

# Systemes de coordonnées Repères locaux

*Aimé Lachal*

Cours d'OMNI  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

## 1 Systèmes de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes
- Coordonnées polaires
- Coordonnées cylindriques
- Coordonnées sphériques
- Courbes et surfaces coordonnées

## 2 Repères locaux

- Cartésiens : déplacement élémentaire
- Polaires : obtention des vecteurs
- Polaires : dérivées des vecteurs
- Polaires : déplacement élémentaire
- Cylindriques : obtention des vecteurs
- Cylindriques : dérivées des vecteurs
- Cylindriques : déplacement élémentaire
- Sphériques : obtention des vecteurs
- Sphériques : dérivées des vecteurs
- Sphériques : déplacement élémentaire

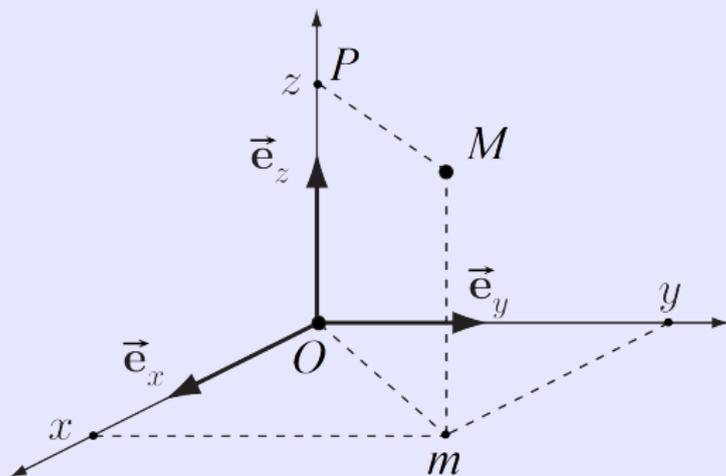
- 1 Systèmes de coordonnées
  - Coordonnées cartésiennes
  - Coordonnées polaires
  - Coordonnées cylindriques
  - Coordonnées sphériques
  - Courbes et surfaces coordonnées
- 2 Repères locaux

Dans tout ce paragraphe, on se place dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormé **fixe** direct  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  ou  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

## Coordonnées cartésiennes

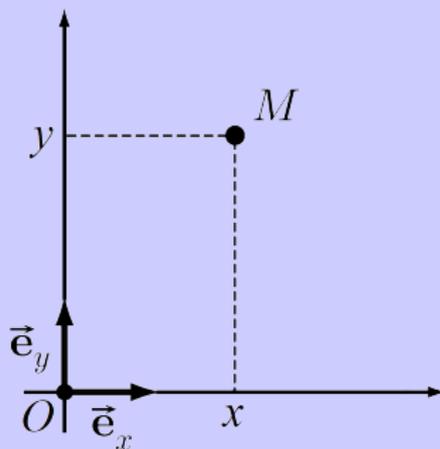
Dans l'espace (ou le plan), tout point  $M$  peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$



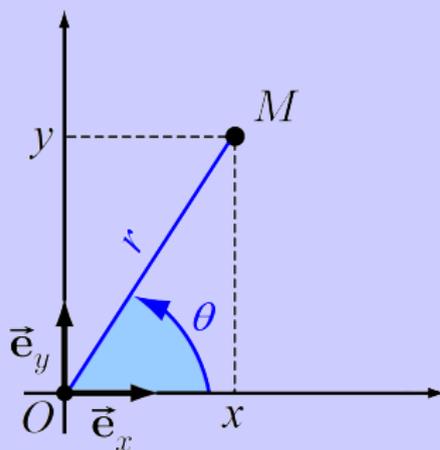
Les points  $m(x, y, 0)$  et  $P(0, 0, z)$  sont les projetés orthogonaux respectifs de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$  et l'axe  $(Oz)$ .

## Définition 1.1 (Coordonnées polaires)



**Définition 1.1 (Coordonnées polaires)**

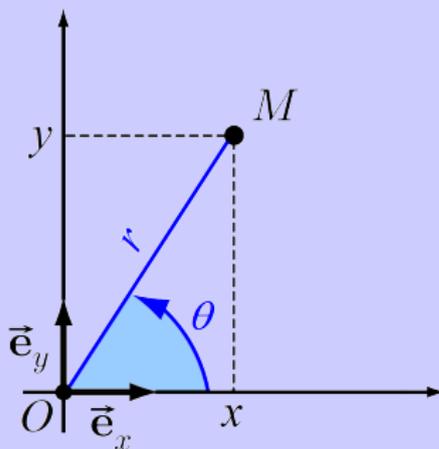
Un point  $M$  du plan peut être repéré par sa distance  $r \geq 0$  par rapport à l'origine  $O$  et son angle (lorsque  $M \neq O$ )  $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ .



**Définition 1.1 (Coordonnées polaires)**

Un point  $M$  du plan peut être repéré par sa distance  $r \geq 0$  par rapport à l'origine  $O$  et son angle (lorsque  $M \neq O$ )  $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Le couple  $(r, \theta)$  est constitué des **coordonnées polaires** du point  $M$ .

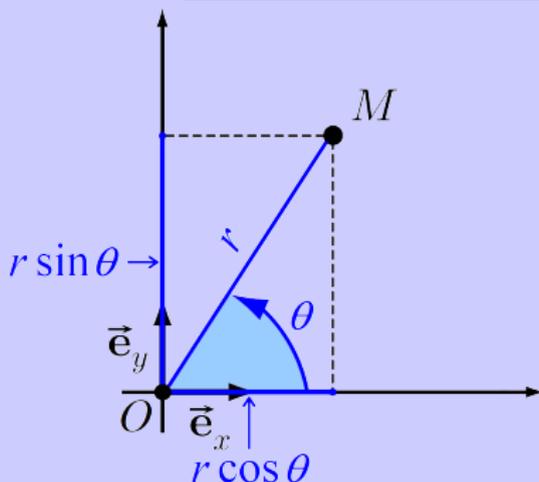


**Définition 1.1 (Coordonnées polaires)**

Un point  $M$  du plan peut être repéré par sa distance  $r \geq 0$  par rapport à l'origine  $O$  et son angle (lorsque  $M \neq O$ )  $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Le couple  $(r, \theta)$  est constitué des **coordonnées polaires** du point  $M$ .

Avec ces notations, on a la relation  $\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y$ .

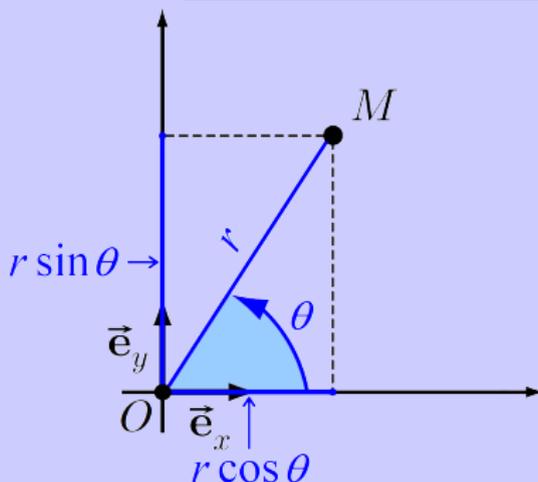


### Définition 1.1 (Coordonnées polaires)

Un point  $M$  du plan peut être repéré par sa distance  $r \geq 0$  par rapport à l'origine  $O$  et son angle (lorsque  $M \neq O$ )  $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Le couple  $(r, \theta)$  est constitué des **coordonnées polaires** du point  $M$ .

Avec ces notations, on a la relation  $\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y$ .



L'origine  $O$  et l'axe  $(O; \vec{e}_x)$  sont respectivement appelés **pôle** et **axe polaire**.  
Le point  $O$  n'a pas de **coordonnées polaires** uniques.

**Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)**

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

**Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)**

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

**Propriété 1.3 (Courbes coordonnées)**

Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

**Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)**

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

**Propriété 1.3 (Courbes coordonnées)**

Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cercle** de centre  $O$  ;

### Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

### Propriété 1.3 (Courbes coordonnées)

Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cercle** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne une **demi-droite** d'origine  $O$ .

### Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

### Propriété 1.3 (Courbes coordonnées)

Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cercle** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne une **demi-droite** d'origine  $O$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta)$  est le **cercle** de centre  $O$  et de rayon  $r_0$  ;

### Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

### Propriété 1.3 (Courbes coordonnées)

Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

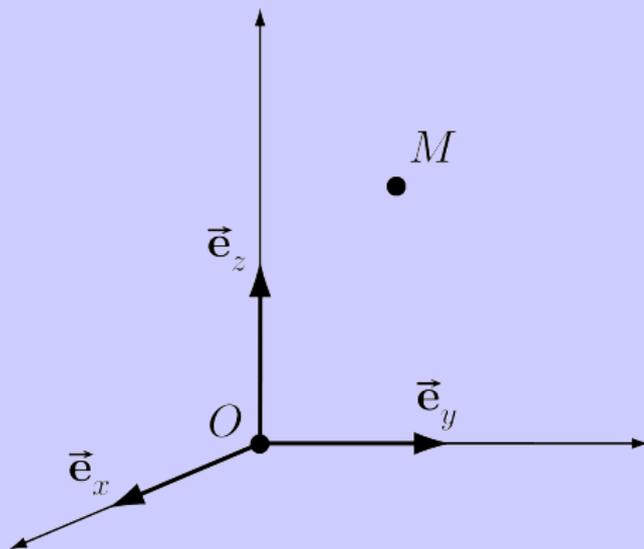
- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cercle** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne une **demi-droite** d'origine  $O$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta)$  est le **cercle** de centre  $O$  et de rayon  $r_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta_0)$  est la **demi-droite** d'origine  $O$  d'angle polaire  $\theta_0$ .

Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

### Définition 1.4 (Coordonnées cylindriques)

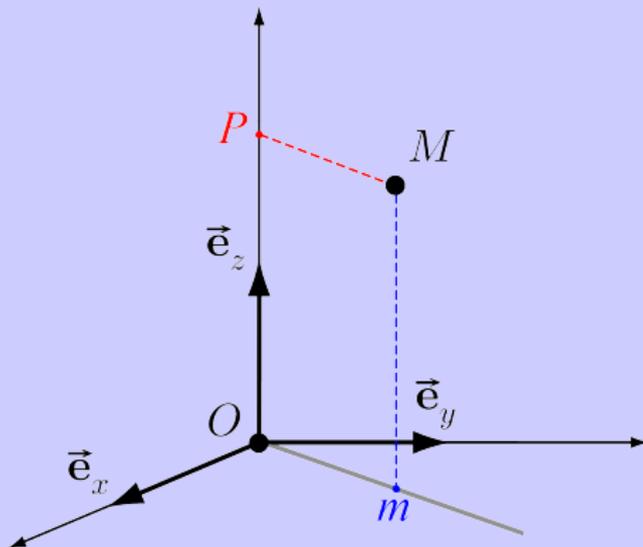


Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

### Définition 1.4 (Coordonnées cylindriques)

On projette le point  $M$  de l'espace sur le plan  $(Oxy)$  en  $m$  et sur l'axe  $(Oz)$  en  $P$  :

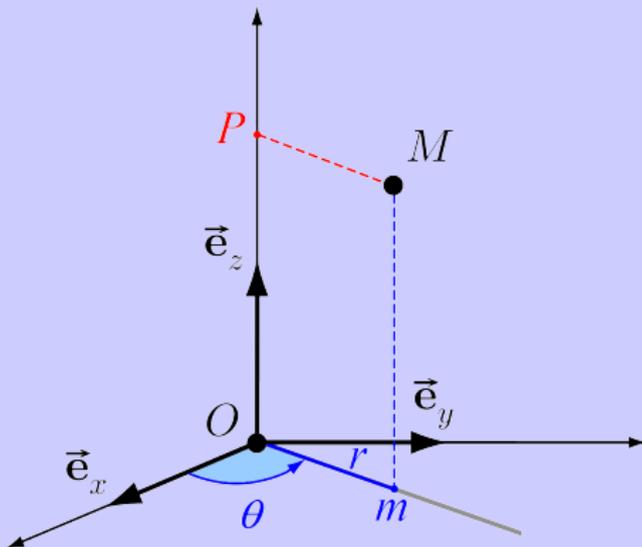
$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OP},$$



Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

### Définition 1.4 (Coordonnées cylindriques)

On projette le point  $M$  de l'espace sur le plan  $(Oxy)$  en  $m$  et sur l'axe  $(Oz)$  en  $P$  :  
 $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OP}$ , et l'on repère le projeté  $m$  par ses **coordonnées polaires** dans le plan :

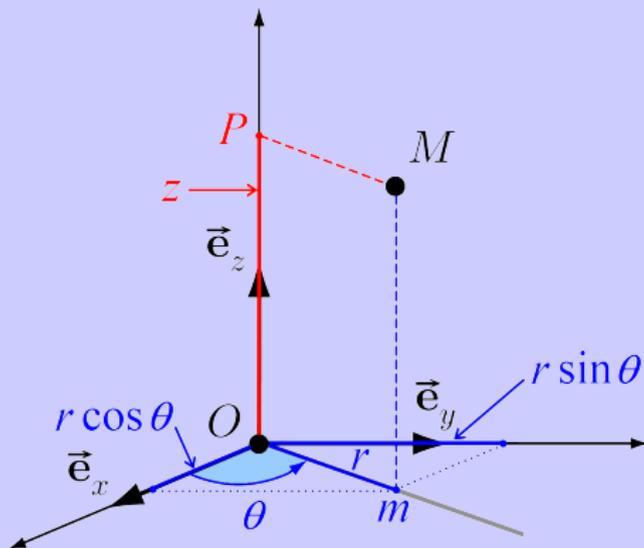


Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

### Définition 1.4 (Coordonnées cylindriques)

On projette le point  $M$  de l'espace sur le plan  $(Oxy)$  en  $m$  et sur l'axe  $(Oz)$  en  $P$  :  
 $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OP}$ , et l'on repère le projeté  $m$  par ses **coordonnées polaires** dans le plan :

$$\vec{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z \text{ avec } r \in [0, +\infty[, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$$



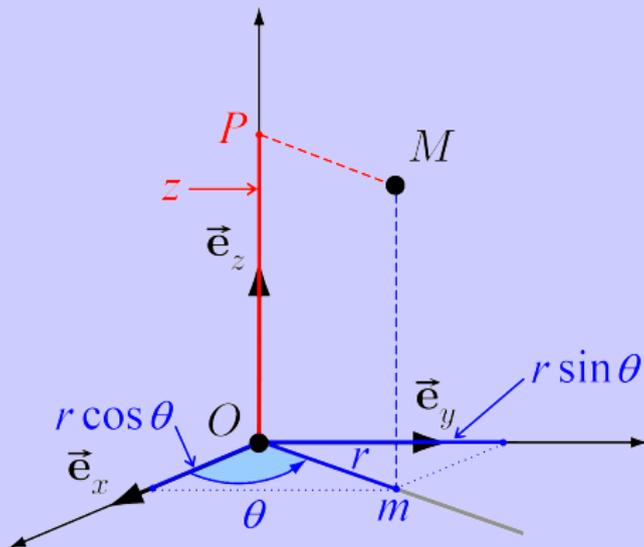
Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

### Définition 1.4 (Coordonnées cylindriques)

On projette le point  $M$  de l'espace sur le plan  $(Oxy)$  en  $m$  et sur l'axe  $(Oz)$  en  $P$  :  
 $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OP}$ , et l'on repère le projeté  $m$  par ses **coordonnées polaires** dans le plan :

$$\vec{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z \text{ avec } r \in [0, +\infty[, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$$

Le triplet  $(r, \theta, z)$  est constitué des **coordonnées cylindriques** du point  $M$ .



**Remarque 1.5**

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de **coordonnées cylindriques** uniques.

**Remarque 1.5**

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de **coordonnées cylindriques** uniques.
- Si  $m$  et  $P$  sont les projetés de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$  et la droite  $(Oz)$ , alors en **coordonnées cylindriques** :  $M(r, \theta, z)$ ,  $m(r, \theta, 0)$  et  $P(0, \theta, z)$ .

## Remarque 1.5

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de **coordonnées cylindriques** uniques.
- Si  $m$  et  $P$  sont les projetés de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$  et la droite  $(Oz)$ , alors en **coordonnées cylindriques** :  $M(r, \theta, z)$ ,  $m(r, \theta, 0)$  et  $P(0, \theta, z)$ .

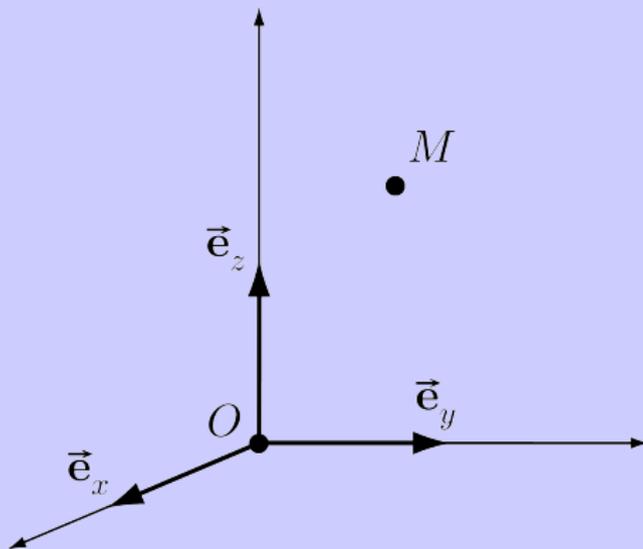
## Propriété 1.6 (Passage coordonnées cartésiennes/cylindriques)

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **cylindriques** et inversement :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r} \\ z = z \end{cases}$$

**Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)**

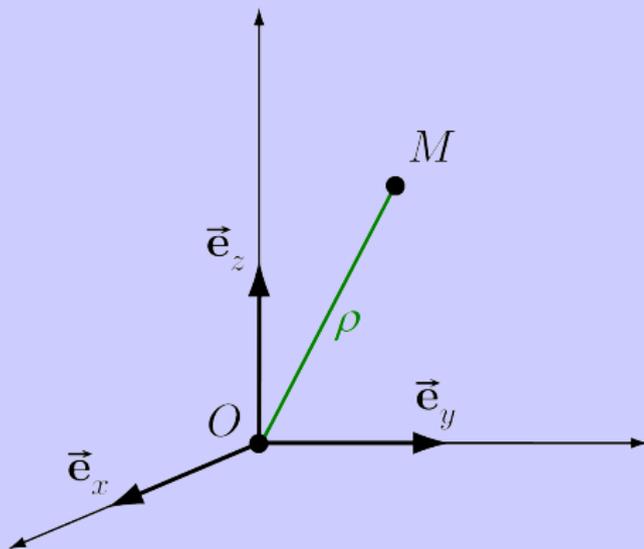
On repère un point  $M$  de l'espace par :



**Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)**

On repère un point  $M$  de l'espace par :

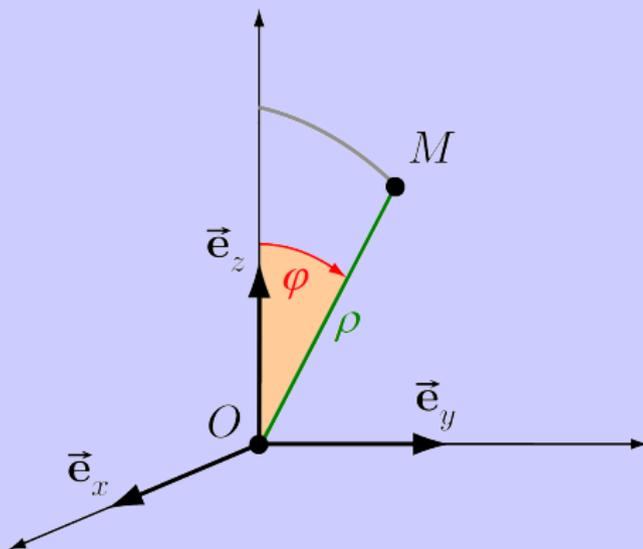
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| \quad \text{distance à l'origine} \end{array} \right.$$



**Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)**

On repère un point  $M$  de l'espace par :

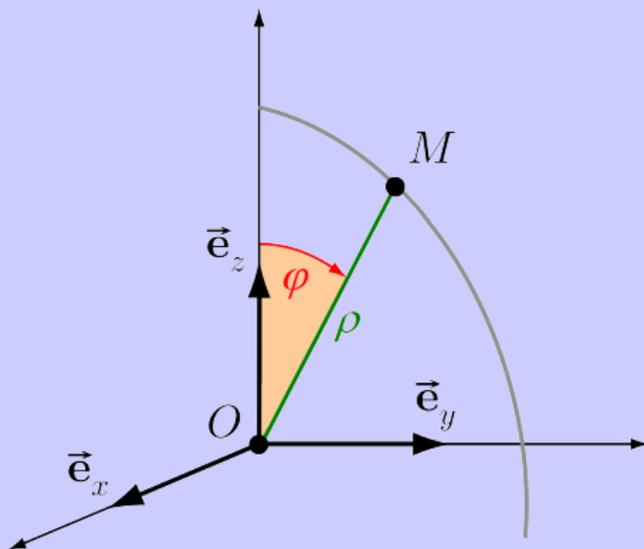
$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe (Oz))} \end{cases}$$



**Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)**

On repère un point  $M$  de l'espace par :

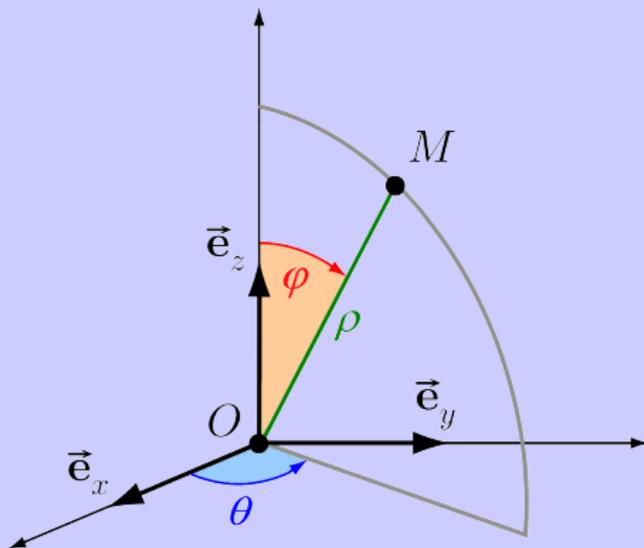
$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe } (Oz)) \end{cases}$$



**Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)**

On repère un point  $M$  de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe (Oz))} \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe (Ox))} \end{cases}$$

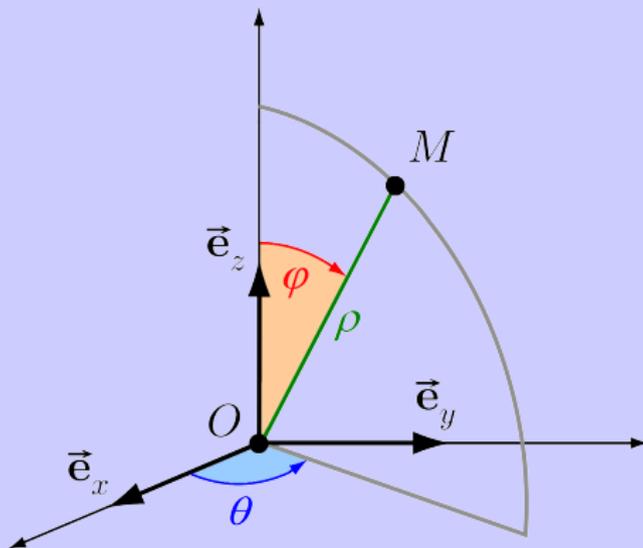


**Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)**

On repère un point  $M$  de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe (Oz))} \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe (Ox))} \end{cases}$$

Le triplet  $(\rho, \varphi, \theta)$  constitue les **coordonnées sphériques** du point  $M$ .



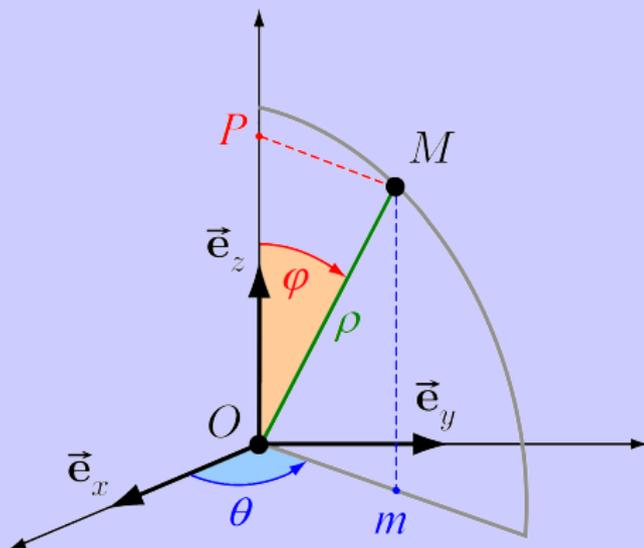
### Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)

On repère un point  $M$  de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe (Oz))} \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe (Ox))} \end{cases}$$

Le triplet  $(\rho, \varphi, \theta)$  constitue les **coordonnées sphériques** du point  $M$ .

En décomposant comme précédemment  $\overrightarrow{OM}$  selon  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$  :



### Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)

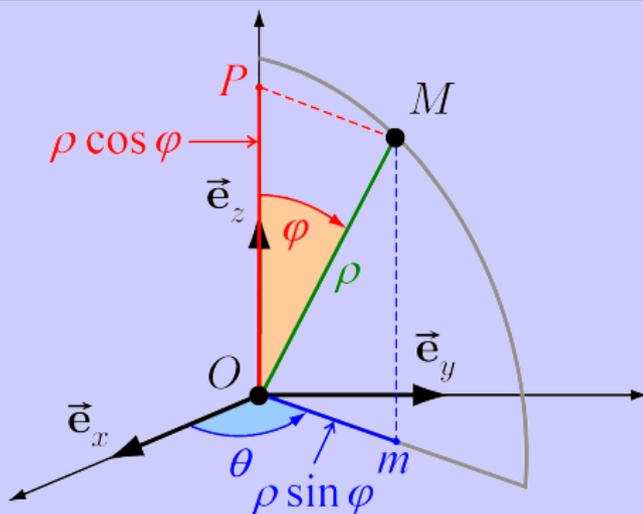
On repère un point  $M$  de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe (Oz))} \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe (Ox))} \end{cases}$$

Le triplet  $(\rho, \varphi, \theta)$  constitue les **coordonnées sphériques** du point  $M$ .

En décomposant comme précédemment  $\overrightarrow{OM}$  selon  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$  :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \sin(\varphi) (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z$$



### Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)

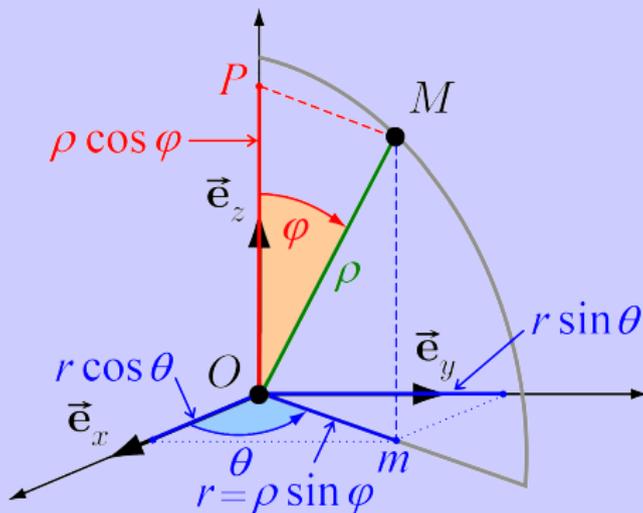
On repère un point  $M$  de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe (Oz))} \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe (Ox))} \end{cases}$$

Le triplet  $(\rho, \varphi, \theta)$  constitue les **coordonnées sphériques** du point  $M$ .

En décomposant comme précédemment  $\overrightarrow{OM}$  selon  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$  :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z \text{ avec } \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi[$$



**Remarque 1.8**

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de **coordonnées sphériques** uniques.

## Remarque 1.8

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de **coordonnées sphériques** uniques.
- Il existe plusieurs conventions pour les notations de **coordonnées sphériques** et **cylindriques**. Le choix adopté ici est tel que  $\theta$  joue le même rôle dans les systèmes de **coordonnées cylindriques** et **coordonnées sphériques**.

*Mais ce n'est pas toujours le cas !  
Bien faire attention aux conventions choisies...*

## Remarque 1.8

- Les points de  $(Oz)$  n'ont pas de **coordonnées sphériques** uniques.
- Il existe plusieurs conventions pour les notations de **coordonnées sphériques** et **cylindriques**. Le choix adopté ici est tel que  $\theta$  joue le même rôle dans les systèmes de **coordonnées cylindriques** et **coordonnées sphériques**.

*Mais ce n'est pas toujours le cas !  
Bien faire attention aux conventions choisies...*

## Propriété 1.9 (Passage coordonnées cartésiennes/sphériques)

Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **sphériques** et inversement :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos(\varphi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{array} \right.$$

**Définition 1.10 (Courbes et surfaces coordonnées)**

- Lorsqu'**une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point  $M$  décrit une **surface coordonnée**.

**Définition 1.10 (Courbes et surfaces coordonnées)**

- Lorsque **une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point  $M$  décrit une **surface coordonnée**.
- Lorsque **deux** des trois coordonnées sont fixées et que la troisième varie, le point  $M$  décrit une **courbe coordonnée**.  
Ainsi, une courbe coordonnée est l'intersection de deux surfaces coordonnées.

### Définition 1.10 (Courbes et surfaces coordonnées)

- Lorsqu'**une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point  $M$  décrit une **surface coordonnée**.
- Lorsque **deux** des trois coordonnées sont fixées et que la troisième varie, le point  $M$  décrit une **courbe coordonnée**.  
Ainsi, une courbe coordonnée est l'intersection de deux surfaces coordonnées.

### Courbes coordonnées en cartésiennes

Les **courbes coordonnées** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées : les équations  $(x = cte, y = cte)$  ou  $(x = cte, z = cte)$  ou  $(y = cte, z = cte)$  donnent les **axes** de coordonnées.

### Définition 1.10 (Courbes et surfaces coordonnées)

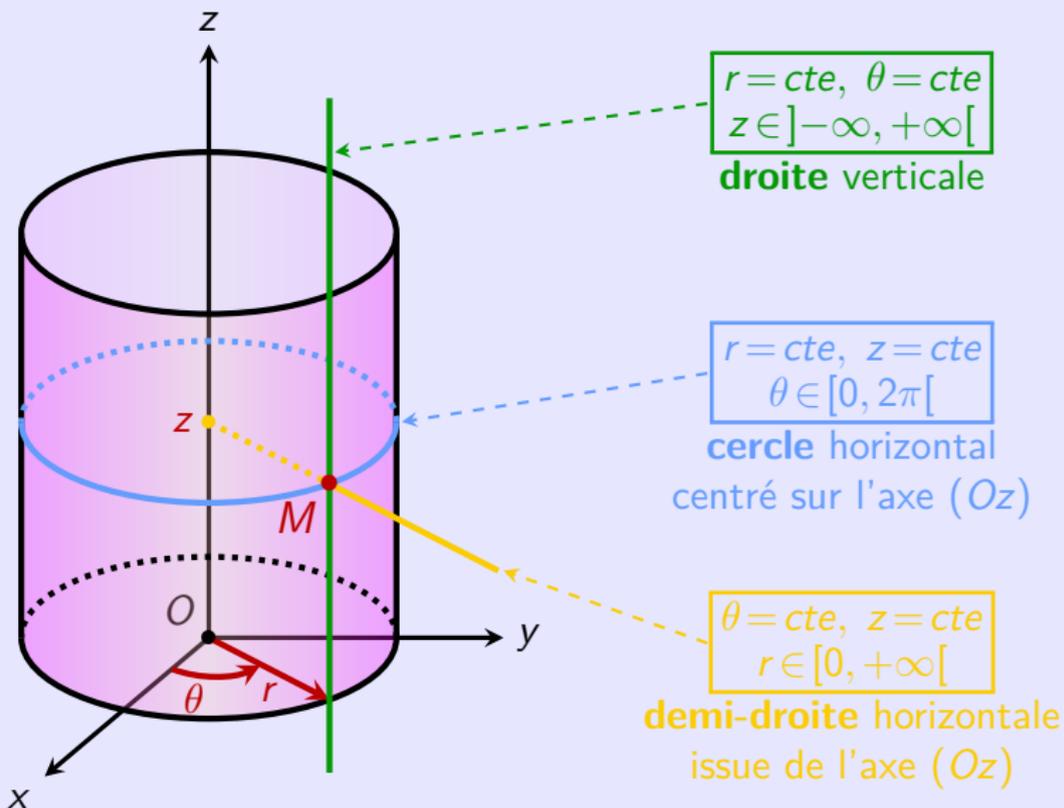
- Lorsqu'**une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point  $M$  décrit une **surface coordonnée**.
- Lorsque **deux** des trois coordonnées sont fixées et que la troisième varie, le point  $M$  décrit une **courbe coordonnée**.  
Ainsi, une courbe coordonnée est l'intersection de deux surfaces coordonnées.

### Courbes coordonnées en cartésiennes

Les **courbes coordonnées** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées : les équations  $(x = cte, y = cte)$  ou  $(x = cte, z = cte)$  ou  $(y = cte, z = cte)$  donnent les **axes** de coordonnées.

Les **surfaces coordonnées** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées : les équations  $x = cte$  ou  $y = cte$  ou  $z = cte$  donnent les **plans** de coordonnées.

## Courbes coordonnées en cylindriques



**Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)**

Les ***courbes coordonnées en coordonnées cylindriques*** sont obtenues en fixant ***deux*** des coordonnées :

**Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)**

Les ***courbes coordonnées en coordonnées cylindriques*** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $r = cte, \theta = cte$  donnent une ***droite*** parallèle à l'axe ( $Oz$ ) ;

**Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)**

Les ***courbes coordonnées en coordonnées cylindriques*** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $r = \text{cte}, \theta = \text{cte}$  donnent une ***droite*** parallèle à l'axe ( $Oz$ ) ;
- les équations  $r = \text{cte}, z = \text{cte}$  donnent un ***cercle*** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ;

**Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)**

Les ***courbes coordonnées en coordonnées cylindriques*** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $r = cte, \theta = cte$  donnent une ***droite*** parallèle à l'axe ( $Oz$ ) ;
- les équations  $r = cte, z = cte$  donnent un ***cercle*** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ;
- les équations  $\theta = cte, z = cte$  donnent une ***demi-droite*** issue de l'axe ( $Oz$ ) parallèle au plan ( $Oxy$ ).

**Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)**

Les **courbes coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $r = cte, \theta = cte$  donnent une **droite** parallèle à l'axe  $(Oz)$  ;
- les équations  $r = cte, z = cte$  donnent un **cercle** centré sur l'axe  $(Oz)$  ;
- les équations  $\theta = cte, z = cte$  donnent une **demi-droite** issue de l'axe  $(Oz)$  parallèle au plan  $(Oxy)$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta_0, z)$  est la **droite** parallèle à l'axe  $(Oz)$  passant par le point de coordonnées cylindriques  $(r_0, \theta_0, 0)$  ;

### Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)

Les **courbes coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $r = cte, \theta = cte$  donnent une **droite** parallèle à l'axe  $(Oz)$  ;
- les équations  $r = cte, z = cte$  donnent un **cercle** centré sur l'axe  $(Oz)$  ;
- les équations  $\theta = cte, z = cte$  donnent une **demi-droite** issue de l'axe  $(Oz)$  parallèle au plan  $(Oxy)$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta_0, z)$  est la **droite** parallèle à l'axe  $(Oz)$  passant par le point de coordonnées cylindriques  $(r_0, \theta_0, 0)$  ;
- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta, z_0)$  est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, z_0)$  et de rayon  $r_0$  parallèle au plan  $(Oxy)$  ;

### Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)

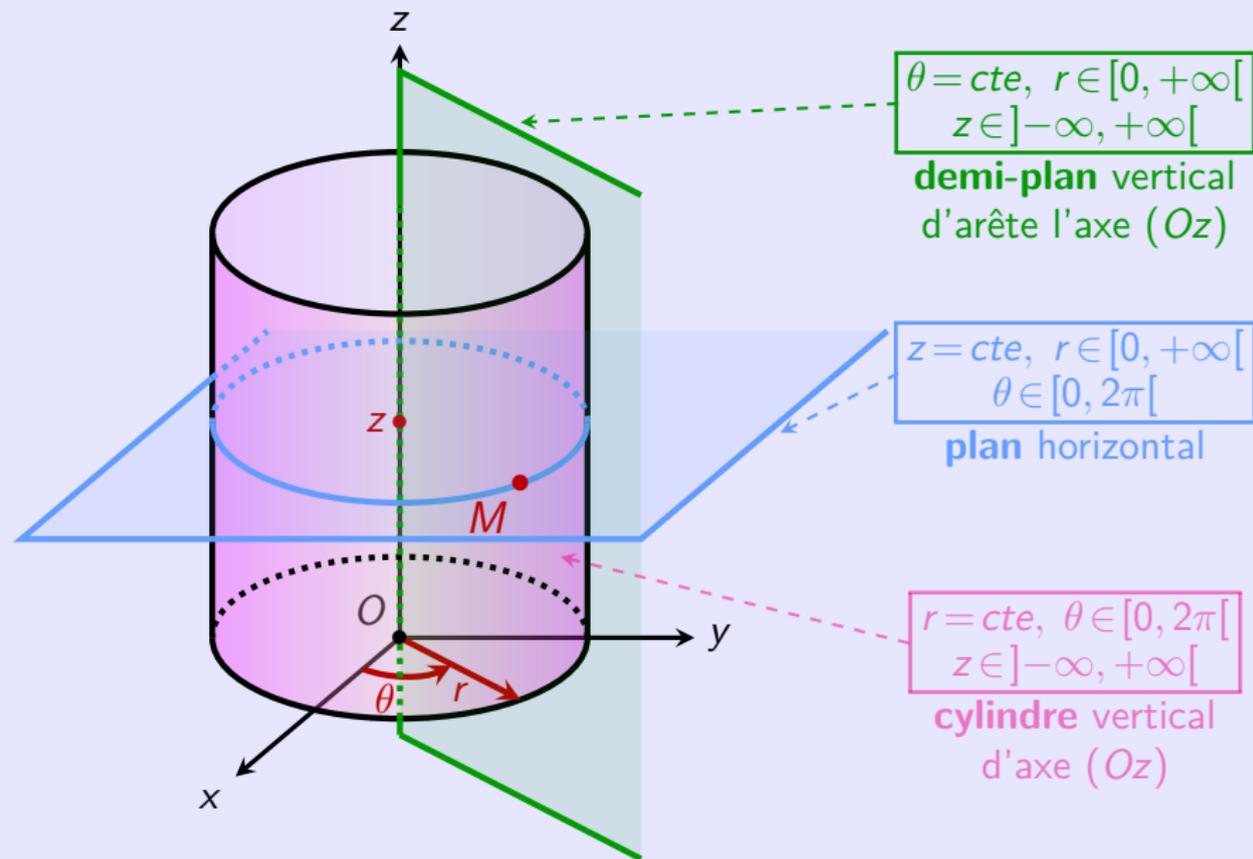
Les **courbes coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $r = \text{cte}, \theta = \text{cte}$  donnent une **droite** parallèle à l'axe  $(Oz)$  ;
- les équations  $r = \text{cte}, z = \text{cte}$  donnent un **cercle** centré sur l'axe  $(Oz)$  ;
- les équations  $\theta = \text{cte}, z = \text{cte}$  donnent une **demi-droite** issue de l'axe  $(Oz)$  parallèle au plan  $(Oxy)$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta_0, z)$  est la **droite** parallèle à l'axe  $(Oz)$  passant par le point de coordonnées cylindriques  $(r_0, \theta_0, 0)$  ;
- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta, z_0)$  est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, z_0)$  et de rayon  $r_0$  parallèle au plan  $(Oxy)$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta_0, z_0)$  est la **demi-droite** issue du point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, z_0)$  parallèle au plan  $(Oxy)$ .

## Surfaces coordonnées en cylindriques



### Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

Les *surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques* sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

### Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

Les **surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = cte$  donne un **cylindre** d'axe ( $Oz$ ) ;

### Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

Les **surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cylindre** d'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** contenant l'axe  $(Oz)$  ;

### Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

Les **surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cylindre** d'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** contenant l'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $z = \text{cte}$  donne un **plan** parallèle au plan  $(Oxy)$ .

### Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

Les **surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cylindre** d'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** contenant l'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $z = \text{cte}$  donne un **plan** parallèle au plan  $(Oxy)$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta, z)$  est le **cylindre** d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r_0$  ;

### Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

Les **surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cylindre** d'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** contenant l'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $z = \text{cte}$  donne un **plan** parallèle au plan  $(Oxy)$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta, z)$  est le **cylindre** d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta_0, z)$  est le **demi-plan** d'arête  $(Oz)$  d'angle polaire  $\theta_0$  ;

### Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

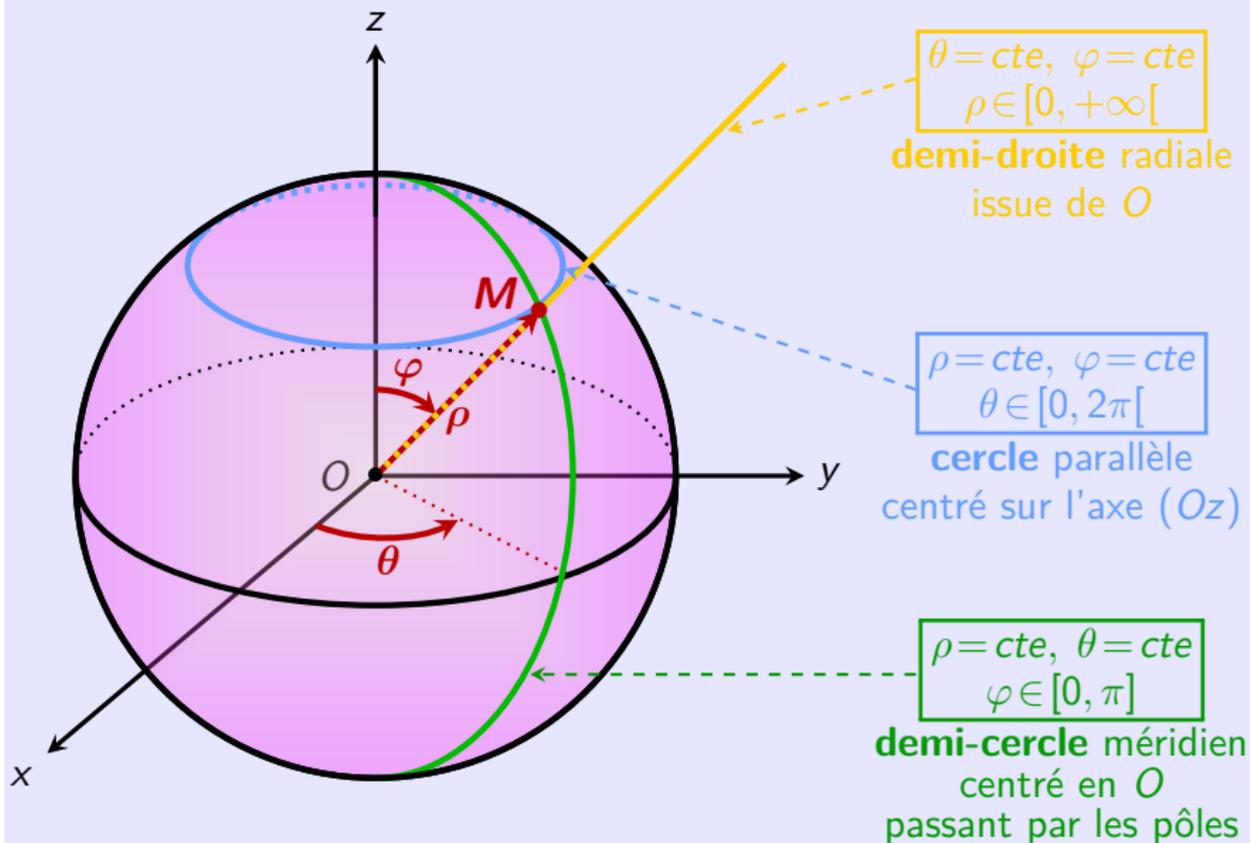
Les **surfaces coordonnées en coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $r = \text{cte}$  donne un **cylindre** d'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** contenant l'axe  $(Oz)$  ;
- l'équation  $z = \text{cte}$  donne un **plan** parallèle au plan  $(Oxy)$ .

Plus précisément, pour  $r_0 > 0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  et  $z_0 \in \mathbb{R}$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(r_0, \theta, z)$  est le **cylindre** d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta_0, z)$  est le **demi-plan** d'arête  $(Oz)$  d'angle polaire  $\theta_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(r, \theta, z_0)$  est le **plan** d'équation  $z = z_0$ .

## Courbes coordonnées en sphériques



**Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)**

Les ***courbes coordonnées en coordonnées sphériques*** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

**Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)**

Les ***courbes coordonnées en coordonnées sphériques*** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent un **cercle** centré sur l'axe (Oz) ( $\rightarrow$  « **parallèle** »);

**Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)**

Les ***courbes coordonnées en coordonnées sphériques*** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent un **cercle** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ( $\rightarrow$  « **parallèle** »);
- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\theta = \text{cte}$  donnent un **demi-cercle** de centre  $O$  passant par les pôles (points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ )  $\rightarrow$  « **méridien** »;

### Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

Les **courbes coordonnées en coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent un **cercle** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ( $\rightarrow$  « **parallèle** »);
- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\theta = \text{cte}$  donnent un **demi-cercle** de centre  $O$  passant par les pôles (points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ )  $\rightarrow$  « **méridien** »;
- les équations  $\theta = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent une **demi-droite** issue de l'origine  $O$ .

### Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

Les **courbes coordonnées en coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent un **cercle** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ( $\rightarrow$  « **parallèle** »);
- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\theta = \text{cte}$  donnent un **demi-cercle** de centre  $O$  passant par les pôles (points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ )  $\rightarrow$  « **méridien** »;
- les équations  $\theta = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent une **demi-droite** issue de l'origine  $O$ .

Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi_0, \theta)$  est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, \rho_0 \cos \varphi_0)$  et de rayon  $\rho_0 \sin \varphi_0$  parallèle au plan ( $Oxy$ );

### Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

Les **courbes coordonnées en coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent un **cercle** centré sur l'axe ( $Oz$ ) ( $\rightarrow$  « **parallèle** »);
- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\theta = \text{cte}$  donnent un **demi-cercle** de centre  $O$  passant par les pôles (points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ )  $\rightarrow$  « **méridien** »);
- les équations  $\theta = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent une **demi-droite** issue de l'origine  $O$ .

Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi_0, \theta)$  est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, \rho_0 \cos \varphi_0)$  et de rayon  $\rho_0 \sin \varphi_0$  parallèle au plan ( $Oxy$ ) ;
- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi, \theta_0)$  est le **demi-cercle** dont un diamètre est le segment constitué des deux pôles et passant par le point de coordonnées cylindriques  $(\rho_0, \theta_0, 0)$ ;

### Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

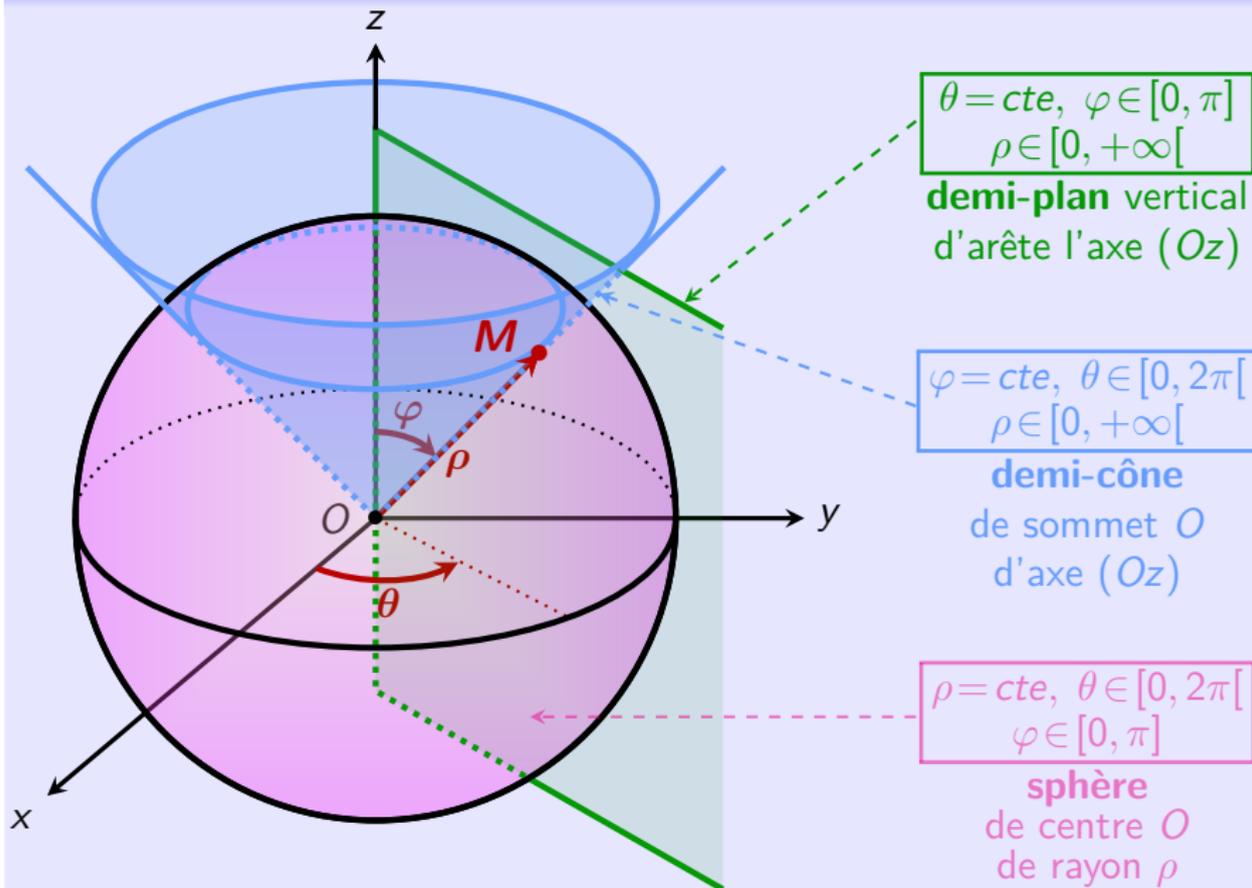
Les **courbes coordonnées en coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :

- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent un **cercle** centré sur l'axe  $(Oz)$  ( $\rightarrow$  « **parallèle** »);
- les équations  $\rho = \text{cte}$ ,  $\theta = \text{cte}$  donnent un **demi-cercle** de centre  $O$  passant par les pôles (points de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$   $\rightarrow$  « **méridien** »);
- les équations  $\theta = \text{cte}$ ,  $\varphi = \text{cte}$  donnent une **demi-droite** issue de l'origine  $O$ .

Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi_0, \theta)$  est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, \rho_0 \cos \varphi_0)$  et de rayon  $\rho_0 \sin \varphi_0$  parallèle au plan  $(Oxy)$ ;
- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi, \theta_0)$  est le **demi-cercle** dont un diamètre est le segment constitué des deux pôles et passant par le point de coordonnées cylindriques  $(\rho_0, \theta_0, 0)$ ;
- l'ensemble des points  $M(\rho, \varphi_0, \theta_0)$  est la **demi-droite** issue de  $O$  et passant par le point de coordonnées sphériques  $(1, \varphi_0, \theta_0)$ .

## Surfaces coordonnées en sphériques



### Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

**Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)**

Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $\rho = \text{cte}$  donne une **sphère** de centre  $O$  ;

### Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $\rho = \text{cte}$  donne une **sphère** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\varphi = \text{cte}$  donne un **demi-cône** de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ .

### Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $\rho = \text{cte}$  donne une **sphère** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\varphi = \text{cte}$  donne un **demi-cône** de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ .
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** d'arête  $(Oz)$  ;

### Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $\rho = \text{cte}$  donne une **sphère** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\varphi = \text{cte}$  donne un **demi-cône** de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ .
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** d'arête  $(Oz)$  ;

Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi, \theta)$  est la **sphère** de centre  $O$  et de rayon  $\rho_0$  ;

### Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $\rho = \text{cte}$  donne une **sphère** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\varphi = \text{cte}$  donne un **demi-cône** de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ .
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** d'arête  $(Oz)$  ;

Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi, \theta)$  est la **sphère** de centre  $O$  et de rayon  $\rho_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(\rho, \varphi_0, \theta)$  est le **demi-cône** de centre  $O$ , d'axe  $(Oz)$  et de demi-angle au sommet  $\varphi_0$  ;

### Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :

- l'équation  $\rho = \text{cte}$  donne une **sphère** de centre  $O$  ;
- l'équation  $\varphi = \text{cte}$  donne un **demi-cône** de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ .
- l'équation  $\theta = \text{cte}$  donne un **demi-plan** d'arête  $(Oz)$  ;

Plus précisément, pour  $\rho_0 > 0$ ,  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  et  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  fixes :

- l'ensemble des points  $M(\rho_0, \varphi, \theta)$  est la **sphère** de centre  $O$  et de rayon  $\rho_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(\rho, \varphi_0, \theta)$  est le **demi-cône** de centre  $O$ , d'axe  $(Oz)$  et de demi-angle au sommet  $\varphi_0$  ;
- l'ensemble des points  $M(\rho, \varphi, \theta_0)$  est le **demi-plan** d'arête  $(Oz)$  d'angle azimutal  $\theta_0$ .

## Résumé : courbes et surfaces coordonnées dans les différents systèmes

### Surfaces coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les surfaces coordonnées sont des **plans**.
- En coordonnées **cylindriques**, les surfaces coordonnées sont soit des **cylindres** soit **des demi-plans** soit des **plans**.
- En coordonnées **sphériques**, les surfaces coordonnées sont soit des **sphères**, soit des **demi-cônes**, soit des **demi-plans**.

## Résumé : courbes et surfaces coordonnées dans les différents systèmes

### Surfaces coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les surfaces coordonnées sont des **plans**.
- En coordonnées **cylindriques**, les surfaces coordonnées sont soit des **cylindres** soit des **demi-plans** soit des **plans**.
- En coordonnées **sphériques**, les surfaces coordonnées sont soit des **sphères**, soit des **demi-cônes**, soit des **demi-plans**.

### Courbes coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les courbes coordonnées sont des **droites**.
- En coordonnées **cylindriques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **droites**, soit des **cercles**.
- En coordonnées **sphériques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **demi-cercles**, soit des **cercles**.

## Résumé : courbes et surfaces coordonnées dans les différents systèmes

### Surfaces coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les surfaces coordonnées sont des **plans**.
- En coordonnées **cylindriques**, les surfaces coordonnées sont soit des **cylindres** soit des **demi-plans** soit des **plans**.
- En coordonnées **sphériques**, les surfaces coordonnées sont soit des **sphères**, soit des **demi-cônes**, soit des **demi-plans**.

### Courbes coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les courbes coordonnées sont des **droites**.
- En coordonnées **cylindriques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **droites**, soit des **cercles**.
- En coordonnées **sphériques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **demi-cercles**, soit des **cercles**.

### Remarque 1.15

Il est inutile de retenir tous ces résultats, il est préférable de savoir les retrouver à l'aide de graphiques.

## Repère local

Dans un système de coordonnées, le **repère local** est constitué du point  $M$  comme origine et des vecteurs **tangents normés** aux courbes coordonnées, **orientés** dans le sens croissant de la variable.

## Repère local

Dans un système de coordonnées, le **repère local** est constitué du point  $M$  comme origine et des vecteurs **tangents normés** aux courbes coordonnées, **orientés** dans le sens croissant de la variable.

Nous allons décrire les différents **repères locaux** obtenus dans les systèmes de coordonnées **cartésiennes**, **polaires**, **cylindriques** et **sphériques** en les construisant du point de vue **différentiel**.

Nous allons aussi définir les **déplacements élémentaires** dans chaque **repère local**.

**Principe** : lorsque les coordonnées subissent de petites variations :

(**déplacement élémentaire** d'un point  $M$ )  $\approx$  ( $d\overrightarrow{OM}$  **différentielle** du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ ).

## 1 Systèmes de coordonnées

### 2 Repères locaux

- Cartésiens : déplacement élémentaire
- Polaires : obtention des vecteurs
- Polaires : dérivées des vecteurs
- Polaires : déplacement élémentaire
- Cylindriques : obtention des vecteurs
- Cylindriques : dérivées des vecteurs
- Cylindriques : déplacement élémentaire
- Sphériques : obtention des vecteurs
- Sphériques : dérivées des vecteurs
- Sphériques : déplacement élémentaire

**Méthode théorique**

**Formule différentielle :**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz.$

**Méthode théorique**

**Formule différentielle :**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz.$

Or  $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont fixes donc leurs dérivées en  $x, y, z$  sont nulles.

**Méthode théorique**

**Formule différentielle :**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz.$

Or  $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont fixes donc leurs dérivées en  $x, y, z$  sont nulles.

Donc  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} =$

**Méthode théorique**

**Formule différentielle :**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz.$

Or  $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont fixes donc leurs dérivées en  $x, y, z$  sont nulles.

Donc  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = (1\vec{e}_x + x\vec{0}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{e}_x.$

**Méthode théorique**

**Formule différentielle :**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz.$

Or  $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont fixes donc leurs dérivées en  $x, y, z$  sont nulles.

Donc  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = (1\vec{e}_x + x\vec{0}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{e}_x.$

De même,  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y$  et  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z.$

Dans la base cartésienne :  $d\vec{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$

## Méthode théorique

**Formule différentielle :**  $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz.$

Or  $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$

Les vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont fixes donc leurs dérivées en  $x, y, z$  sont nulles.

Donc  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = (1\vec{e}_x + x\vec{0}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{e}_x.$

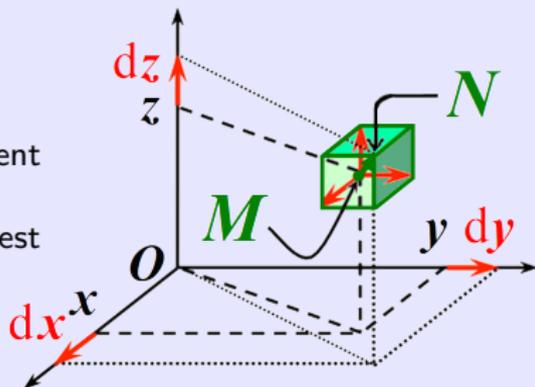
De même,  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y$  et  $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z.$

Dans la base cartésienne :  $d\vec{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$

## Méthode intuitive :

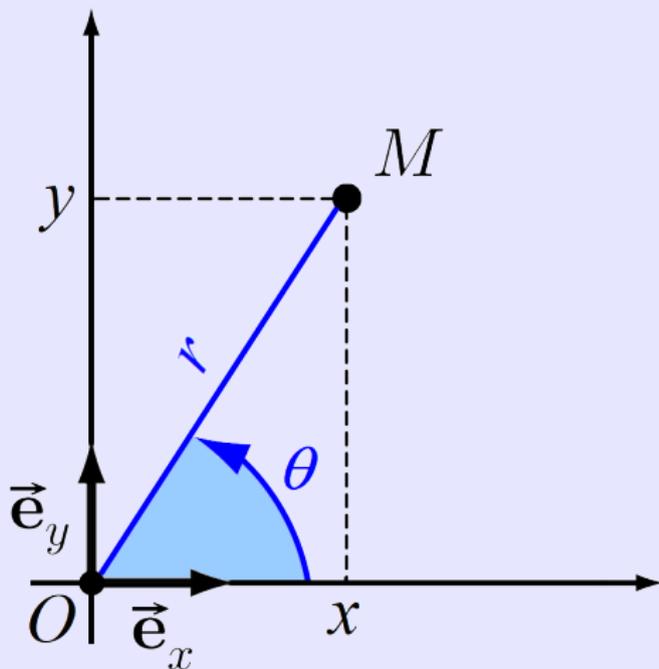
Le point  $N(x + dx, y + dy, z + dz)$  est infiniment proche de  $M(x, y, z).$

Le vecteur variation de position élémentaire est  $\vec{MN} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$  assimilé à  $d\vec{OM}.$



On cherche le **repère local**  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  où  $M$  est le point du plan défini par

$$\vec{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent**

à la courbe coordonnée  $\theta = \text{cste}$  :  $\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent**

$$\text{à la courbe coordonnée } \theta = \text{cste} : \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent**

$$\text{à la courbe coordonnée } \theta = \text{cste} : \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$$

qui est de norme 1 donc :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent**

$$\text{à la courbe coordonnée } \theta = \text{cste} : \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$$

qui est de norme 1 donc :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la

$$\text{courbe coordonnée } r = \text{cste} : \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|}$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent**

$$\text{à la courbe coordonnée } \theta = \text{cste} : \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$$

qui est de norme 1 donc :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la

$$\text{courbe coordonnée } r = \text{cste} : \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \vec{e}_x + r \cos(\theta) \vec{e}_y$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent**

$$\text{à la courbe coordonnée } \theta = \text{cste} : \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$$

qui est de norme 1 donc :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

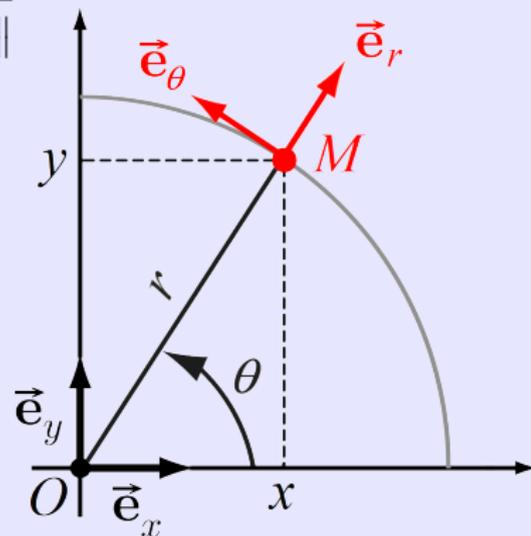
- Vecteur **unitaire tangent** à la

$$\text{courbe coordonnée } r = \text{cste} : \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \vec{e}_x + r \cos(\theta) \vec{e}_y$$

qui est de norme  $r$  donc :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent**

$$\text{à la courbe coordonnée } \theta = \text{cste} : \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$$

qui est de norme 1 donc :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

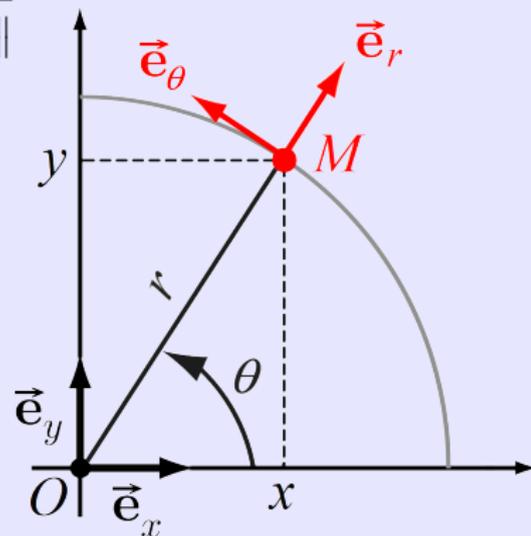
- Vecteur **unitaire tangent** à la

$$\text{courbe coordonnée } r = \text{cste} : \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \vec{e}_x + r \cos(\theta) \vec{e}_y$$

qui est de norme  $r$  donc :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$



On remarque que

$$\boxed{\vec{OM} = r \vec{e}_r} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta \text{ sont orthogonaux}}$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  mais pas de  $r$ , donc :

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  mais pas de  $r$ , donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y)$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  mais pas de  $r$ , donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta}$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  mais pas de  $r$ , donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y)$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  mais pas de  $r$ , donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y) = -\cos(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} - \sin(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = -\vec{e}_r$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  mais pas de  $r$ , donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta}$$

- $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y) = -\cos(\theta) \vec{e}_x + \vec{0} - \sin(\theta) \vec{e}_y + \vec{0} = -\vec{e}_r$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\implies$  Une dérivation par rapport à  $\theta$  correspond à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  du vecteur.

- *1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle*

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

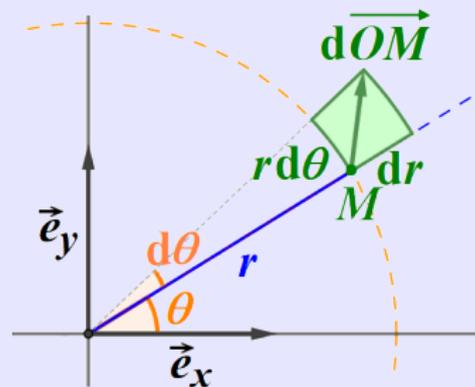
$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

donc :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$



- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

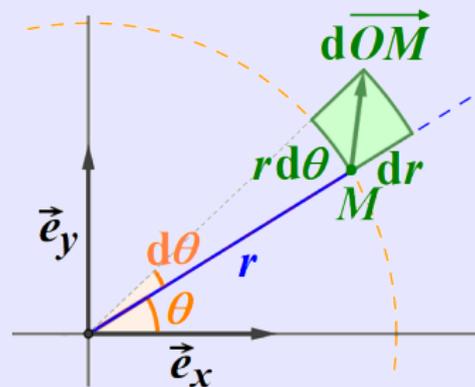
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

donc :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

- **2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  on trouve (différentielle produit) :



- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

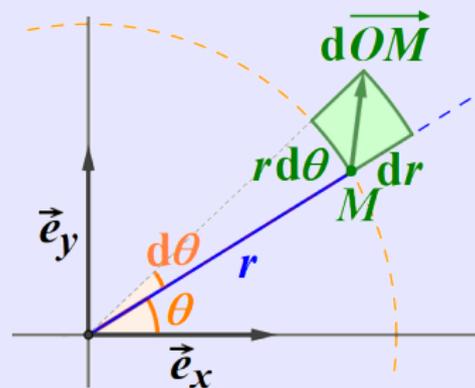
donc :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  on trouve (différentielle produit) :

$$d\vec{OM} = (dr)\vec{e}_r + r(d\vec{e}_r)$$



- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

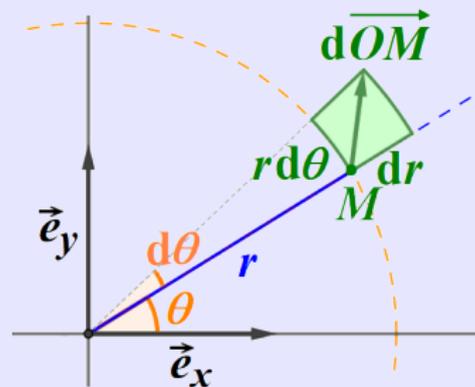
$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

donc :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$



- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  on trouve (différentielle produit) :

$$d\vec{OM} = (dr)\vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) = dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta} d\theta \right)$$

- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

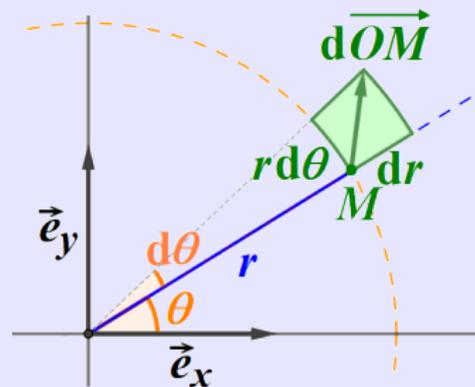
$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

donc :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$



- **2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  on trouve (différentielle produit) :

$$d\vec{OM} = (dr)\vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) = dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta} d\theta \right) = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

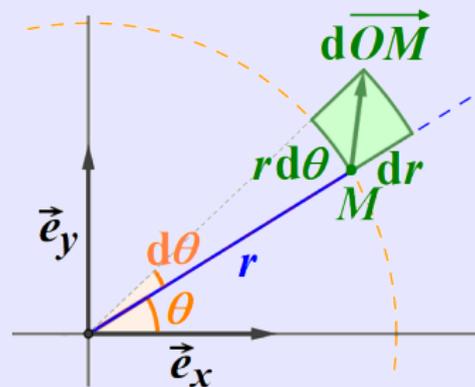
$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

donc :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$



- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  on trouve (différentielle produit) :

$$d\vec{OM} = (dr)\vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) = dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta} d\theta \right) = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

**Remarque** : le « rectangle curviligne élémentaire » a pour aire  $r dr d\theta$ .

Cet « élément de surface élémentaire » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées polaires dans les intégrales doubles (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.

Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

### Propriété 2.1 (Repère local polaire)

En *coordonnées polaires*, le **repère local** (orthonormé direct) est  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  où

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \end{cases}$$

Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases *cartésienne* et *polaire*, par

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y = r \vec{e}_r$$

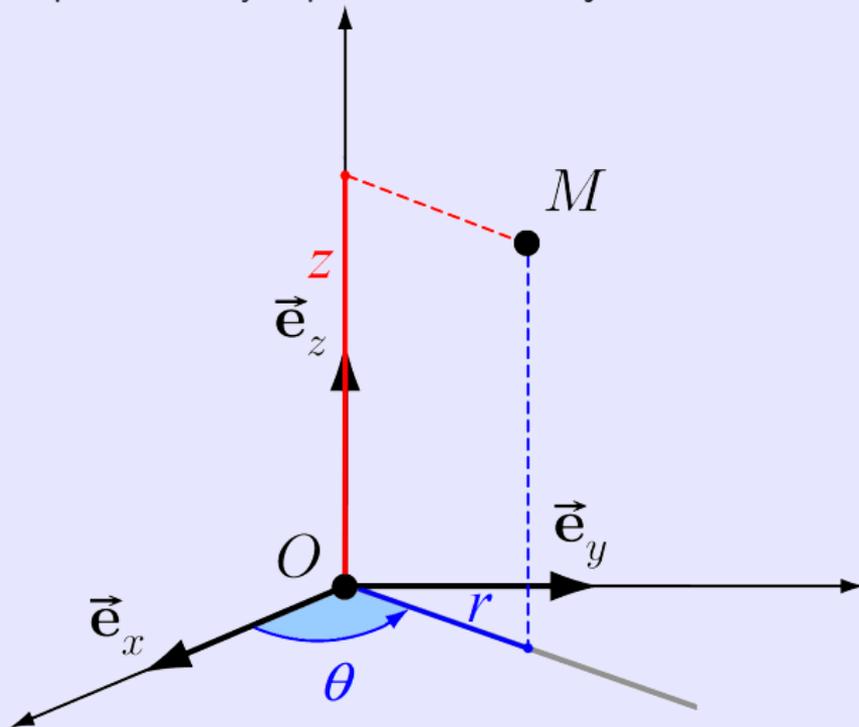
et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base *polaire*, par :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta}$$

On cherche le **repère local**  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  où  $M$  est le point de l'espace défini par

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Par rapport aux polaires, il n'y a que l'altitude  $z$  à rajouter.



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|} \quad \text{où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $r = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $r = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|} \quad \text{où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $r = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|} \quad \text{où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $r = \text{cste}$ ) :

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $r = \text{cste}$ ,  $z = \text{cste}$ ) :

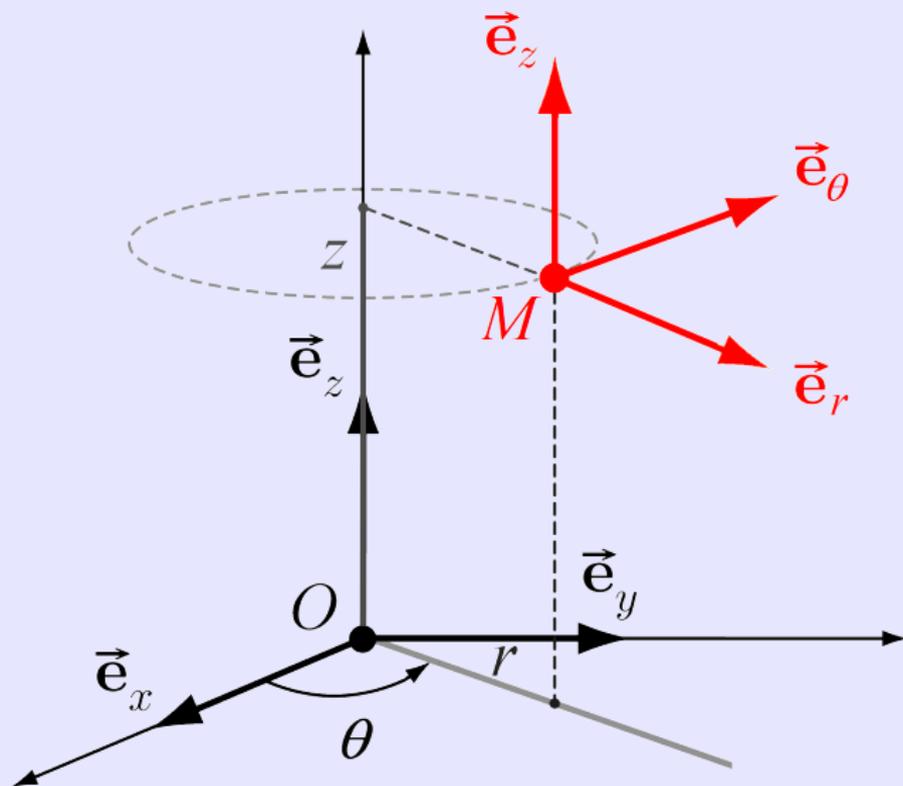
$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ( $\theta = \text{cste}$ ,  $r = \text{cste}$ ) :

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial z}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z \text{ qui est de norme 1, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_z = \vec{e}_z}$$



On remarque que

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

et

$$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \text{ sont orthogonaux et } \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  (mais ni de  $r$ , ni de  $z$ )

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = \vec{0} \end{array}$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  (mais ni de  $r$ , ni de  $z$ )

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = \vec{0} \end{array}$$

- $\vec{e}_z$  est constant

$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  (mais ni de  $r$ , ni de  $z$ )

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = \vec{0} \end{array}$$

- $\vec{e}_z$  est constant

$$\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}$$

- On remarque que

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$$

- $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de  $\theta$  (mais ni de  $r$ , ni de  $z$ )

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = \vec{0} \end{array}}$$

- $\vec{e}_z$  est constant

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}}$$

- On remarque que

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\implies$  Une dérivation par rapport à  $\theta$  correspond à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  du vecteur.

- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz$$

- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta, z$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz$$

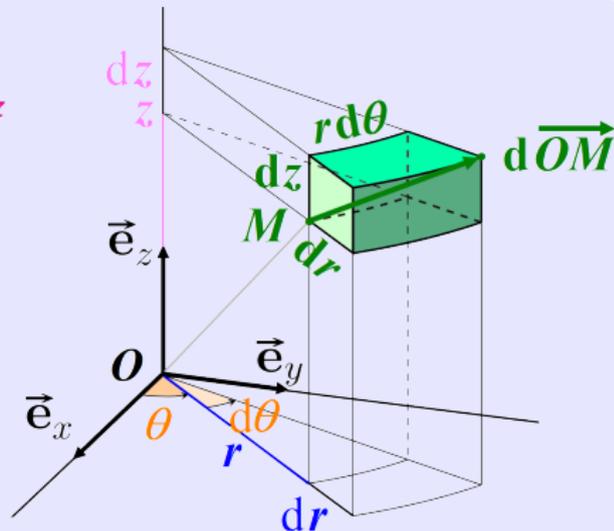
Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta, z$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$



- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta, z$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

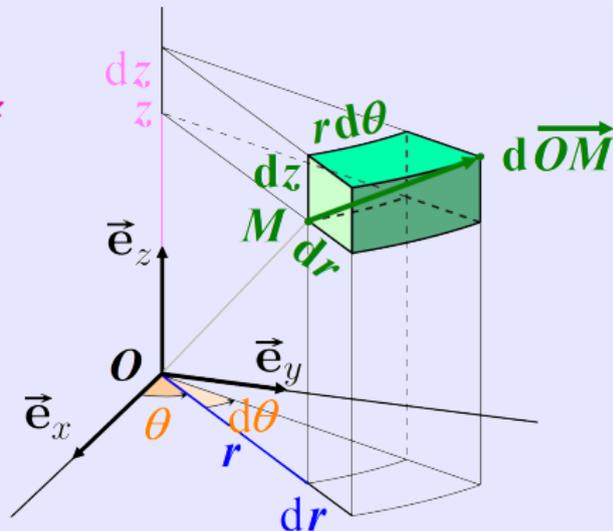
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

- **2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ , on trouve

$$d\vec{OM} = (dr) \vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) + (dz) \vec{e}_z + z(d\vec{e}_z)$$



- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta, z$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

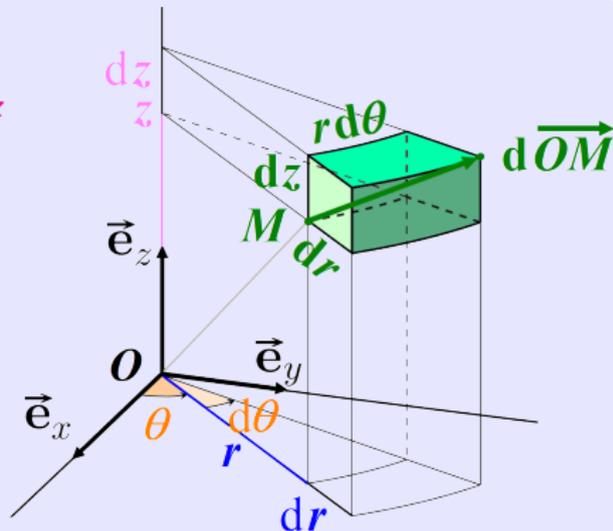
$$\Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

- **2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ , on trouve

$$d\vec{OM} = (dr) \vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) + (dz) \vec{e}_z + z(d\vec{e}_z)$$

$$= dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta} d\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}}_{\vec{0}} dz \right) + dz \vec{e}_z + z \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}_{\vec{0}} d\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{\vec{0}} dz \right)$$



- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta, z$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

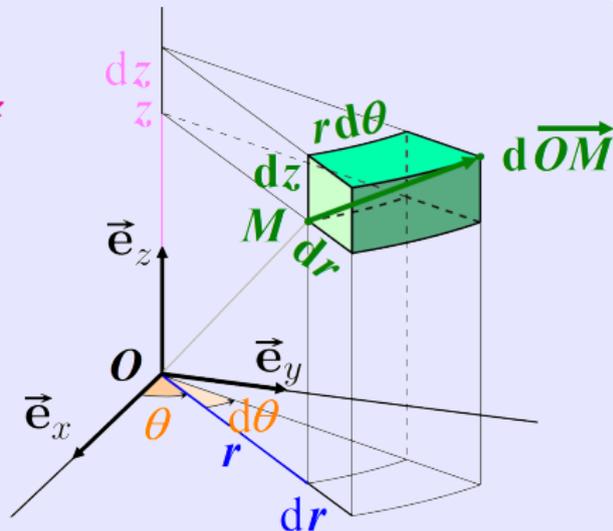
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

- **2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ , on trouve

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= (dr) \vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) + (dz) \vec{e}_z + z(d\vec{e}_z) \\ &= dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta} d\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}}_{\vec{0}} dz \right) + dz \vec{e}_z + z \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}_{\vec{0}} d\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{\vec{0}} dz \right) \\ &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \end{aligned}$$



- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} dz$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $r, \theta, z$   
en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

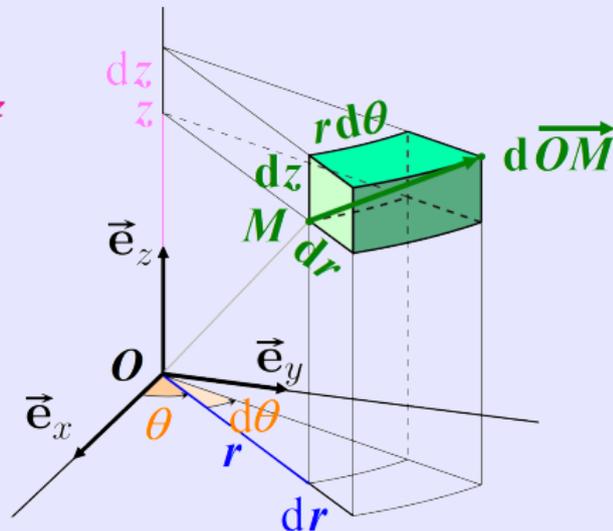
$$\Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel

Partant de  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ , on trouve

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= (dr) \vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) + (dz) \vec{e}_z + z(d\vec{e}_z) \\ &= dr \vec{e}_r + r \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta} d\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}}_{\vec{0}} dz \right) + dz \vec{e}_z + z \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}}_{\vec{0}} dr + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}_{\vec{0}} d\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{\vec{0}} dz \right) \\ &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \end{aligned}$$

**Remarque** : le « parallélépipède curviligne élémentaire » a pour volume  $r dr d\theta dz$ .  
Cet « élément de volume élémentaire » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées cylindriques dans les intégrales triples (voir chapitre Intégrales multiples).



En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.

Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

### Propriété 2.2 (Repère local cylindrique)

En *coordonnées cylindriques*, le **repère local** (orthonormé direct) est  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  où

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases *cartésienne* et *cylindrique*, par

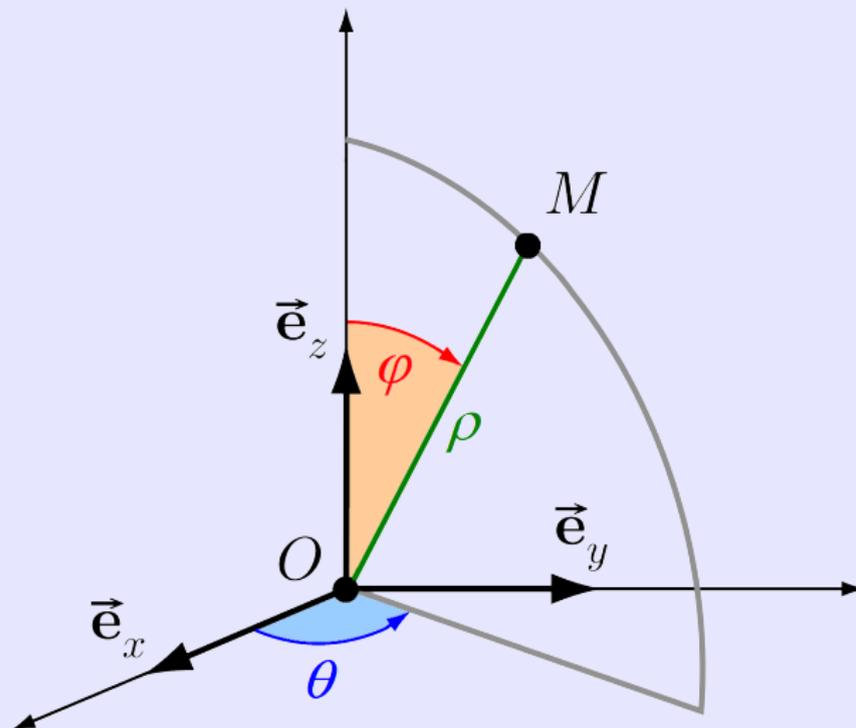
$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base *cylindrique*, par :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z}$$

On cherche le **repère local**  $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$  où  $M$  est le point de l'espace défini par

$$\vec{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \rho \sin(\varphi) \vec{e}_z$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \rho \sin(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme  $\rho$ , donc :

$$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z}$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \rho \sin(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme  $\rho$ , donc :

$$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\varphi = \text{cste}$  :

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \rho \sin(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme  $\rho$ , donc :

$$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\varphi = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y$$

On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme**.

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\varphi = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\theta = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \rho \sin(\varphi) \vec{e}_z$$

qui est de norme  $\rho$ , donc :

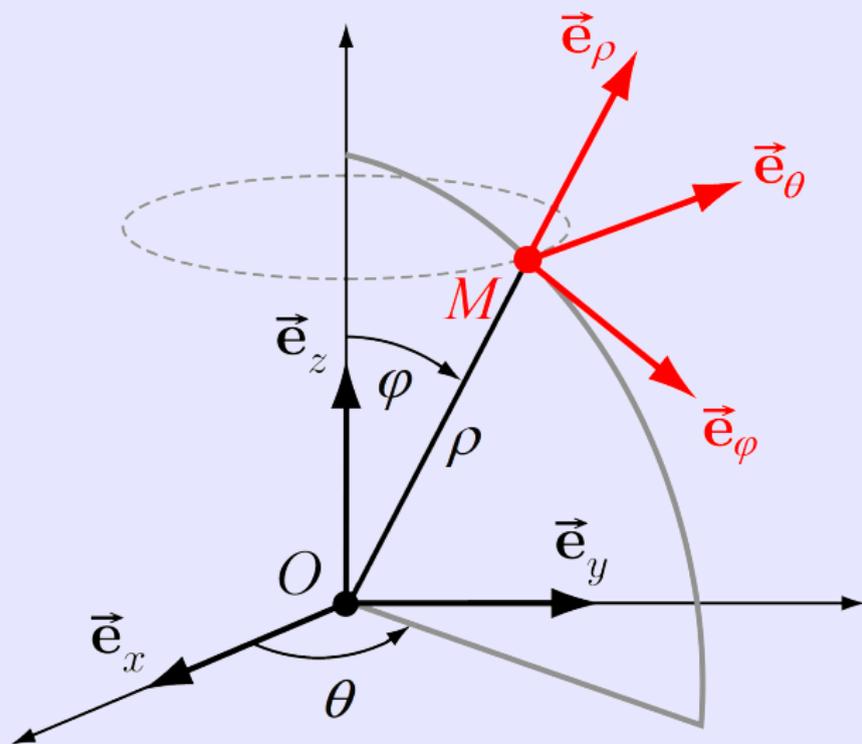
$$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée  $\rho = \text{cste}$  et  $\varphi = \text{cste}$  :

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y$$

qui est de norme  $\rho \sin(\varphi)$ , donc :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y}$$



On remarque que

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

et

$$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta \text{ sont orthogonaux et } \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\theta$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et un calcul similaire donne  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$ , et  $\vec{e}_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et un calcul similaire donne  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$ , et  $\vec{e}_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour  $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$ , et l'on a  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y$ .

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et un calcul similaire donne  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$ , et  $\vec{e}_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour  $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$ , et l'on a  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y$ .  
On remarque que  

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) \vec{e}_\rho + \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi &= \sin(\varphi) (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &\quad + \cos(\varphi) (\cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z) \end{aligned}$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et un calcul similaire donne  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$ , et  $\vec{e}_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour  $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$ , et l'on a  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y$ .  
On remarque que

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) \vec{e}_\rho + \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi &= \sin(\varphi) (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &\quad + \cos(\varphi) (\cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_x + \sin(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_y \\ &\quad + (\cos(\varphi) \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \vec{e}_z \end{aligned}$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et un calcul similaire donne  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$ , et  $\vec{e}_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour  $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$ , et l'on a  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y$ .  
On remarque que

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) \vec{e}_\rho + \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi &= \sin(\varphi) (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &\quad + \cos(\varphi) (\cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_x + \sin(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_y \\ &\quad + (\cos(\varphi) \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \vec{e}_z \\ &= \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \end{aligned}$$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  ne dépendent pas de  $\rho$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et un calcul similaire donne  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$ , et  $\vec{e}_\theta$  ne dépend pas de  $\varphi$ , soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour  $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$ , et l'on a  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y$ .  
On remarque que

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) \vec{e}_\rho + \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi &= \sin(\varphi) (\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z) \\ &\quad + \cos(\varphi) (\cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z) \\ &= \cos(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_x + \sin(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \vec{e}_y \\ &\quad + (\cos(\varphi) \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \vec{e}_z \\ &= \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \end{aligned}$$

soit 
$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} = \sin(\varphi) \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \cos(\varphi) \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin(\varphi) \vec{e}_\rho - \cos(\varphi) \vec{e}_\varphi}$$

- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $\rho, \varphi, \theta$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  :

- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

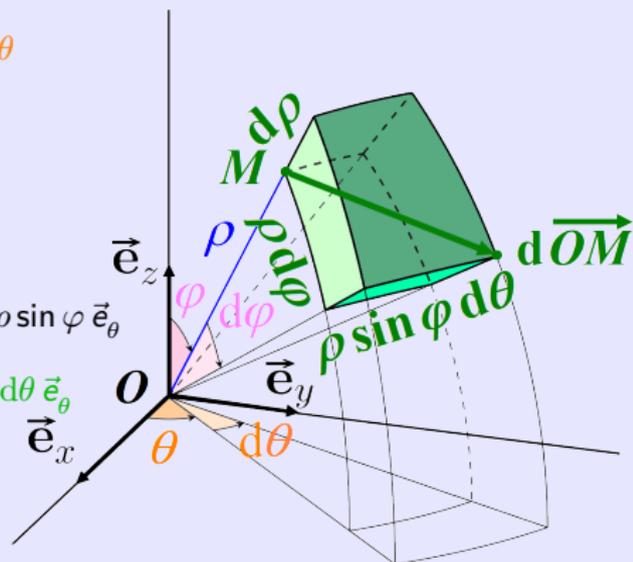
Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $\rho, \varphi, \theta$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta$$



- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $\rho, \varphi, \theta$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  :

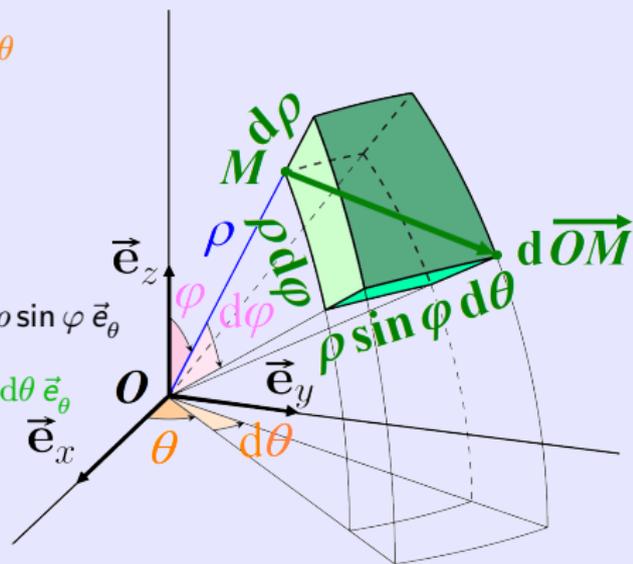
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta$$

- **2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$ , on trouve

$$d\vec{OM} = (d\rho) \vec{e}_\rho + \rho(d\vec{e}_\rho)$$



- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $\rho, \varphi, \theta$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  :

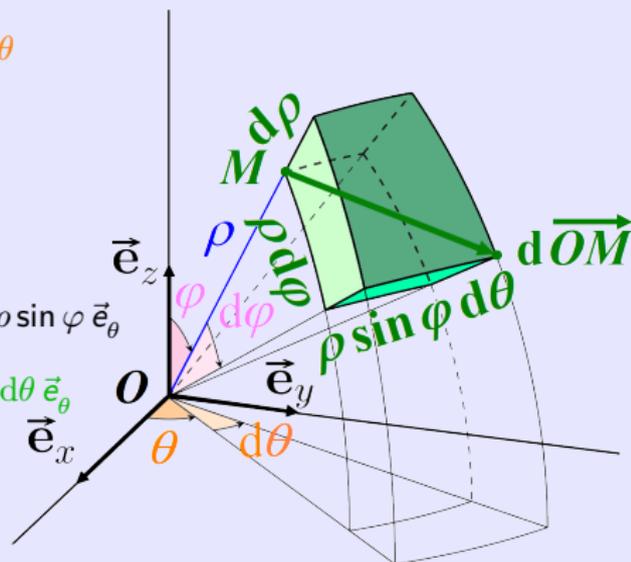
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta$$

- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel

Partant de  $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$ , on trouve

$$d\vec{OM} = (d\rho) \vec{e}_\rho + \rho(d\vec{e}_\rho) = d\rho \vec{e}_\rho + \rho \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}}_{\vec{0}} d\rho + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}}_{\vec{e}_\varphi} d\varphi + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}}_{\sin \varphi \vec{e}_\theta} d\theta \right)$$



- 1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $\rho, \varphi, \theta$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  :

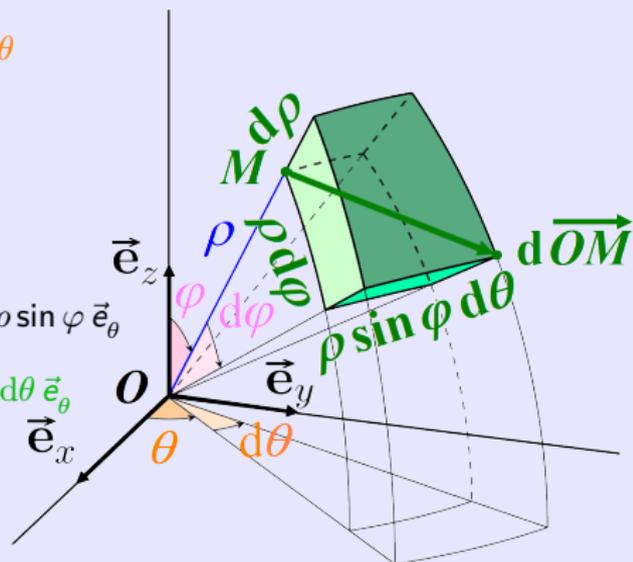
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta$$

- 2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel

Partant de  $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$ , on trouve

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= (d\rho) \vec{e}_\rho + \rho(d\vec{e}_\rho) = d\rho \vec{e}_\rho + \rho \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} d\rho}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} d\varphi}_{\vec{e}_\varphi} + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} d\theta}_{\sin \varphi \vec{e}_\theta} \right) \\ &= d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin \varphi d\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$



- **1<sup>er</sup> calcul : formule différentielle**

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta$$

Récupérons les dérivées partielles

de  $\vec{OM}$  par rapport à  $\rho, \varphi, \theta$

en fonction des vecteurs  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$  :

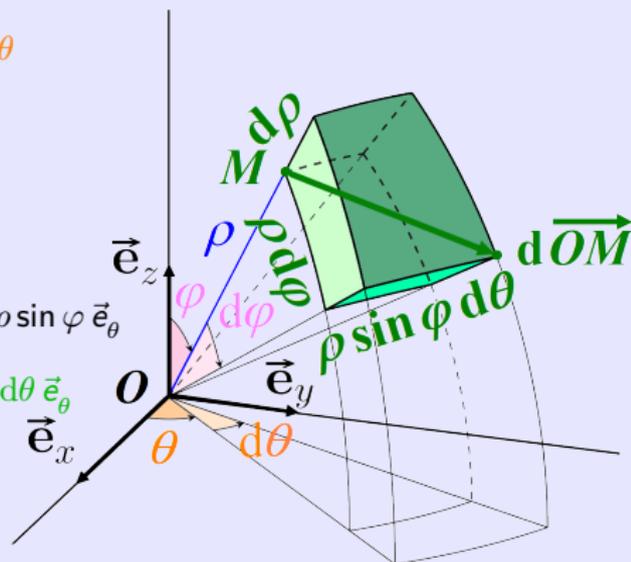
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \rho \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta$$

- **2<sup>e</sup> calcul : calcul différentiel**

Partant de  $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$ , on trouve

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= (d\rho) \vec{e}_\rho + \rho(d\vec{e}_\rho) = d\rho \vec{e}_\rho + \rho \left( \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}}_{\vec{0}} d\rho + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}}_{\vec{e}_\varphi} d\varphi + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}}_{\sin \varphi \vec{e}_\theta} d\theta \right) \\ &= d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin \varphi d\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$



**Remarque :** le « parallélépipède curviligne élémentaire » a pour volume  $\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$ . Cet « élément de volume élémentaire » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées sphériques dans les intégrales triples (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.

Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

### Propriété 2.3 (Repère local sphérique)

En *coordonnées sphériques*, le **repère local** (orthonormé direct) est  $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$  où

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \cos(\varphi) \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{e}_y - \sin(\varphi) \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \end{cases}$$

Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **sphérique**, par

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z = \rho \vec{e}_\rho$$

et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **sphérique**, par :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin(\varphi) d\theta \vec{e}_\theta}$$

### Remarque 2.4 (Base fixe/base locale)



Ne pas confondre :

«  $\overrightarrow{OM}$  dans un système de coordonnées  
donné dans la **base cartésienne fixe** »

et

«  $\overrightarrow{OM}$  dans un système de coordonnées  
donné dans la **base locale** associée à ce système »

## Remarque 2.4 (Base fixe/base locale)



Ne pas confondre :

«  $\overrightarrow{OM}$  dans un système de coordonnées  
donné dans la **base cartésienne fixe** »

et

«  $\overrightarrow{OM}$  dans un système de coordonnées  
donné dans la **base locale** associée à ce système »

## Exemples :

- $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées **cylindriques** dans la **base cartésienne fixe** :

$$\overrightarrow{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

- $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées **cylindriques** dans la **base locale** associée :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

## Remarque 2.4 (Base fixe/base locale)



Ne pas confondre :

«  $\vec{OM}$  dans un système de coordonnées  
donné dans la **base cartésienne fixe** »

et

«  $\vec{OM}$  dans un système de coordonnées  
donné dans la **base locale** associée à ce système »

## Exemples :

- $\vec{OM}$  en coordonnées **cylindriques** dans la **base cartésienne fixe** :

$$\vec{OM} = r \cos(\theta) \vec{e}_x + r \sin(\theta) \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

- $\vec{OM}$  en coordonnées **cylindriques** dans la **base locale** associée :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

- $\vec{OM}$  en coordonnées **sphériques** dans la **base cartésienne fixe** :

$$\vec{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{e}_y + \rho \cos(\varphi) \vec{e}_z$$

- $\vec{OM}$  en coordonnées **sphériques** dans la **base locale** associée :

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

## Notions à retenir

- Systèmes de coordonnées classiques : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
- Passage d'un système à un autre
- Détermination des repères locaux associés
- Description des lignes et surfaces coordonnées
- Calcul des dérivées partielles des vecteurs des repères locaux
- Calcul des déplacements élémentaires correspondants