
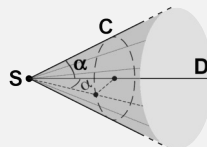
Définition 2.9 (Cône)

Soit  $S$  un point de l'espace,  $D$  une droite passant par  $S$  et  $C$  un cercle d'axe  $D$  de centre distinct de  $S$ .

Le **cône de révolution** de sommet  $S$  et de base  $C$  est la surface obtenue en réunissant toutes les droites passant par  $S$  intersectant  $C$ .

On appelle **axe du cône** la droite  $D$  et **demi-angle au sommet** du cône l'angle  $\alpha$  entre son axe et n'importe quelle droite du cône.

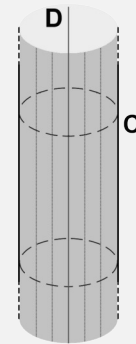
Le **demi-cône de révolution** de sommet  $S$  et de base  $C$  est la surface obtenue en réunissant toutes les demi-droites issues de  $S$  intersectant  $C$ .



Définition 2.5 (Cylindre)

Soit  $D$  une droite et  $C$  un cercle de l'espace de centre appartenant à  $D$  tels que  $C$  soit situé dans le plan orthogonal à la droite  $D$ .

Le **cylindre de révolution** de base  $C$  et d'axe  $D$  est la surface obtenue en réunissant toutes les droites parallèles à  $D$  intersectant  $C$ .



Remarque 2.7

- Les « coupes » à  $u$  constant sont des **droites** parallèles à l'axe  $(Oz)$ .
- Les « coupes » à  $v$  constant sont des **cercles** de rayon  $R$  d'axe  $(Oz)$ .
- On verra ultérieurement le lien avec le système des **coordonnées cylindriques** :

$$\begin{cases} u \leftrightarrow \theta \\ v \leftrightarrow z \\ R \leftrightarrow r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Exemple 2.8

- Une représentation paramétrique du cylindre d'axe  $(Ox)$ , de rayon 2 compris entre les plans d'équation  $x = 0$  et  $x = 5$  (donc de longueur totale 5) est donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = v \\ y(u, v) = 2 \cos(u) \\ z(u, v) = 2 \sin(u) \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5]$$

- Une représentation paramétrique du « solide » délimité par le cylindre précédent est alors donnée par

$$\begin{cases} x(r, u, v) = v \\ y(r, u, v) = r \cos(u) \\ z(r, u, v) = r \sin(u) \end{cases}, r \in [0, 2], u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5]$$

Propriété 2.10 (Représentation paramétrique)

Le **cône** d'axe  $(Oz)$ , de sommet  $O$  et de demi-angle au sommet  $\alpha$  peut être paramétré par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \vec{F}(u, v) = v \tan(\alpha) \cos(u) \vec{e}_x + v \tan(\alpha) \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z$  ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$\begin{cases} x(u, v) = v \tan(\alpha) \cos(u) \\ y(u, v) = v \tan(\alpha) \sin(u) \\ z(u, v) = v \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $x^2 + y^2 = \tan^2(\alpha) z^2$ .

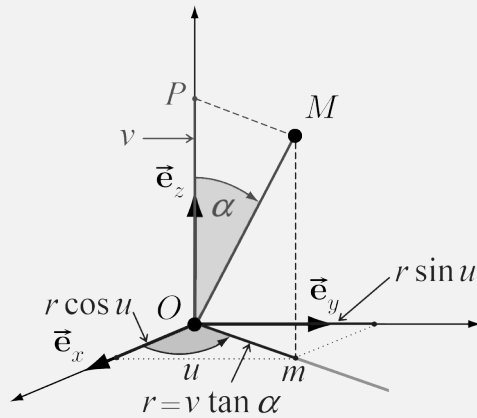
En effet : considérons un point générique  $M$  du cône et introduisons ses projetés orthogonaux  $m$  sur le plan  $(Oxy)$  et  $P$  sur l'axe  $(Oz)$ .

On obtient ainsi un point générique  $P$  de  $(Oz)$ , donc de la forme  $\vec{OP} = v \vec{e}_z, v \in \mathbb{R}$ . D'autre part, l'angle  $\widehat{MOP}$  coïncidant avec  $\alpha$ , on a  $Om = PM = v \tan(\alpha)$ .

En notant  $r = v \tan(\alpha)$ , on obtient alors un point générique  $m$  du cercle de centre  $O$  de rayon  $r$  dans le plan  $(Oxy)$ , donc de la forme  $\vec{Om} = r \cos(u) \vec{e}_x + r \sin(u) \vec{e}_y, u \in [0, 2\pi]$ .

D'où :  $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OP} = v \tan(\alpha) \cos(u) \vec{e}_x + v \tan(\alpha) \sin(u) \vec{e}_y + v \vec{e}_z, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$

Cône de révolution de sommet  $O$  d'axe  $(Oz)$  de demi-angle au sommet  $\alpha$



Remarque 2.11

• Une autre représentation paramétrique du cône est donnée par 
$$\begin{cases} x = v \cos(u) \\ y = v \sin(u) \\ z = \cot(\alpha) v \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

où  $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$  est la « cotangente » de l'angle  $\alpha$ .

- Les « coupes » à  $u$  constant sont des droites concourantes en  $O$ .
- Les « coupes » à  $v$  constant des cercles d'axe  $(Oz)$ .

Exemple 2.12

• Une représentation paramétrique du cône d'axe  $(Ox)$ , de sommet  $A(1, 2, 3)$  de demi-angle au sommet  $\pi/6$  compris entre les plans d'équation  $x = 0$  et  $x = 5$  est donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = 1 + v\sqrt{3} \\ y(u, v) = 2 + v \cos(u) \\ z(u, v) = 3 + v \sin(u) \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5].$$

• D'où une représentation paramétrique du « solide » délimité par le cône précédent :

$$\begin{cases} x(r, u, v) = 1 + rv\sqrt{3} \\ y(r, u, v) = 2 + rv \cos(u) \\ z(r, u, v) = 3 + rv \sin(u) \end{cases}, r \in [0, 1], u \in [0, 2\pi], v \in [0, 5].$$

Cônes dans la nature



Château d'eau (Midrand, Afrique du Sud)



Cathédrale de Maringa (Brésil)



Monastère (Noravank, Arménie)



Trulli d'Alberobello (Italie)



Trulli d'Alberobello (Italie)

Définition 2.13 (Sphère)

Soit  $A$  un point de l'espace et  $R$  un réel positif.

La **sphère** de centre  $A$  et de rayon  $R$  est la surface des points situés à une distance  $R$  de  $A$ .

Propriété 2.14 (Représentation paramétrique)

La **sphère** de centre  $O$  et de rayon  $R$  peut être paramétrée par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

$$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi], \vec{F}(u, v) = R \cos(u) \sin(v) \vec{e}_x + R \sin(u) \sin(v) \vec{e}_y + R \cos(v) \vec{e}_z$$

ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

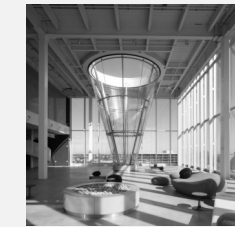
$$\begin{cases} x(u, v) = R \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) = R \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) = R \cos(v) \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$$

Elle admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

Cônes dans la nature



Cône de chantier



Cône de verre, Cirque du Soleil (Montréal)



The big Cone (Los Angeles)



Joint de plomberie conique



Engrenage conique

Remarque 2.15

- Les « coupes » à  $u$  constant sont des cercles d'axes  $(Oz)$ .
- Les « coupes » à  $v$  constant des cercles de centre  $O$  passant par les points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$  (« pôles »).

• On verra ultérieurement le lien avec le système des **coordonnées sphériques** :

$$\begin{cases} u \leftrightarrow \theta \text{ (longitude)} \\ v \leftrightarrow \varphi \text{ (colatitude)} \\ R \leftrightarrow \rho \text{ (rayon)} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

• De manière plus générale, la sphère centrée en un point  $A(x_A, y_A, z_A)$  de rayon  $R$  admet pour **représentation paramétrique**

$$\begin{cases} x(u, v) = x_A + R \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) = y_A + R \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) = z_A + R \cos(v) \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$$

et pour **représentation cartésienne**  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$ .

Exemple 2.16

• Une **représentation paramétrique** de la sphère de centre  $A(1, 2, 3)$  et de rayon 5 est donnée par

$$\begin{cases} x(u, v) = 1 + 5 \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) = 2 + 5 \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) = 3 + 5 \cos(v) \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$$

et une **représentation cartésienne** par  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ .

• Une **représentation paramétrique** du « solide » délimité par la sphère précédente (on parle de « boule ») est alors donnée par

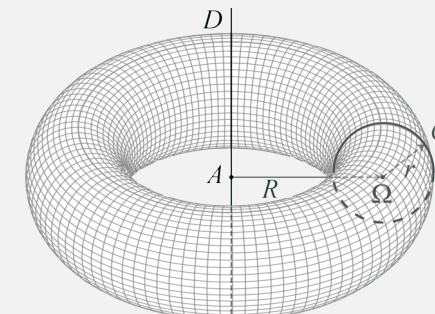
$$\begin{cases} x(r, u, v) = 1 + r \cos(u) \sin(v) \\ y(r, u, v) = 2 + r \sin(u) \sin(v) \\ z(r, u, v) = 3 + r \cos(v) \end{cases}, r \in [0, 5], u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$$

et une **représentation cartésienne** par  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \leq 25$ .

Définition 2.17 (Tore)

Soit  $A$  un point et  $D$  une droite de l'espace,  $r$  et  $R$  deux réels positifs.

Le **tore** de centre  $A$  d'axe  $D$  et de rayons  $r$  et  $R$  est la surface obtenue en réunissant tous les cercles  $C$  coplanaires avec  $D$  de rayon  $r$ , de centre  $\Omega$  situé à une distance  $R$  de  $A$  et tel que le segment  $A\Omega$  soit orthogonal à  $D$ .



Propriété 2.18 (Représentation paramétrique)

Le **tore** de centre  $O$  d'axe  $(Oz)$  et de rayons  $r$  et  $R$  peut être paramétrée par la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par

$$\forall (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

$$\vec{F}(u, v) = (R + r \cos(v)) \cos(u) \vec{e}_x + (R + r \cos(v)) \sin(u) \vec{e}_y + r \sin(v) \vec{e}_z$$

ce qui fournit la **représentation paramétrique** dans le repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$\begin{cases} x(u, v) = (R + r \cos(v)) \cos(u) \\ y(u, v) = (R + r \cos(v)) \sin(u) \\ z(u, v) = r \sin(v) \end{cases}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$$

Il admet également pour **représentation cartésienne** dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  l'équation  $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$ .

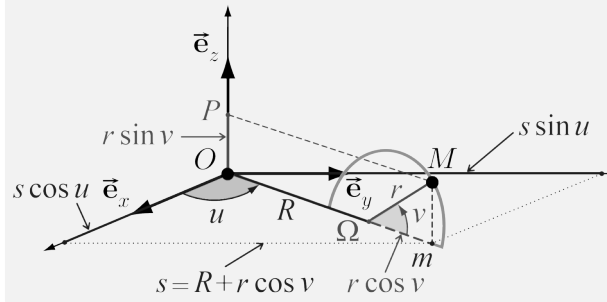
En effet, en se plaçant sur un cercle  $C$  générique de centre générique  $\Omega$  de rayon  $r$ ,  $\vec{O}\Omega = R \cos(u) \vec{e}_x + R \sin(u) \vec{e}_y, u \in [0, 2\pi]$ ,

un point générique  $M$  du cercle  $C$  s'obtient en remarquant que ses projetés orthogonaux sur le plan  $(Oxy)$  et sur l'axe  $(Oz)$  sont des points génériques respectivement  $m$  du cercle de centre  $O$  de rayon  $r \cos(v)$  dans le plan  $(Oxy)$ , et  $P$  de  $(Oz)$ , de la forme

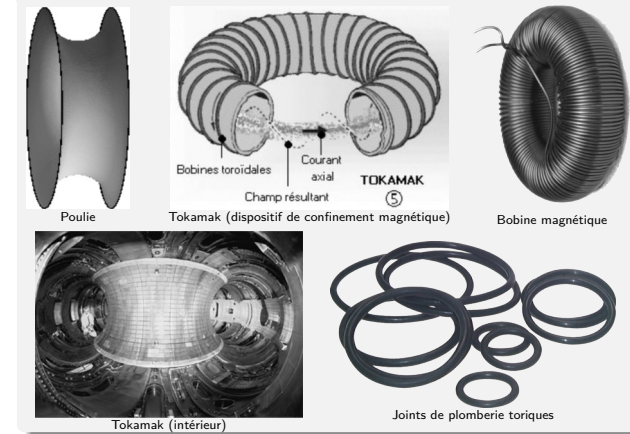
$$\vec{O}m = r \cos(v) (\cos(u) \vec{e}_x + \sin(u) \vec{e}_y) \quad \text{et} \quad \vec{O}P = r \sin(v) \vec{e}_z, v \in [0, 2\pi].$$

On obtient alors la représentation paramétrique du tore avec  $\vec{O}M = \vec{O}\Omega + \vec{\Omega}M + \vec{O}P$ .

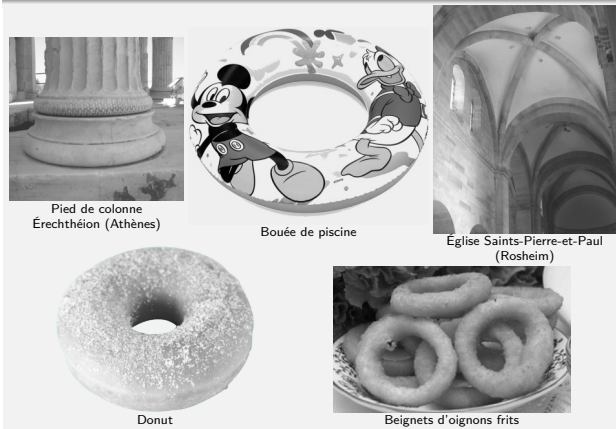
Tore de centre  $O$  d'axe  $(Oz)$  de rayons  $r$  et  $R$



Tores dans la nature



Tores dans la nature



Remarque 2.19 (Nombre de paramètres/Dimension)

- Un représentation paramétrique à **1 paramètre** correspond à une **courbe** :
 
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, t \in D \quad (D \subset \mathbb{R})$$

→ **dimension 1**
- Un représentation paramétrique à **2 paramètres** correspond à une **surface** :
 
$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D \quad (D \subset \mathbb{R}^2)$$

→ **dimension 2**
- Un représentation paramétrique à **3 paramètres** correspond à une **solide** :
 
$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w) \\ z = h(u, v, w) \end{cases}, (u, v, w) \in D \quad (D \subset \mathbb{R}^3)$$

→ **dimension 3**

**Courbes de Lissajous**

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\_Lissajous/Lissajous.html

**Courbes cycloïdales**

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\_cycloïdales/cycloïdest0.html

**Présentation Maple**

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation\_maple\_html/presentation\_maple4.html/#courbes\_parametrees

Notions à retenir

- Courbes paramétrées
  - \* Paramétrages des droites, segments et cercles
  - \* Détermination de la tangente à une courbe en un point et tracé de son allure locale
- Surfaces paramétrées
  - \* Paramétrages des plans, cylindres, cônes, sphères et tores
  - \* Détermination du plan tangent à une surface en un point

Annexe

• Courbes paramétrées planes

Propriété A.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))

- Si  $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$  (cas d'un **point régulier**), la courbe admet une **tangente** en  $M_0$  portée par  $\vec{F}'(t_0)$ . De plus :
  - si  $\vec{F}''(t_0)$  **n'est pas colinéaire** à  $\vec{F}'(t_0)$ ,  $\vec{F}''(t_0)$  indique la concavité locale.  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un **point ordinaire**;
  - si  $\vec{F}''(t_0)$  **est colinéaire** à  $\vec{F}'(t_0)$  et si  $\vec{F}'''(t_0)$  **n'est pas colinéaire** à  $\vec{F}'(t_0)$ , alors la courbe traverse sa tangente au point  $M(t_0)$  en changeant de concavité localement.  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un **point d'inflexion**.
- Si  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$  (cas d'un **point singulier**) et si  $\vec{F}''(t_0) \neq \vec{0}$ , la courbe admet une **demi-tangente** en  $M_0$  portée par  $\vec{F}''(t_0)$ . De plus :
  - si  $\vec{F}'''(t_0)$  **n'est pas colinéaire** à  $\vec{F}''(t_0)$ , alors la courbe traverse sa demi-tangente au point  $M(t_0)$ .  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un **point de rebroussement de 1<sup>re</sup> espèce**;
  - si  $\vec{F}'''(t_0)$  **est colinéaire** à  $\vec{F}''(t_0)$  et si  $\vec{F}^{(4)}(t_0)$  **n'est pas colinéaire** à  $\vec{F}'''(t_0)$ , alors la courbe reste d'un seul côté de sa demi-tangente au point  $M(t_0)$ .  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un **point de rebroussement de 2<sup>e</sup> espèce**.

Propriété A.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))

Plus généralement, lorsque  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$  (cas d'un point singulier) : on recherche le premier entier  $p \geq 2$  tel que  $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$ , puis le premier entier  $q > p$  tel que  $\vec{F}^{(q)}(t_0)$  ne soit pas colinéaire à  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ .

Cas où  $p$  est impair

La courbe admet une tangente en  $M_0$  portée par  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ . De plus :

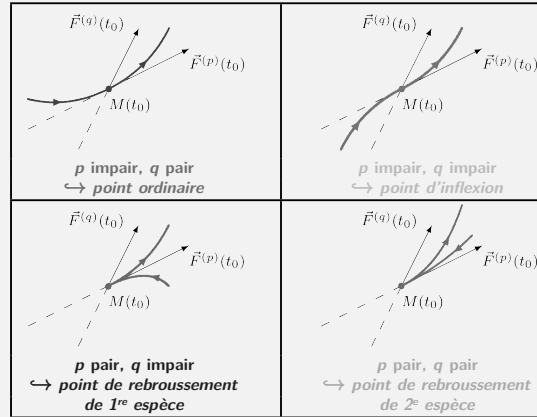
- si  $q$  est pair, alors  $\vec{F}^{(q)}(t_0)$  indique la concavité locale.  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un point ordinaire;
- si  $q$  est impair, alors la courbe traverse sa tangente au point  $M_0$  en changeant de concavité localement.  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un point d'inflexion.

Cas où  $p$  est pair

La courbe admet une demi-tangente en  $M_0$  dirigée par  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ . De plus :

- si  $q$  impair, alors la courbe traverse sa demi-tangente au point  $M_0$ .  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un point de rebroussement de 1<sup>re</sup> espèce;
- si  $q$  est pair, alors la courbe reste d'un seul côté de sa demi-tangente au point  $M_0$ .  $\hookrightarrow$  On dit que  $M_0$  est un point de rebroussement de 2<sup>e</sup> espèce.

Propriété A.1 (Classification des points réguliers/singuliers (facultatif))

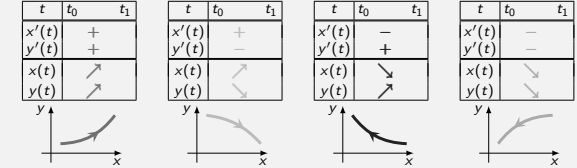


Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée plane définie par la fonction vectorielle  $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{F}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$ , on suit le protocole suivant :

1 on réduit au maximum l'intervalle d'étude  $I$  en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe;

2 on étudie les variations simultanées des fonctions  $x$  et  $y$  sur l'intervalle réduit :



3 on commence à tracer le support en identifiant :

- des points particuliers (d'éventuels points singuliers non étudiés ici);
- les tangentes en ces points. En particulier lorsque  $y'(t) = 0$  et  $x'(t) \neq 0$  (resp.  $x'(t) = 0$  et  $y'(t) \neq 0$ ), la tangente correspondante est horizontale (resp. verticale);
- d'éventuelles branches infinies (non étudiées ici);

4 on termine le tracé en appliquant les symétries identifiées au début.

Exemple A.2 (Lemniscate de Gerono)

Courbe paramétrée  $\vec{F} = \vec{OM} : \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall t \in [0, 2\pi], M(2\pi - t) = s_O(M(t))$  où  $s_O$  est la symétrie du plan par rapport à l'origine  $O$ .  $\Rightarrow$  l'arc de courbe relatif à  $[\pi, 2\pi]$  se déduit donc de celui relatif à  $[0, \pi]$  par la symétrie par rapport à  $O$ .
- $\Rightarrow$  première réduction : étude sur  $[0, \pi]$

Variations simultanées

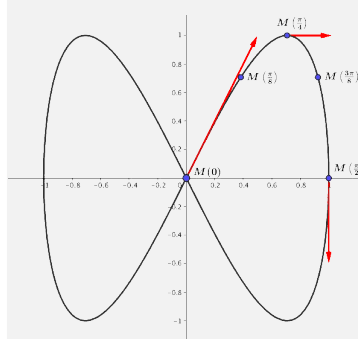
$\vec{F}'(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j}$

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	+	0
$y'(t)$	2	+	-2
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\searrow$

- $\forall t \in [0, \pi], M(\pi - t) = s_{Ox}(M(t))$  où  $s_{Ox}$  est la symétrie du plan par rapport à l'axe  $Ox$ .  $\Rightarrow$  l'arc de courbe relatif à  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  se déduit donc de celui relatif à  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par la symétrie par rapport à  $Ox$ .
- $\Rightarrow$  deuxième réduction : étude sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$

Exemple A.2 (Lemniscate de Gerono)

Courbe paramétrée  $\vec{F} = \vec{OM} : \begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$



- Tracé sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$** 
  - Tangente au point  $M(0)$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}'(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$
  - Tangente au point  $M(\frac{\pi}{4})$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}$
  - Tangente au point  $M(\frac{\pi}{2})$  dirigée par le vecteur  $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$
- Tracé sur  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$**   
On effectue la symétrie par rapport à l'axe  $Ox$
- Tracé sur  $[\pi, 2\pi]$**   
On effectue la symétrie par rapport à l'origine  $O$