INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes de coordonnées Repères locaux

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1er cycle, 1re année

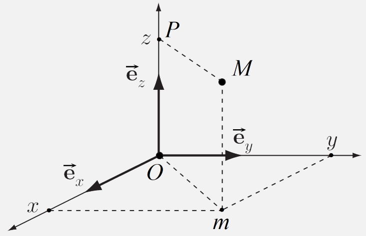
Sommaire

Dans tout ce paragraphe, on se place dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormé **fixe** direct $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ ou $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

Coordonnées cartésiennes

Dans l'espace (ou le plan), tout point M peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z}$$



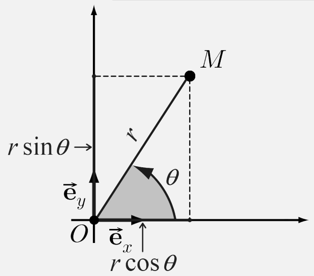
Les points $m(x,y,0)$ et $P(0,0,z)$ sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur le plan (Oxy) et l'axe (Oz).

Définition 1.1 (Coordonnées polaires)

Un point M du plan peut être repéré par sa distance $r\geqslant 0$ par rapport à l'origine O et son angle (lorsque $M\neq O$) $\theta=(\vec{e}_x,\overrightarrow{OM})$ avec $\theta\in[0,2\pi[$.

*Le couple (r,θ) est constitué des **coordonnées polaires** du point M.*

Avec ces notations, on a la relation $\boxed{\overrightarrow{OM}=r\cos(\theta)\vec{e}_x+r\sin(\theta)\vec{e}_y}$.



*L'origine O et l'axe $(O;\vec{e}_x)$ sont respectivement appelés **pôle** et **axe polaire**.*
*Le point O n'a pas de **coordonnées polaires** uniques.*

Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases}x=r\cos(\theta)\\ y=r\sin(\theta)\end{cases}}\quad et\quad \boxed{\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \cos(\theta)=\dfrac{x}{r},\ \sin(\theta)=\dfrac{y}{r}\end{cases}}$$

Propriété 1.3 (Courbes coordonnées)

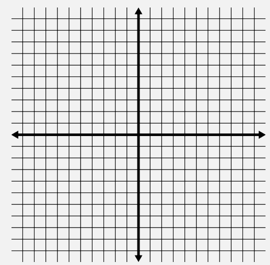
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation **r = cte** donne un **cercle** de centre O ;*
- *l'équation **θ = cte** donne une **demi-droite** d'origine O.*

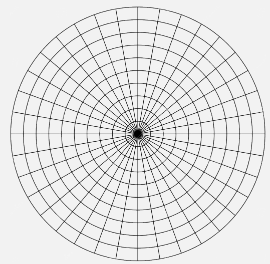
Plus précisément, pour $r_0>0$ et $\theta_0\in[0,2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0,\theta)$ est le **cercle** de centre O et de rayon r_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r,\theta_0)$ est la **demi-droite** d'origine O d'angle polaire θ_0.*

Courbes coordonnées et maillage



coordonnées **cartésiennes**



coordonnées **polaires**

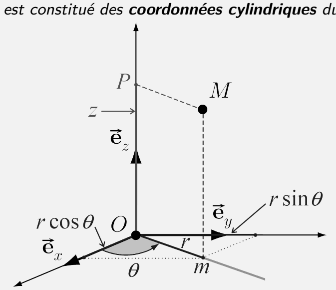
Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les **« polaires + l'altitude »**.

Définition 1.4 (Coordonnées cylindriques)

*On projette le point M de l'espace sur le plan (Oxy) en m et sur l'axe (Oz) en P : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{OP}$, et l'on repère le projeté m par ses **coordonnées polaires** dans le plan :*

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=r\cos(\theta)\vec{e}_x+r\sin(\theta)\vec{e}_y+z\vec{e}_z\ \text{avec}\ r\in[0,+\infty[,\ \theta\in[0,2\pi[,\ z\in\mathbb{R}}$$

*Le triplet (r,θ,z) est constitué des **coordonnées cylindriques** du point M.*



Remarque 1.5

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées cylindriques** uniques.
- Si m et P sont les projetés de M sur le plan (Oxy) et la droite (Oz), alors en **coordonnées cylindriques :** $M(r,\theta,z)$, $m(r,\theta,0)$ et $P(0,??,z)$.

Propriété 1.6 (Passage coordonnées cartésiennes/cylindriques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **cylindriques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases}x=r\cos(\theta)\\ y=r\sin(\theta)\\ z=z\end{cases}}\quad et\quad \boxed{\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \cos(\theta)=\dfrac{x}{r},\ \sin(\theta)=\dfrac{y}{r}\\ z=z\end{cases}}$$

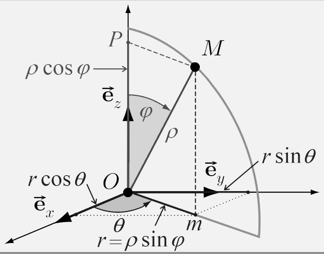
Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)

On repère un point M de l'espace par :

$$\begin{cases}\rho=\|\overrightarrow{OM}\| & \textit{distance à l'origine}\\ \varphi=(\vec{e}_z,\overrightarrow{OM}) & \textit{colatitude (par rapport au demi-axe } (Oz))\\ \theta=(\vec{e}_x,\overrightarrow{Om}) & \textit{longitude (par rapport au demi-axe } (Ox))\end{cases}$$

*Le triplet (ρ,φ,θ) constitue les **coordonnées sphériques** du point M.*
En décomposant comme précédemment $\overrightarrow{OM}$ selon $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{OP}$:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x+\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y+\rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z\ \text{avec}\ \varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi[}$$



Remarque 1.8

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées sphériques** uniques.
- Il existe plusieurs conventions pour les notations de **coordonnées sphériques** et **cylindriques.** Le choix adopté ici est tel que θ joue le même rôle dans les systèmes de **coordonnées cylindriques** et **coordonnées sphériques.**

Mais ce n'est pas toujours le cas !
Bien faire attention aux conventions choisies...

Propriété 1.9 (Passage coordonnées cartésiennes/sphériques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **sphériques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}}$$

Définition 1.10 (Courbes et surfaces coordonnées)

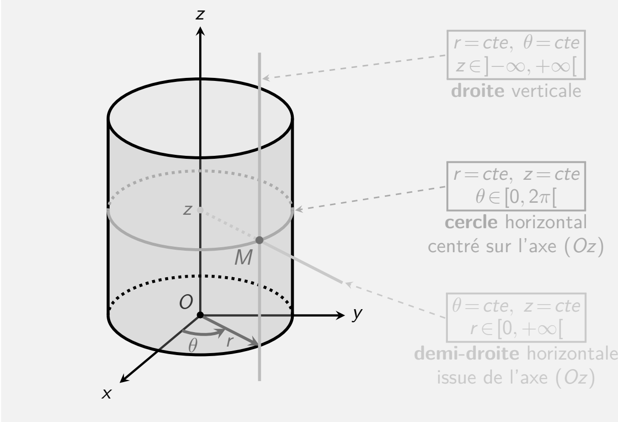
- *Lorsqu'**une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point M décrit une **surface coordonnée.***
- *Lorsque **deux** des trois coordonnées sont fixées et que la troisième varie, le point M décrit une **courbe coordonnée.***
  Ainsi, une courbe coordonnée est l'intersection de deux surfaces coordonnées.

Courbes coordonnées en cartésiennes

Les **courbes coordonnées** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :
les équations $(\boldsymbol{x = cte, y = cte})$ ou $(\boldsymbol{x = cte, z = cte})$ ou $(\boldsymbol{y = cte, z = cte})$ donnent les **axes** de cordonnées.

Les **surfaces coordonnées** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :
les équations $\boldsymbol{x = cte}$ ou $\boldsymbol{y = cte}$ ou $\boldsymbol{z = cte}$ donnent les **plans** de cordonnées.

Courbes coordonnées en cylindriques



Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)

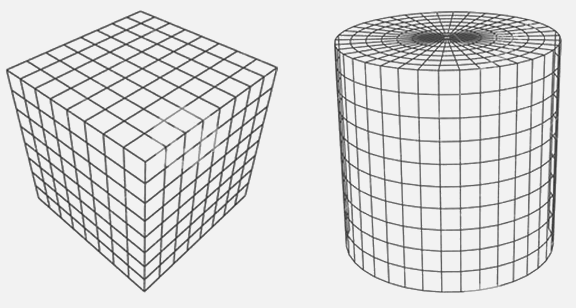
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :*

- *les équations $\boldsymbol{r = cte, \theta = cte}$ donnent une **droite** parallèle à l'axe (Oz) ;*
- *les équations $\boldsymbol{r = cte, z = cte}$ donnent un **cercle** centré sur l'axe (Oz) ;*
- *les équations $\boldsymbol{\theta = cte, z = cte}$ donnent une **demi-droite** issue de l'axe (Oz) parallèle au plan (Oxy).*

Plus précisément, pour $r_0 > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ fixes :

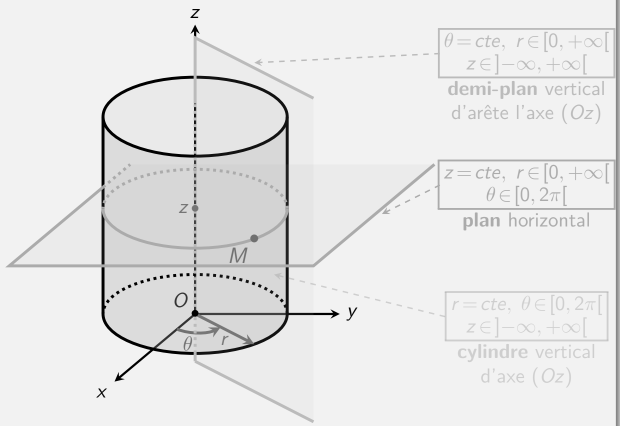
- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta_0, z)$ est la **droite** parallèle à l'axe (Oz) passant par le point de coordonnées cylindriques $(r_0, \theta_0, 0)$;*
- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta, z_0)$ est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z_0)$ et de rayon r_0 parallèle au plan (Oxy) ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0, z_0)$ est **la demi-droite** issue du point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z_0)$ parallèle au plan (Oxy).*

Courbes coordonnées et maillage



coordonnées **cartésiennes** — coordonnées **cylindriques**

Surfaces coordonnées en cylindriques



Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

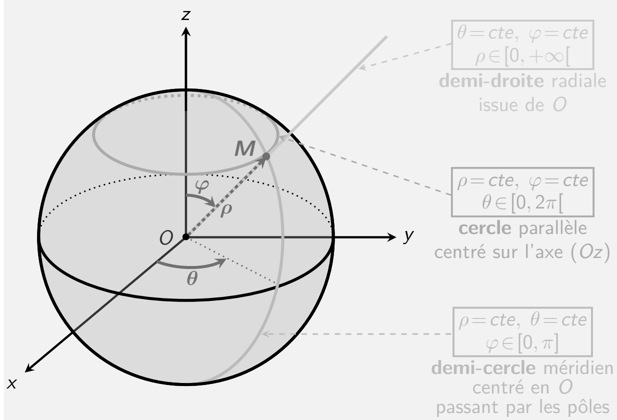
*Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $\boldsymbol{r = cte}$ donne un **cylindre** d'axe (Oz) ;*
- *l'équation $\boldsymbol{\theta = cte}$ donne un **demi-plan** contenant l'axe (Oz) ;*
- *l'équation $\boldsymbol{z = cte}$ donne un **plan** parallèle au plan (Oxy).*

Plus précisément, pour $r_0 > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta, z)$ est le **cylindre** d'axe (Oz) et de rayon r_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0, z)$ est le **demi-plan** d'arête (Oz) d'angle polaire θ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta, z_0)$ est le **plan** d'équation $z = z_0$.*

Courbes coordonnées en sphériques



Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

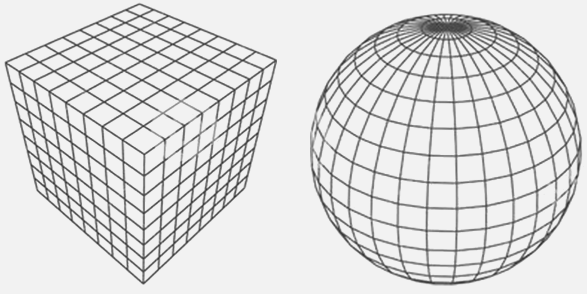
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :*

- *les équations $\boldsymbol{\rho = cte, \varphi = cte}$ donnent un **cercle** centré sur l'axe (Oz) ($\rightarrow$ « **parallèle** ») ;*
- *les équations $\boldsymbol{\rho = cte, \theta = cte}$ donnent un **demi-cercle** de centre O passant par les pôles (points de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$ $\rightarrow$ « **méridien** ») ;*
- *les équations $\boldsymbol{\theta = cte, \varphi = cte}$ donnent une **demi-droite** issue de l'origine O.*

Plus précisément, pour $\rho_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0, \pi]$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

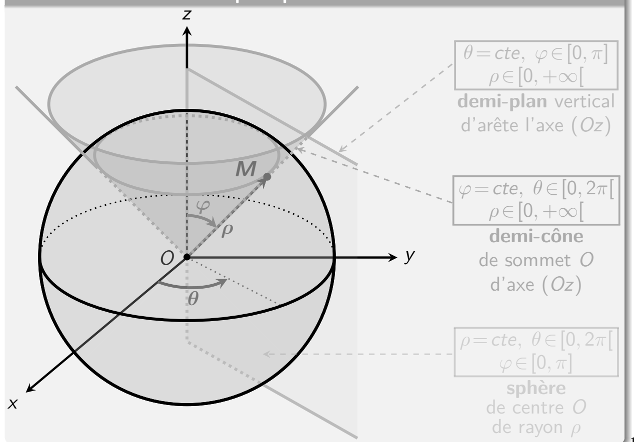
- *l'ensemble des points $M(\rho_0, \varphi_0, \theta)$ est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, \rho_0\cos\varphi_0)$ et de rayon $\rho_0\sin\varphi_0$ parallèle au plan (Oxy) ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho_0, \varphi, \theta_0)$ est le **demi-cercle** dont un diamètre est le segment constitué des deux pôles et passant par le point de coordonnées cylindriques $(\rho_0, \theta_0, 0)$;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi_0, \theta_0)$ est **la demi-droite** issue de O et passant par le point de coordonnées sphériques $(1, \varphi_0, \theta_0)$.*

Courbes coordonnées et maillage



coordonnées **cartésiennes** — coordonnées **sphériques**

Surfaces coordonnées en sphériques



Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

*Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $\rho = \textbf{cte}$ donne une **sphère** de centre O ;*
- *l'équation $\varphi = \textbf{cte}$ donne un **demi-cône** de centre O et d'axe (Oz).*
- *l'équation $\theta = \textbf{cte}$ donne un **demi-plan** d'arête (Oz) ;*

Plus précisément, pour $\rho_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0, \pi]$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(\rho_0, \varphi, \theta)$ est la **sphère** de centre O et de rayon ρ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi_0, \theta)$ est le **demi-cône** de centre O, d'axe (Oz) et de demi-angle au sommet φ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi, \theta_0)$ est le **demi-plan** d'arête (Oz) d'angle azimutal θ_0.*

Résumé : courbes et surfaces coordonnées dans les différents systèmes

Surfaces coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les surfaces coordonnées sont des **plans.**
- En coordonnées **cylindriques**, les surfaces coordonnées sont soit des **cylindres** soit **des demi-plans** soit des **plans.**
- En coordonnées **sphériques**, les surfaces coordonnées sont soit des **sphères**, soit des **demi-cônes**, soit des **demi-plans.**

Courbes coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les courbes coordonnées sont des **droites.**
- En coordonnées **cylindriques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **droites**, soit des **cercles**.
- En coordonnées **sphériques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **demi-cercles**, soit des **cercles.**

Remarque 1.15

Il est inutile de retenir tous ces résultats, il est préférable de savoir les retrouver à l'aide de graphiques.

Repère local

Dans un système de coordonnées, le **repère local** est constitué du point M comme origine et des vecteurs **tangents normés** aux courbes coordonnées, **orientés** dans le sens croissant de la variable.

Nous allons décrire les différents **repères locaux** obtenus dans les systèmes de coordonnées **cartésiennes**, **polaires**, **cylindriques** et **sphériques** en les construisant du point de vue **différentiel**.

Nous allons aussi définir les **déplacements élémentaires** dans chaque **repère local**.

Principe : lorsque les coordonnées subissent de petites variations :
(**déplacement élémentaire** d'un point M) $\approx$ ($\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ **différentielle** du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Méthode théorique

Formule différentielle : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\mathrm{d}z.$

Or $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont fixes donc leurs dérivées en x, y, z sont nulles.

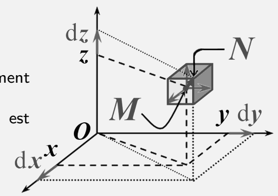
Donc $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = (1\vec{e}_x + x\vec{0}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{e}_x$.

De même, $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$.

$$\boxed{\text{Dans la base cartésienne : } d\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}$$

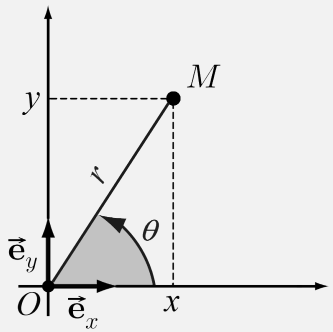
Méthode intuitive :

Le point $N(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$ est infiniment proche de $M(x, y, z)$.
Le vecteur variation de position élémentaire est $\overrightarrow{MN} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ assimilé à $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.



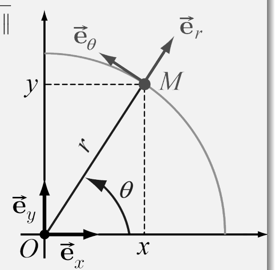
On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ où M est le point du plan défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\theta =$ cste : $\vec{e}_r = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\right\|}$
  avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y$
  qui est de norme 1 donc :
  $$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$
- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $r =$ cste : $\vec{e}_\theta = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|}$
  avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\,\vec{e}_x + r\cos(\theta)\,\vec{e}_y$
  qui est de norme r donc :
  $$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$



On remarque que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta \text{ sont } \textbf{orthogonaux}}$$

- $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ mais pas de r, donc :
  $$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$
- $\dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\big(\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y\big) = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta)\,\vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$, soit :
  $$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta}$$
- $\dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\big(-\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y\big) = -\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \vec{0} - \sin(\theta)\,\vec{e}_y + \vec{0} = -\vec{e}_r$, soit :
  $$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\Longrightarrow$ Une dérivation par rapport à θ correspond à une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ du vecteur.

- ***1er calcul : formule différentielle***

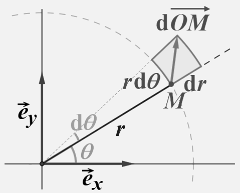
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à r, θ en fonction des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\,\vec{e}_\theta$$

donc :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$



- ***2e calcul : calcul différentiel***

Partant de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ on trouve (différentielle produit) :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}r)\vec{e}_r + r(\mathrm{d}\vec{e}_r) = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta\right) = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

Remarque : le « **rectangle curviligne élémentaire** » a pour aire $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.
Cet « **élément de surface élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées polaires dans les intégrales doubles (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 2.1 (Repère local polaire)

*En **coordonnées polaires**, le **repère local** (orthonormé direct) est $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \end{cases}$$

*Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **polaire**, par*

$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y = r\,\vec{e}_r$$

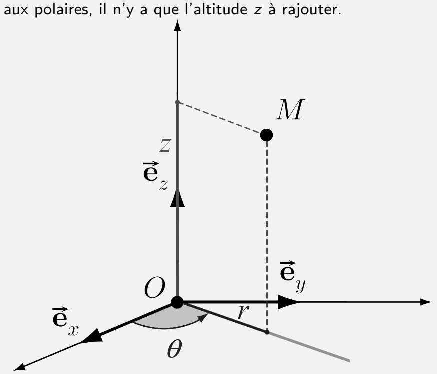
*et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **polaire**, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta}$$

On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ où M est le point de l'espace défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z}$$

Par rapport aux polaires, il n'y a que l'altitude z à rajouter.



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ($\theta = $ cste, $z = $ cste) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\right\|} \quad \text{où} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ($r = $ cste, $z = $ cste) :

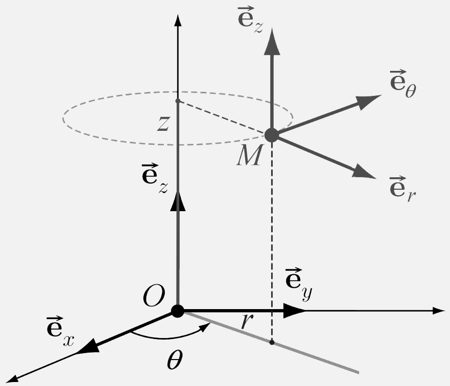
$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|} \quad \text{où} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ($\theta = $ cste, $r = $ cste) :

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\right\|} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z \text{ qui est de norme 1, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_z = \vec{e}_z}$$



On remarque que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \text{ et } \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z}$$

- $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ (mais ni de r, ni de z)

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = \vec{0} \end{matrix}}$$

- $\vec{e}_z$ est constant

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}}$$

- On remarque que

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\Longrightarrow$ Une dérivation par rapport à θ correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ du vecteur.

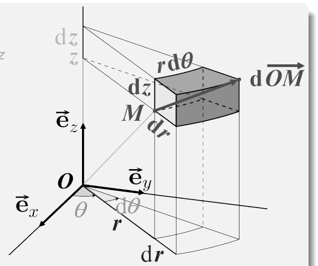
- ***1er calcul : formule différentielle***

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à r, θ, z en fonction des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$



- ***2e calcul : calcul différentiel***

Partant de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= (\mathrm{d}r)\,\vec{e}_r + r(\mathrm{d}\vec{e}_r) + (\mathrm{d}z)\,\vec{e}_z + z(\mathrm{d}\vec{e}_z) \\ &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}}_{\vec{0}}\mathrm{d}z\right) + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z + z\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}_{\vec{0}}\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{\vec{0}}\mathrm{d}z\right) \\ &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z \end{aligned}$$

Remarque : le « **parallélépipède curviligne élémentaire** » a pour volume $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.
Cet « **élément de volume élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées cylindriques dans les intégrales triples (cf. chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 2.2 (Repère local cylindrique)

*En **coordonnées cylindriques**, le **repère local** (orthonormé direct) est $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

*Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **cylindrique**, par*

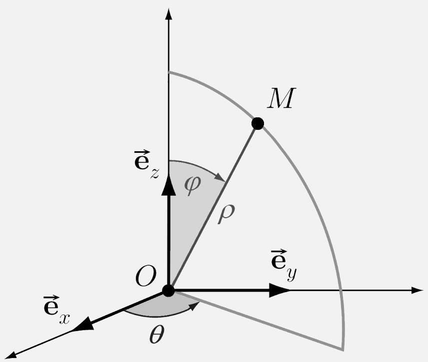
$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

*et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **cylindrique**, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}$$

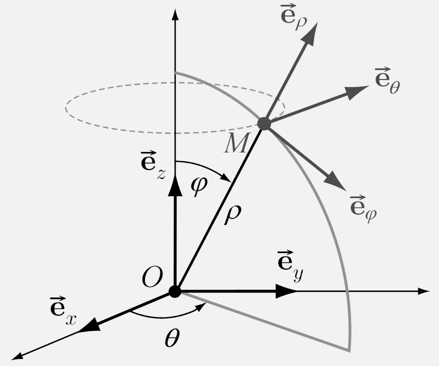
On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ où M est le point de l'espace défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z}$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\varphi = $ cste et $\theta = $ cste :
$$\vec e_\rho = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}\right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_y + \cos(\varphi)\,\vec e_z$$
qui est de norme 1, donc :
$$\boxed{\vec e_\rho = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_y + \cos(\varphi)\,\vec e_z}$$
- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\rho = $ cste et $\theta = $ cste :
$$\vec e_\varphi = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_x + \rho\sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_y - \rho\sin(\varphi)\,\vec e_z$$
qui est de norme ρ, donc :
$$\boxed{\vec e_\varphi = \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_y - \sin(\varphi)\,\vec e_z}$$
- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\rho = $ cste et $\varphi = $ cste :
$$\vec e_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_x + \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_y$$
qui est de norme $\rho\sin(\varphi)$, donc :
$$\boxed{\vec e_\theta = -\sin(\theta)\,\vec e_x + \cos(\theta)\,\vec e_y}$$

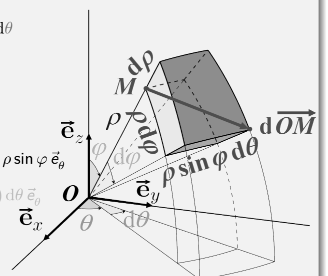


On remarque que

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec e_\rho}$ et $\boxed{\vec e_\rho, \vec e_\varphi, \vec e_\theta \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \text{ et } \vec e_\rho \wedge \vec e_\varphi = \vec e_\theta}$

- $\vec e_\rho, \vec e_\varphi, \vec e_\theta$ ne dépendent pas de ρ
$$\boxed{\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \rho} = \vec 0 \qquad \frac{\partial \vec e_\varphi}{\partial \rho} = \vec 0 \qquad \frac{\partial \vec e_\theta}{\partial \rho} = \vec 0}$$
- $$\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_y + \cos(\varphi)\,\vec e_z\big)$$
$$= \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_y - \sin(\varphi)\,\vec e_z = \vec e_\varphi$$
et un calcul similaire donne $\frac{\partial \vec e_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec e_\rho$, et $\vec e_\theta$ ne dépend pas de φ, soit :
$$\boxed{\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \varphi} = \vec e_\varphi \qquad \frac{\partial \vec e_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec e_\rho \qquad \frac{\partial \vec e_\theta}{\partial \varphi} = \vec 0}$$
- Calculs similaires pour $\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \vec e_\varphi}{\partial \theta}$, et l'on a $\frac{\partial \vec e_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta)\,\vec e_x - \sin(\theta)\,\vec e_y$.
On remarque que
$$\begin{aligned}\sin(\varphi)\vec e_\rho + \cos(\varphi)\vec e_\varphi &= \sin(\varphi)\big(\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_y + \cos(\varphi)\,\vec e_z\big)\\ &\quad + \cos(\varphi)\big(\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_y - \sin(\varphi)\,\vec e_z\big)\\ &= \cos(\theta)\big(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\big)\,\vec e_x + \sin(\theta)\big(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\big)\,\vec e_y\\ &\quad + \big(\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\big)\,\vec e_z\\ &= \cos(\theta)\,\vec e_x + \sin(\theta)\,\vec e_y\end{aligned}$$
soit $$\boxed{\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \theta} = \sin(\varphi)\,\vec e_\theta \qquad \frac{\partial \vec e_\varphi}{\partial \theta} = \cos(\varphi)\,\vec e_\theta \qquad \frac{\partial \vec e_\theta}{\partial \theta} = -\sin(\varphi)\,\vec e_\rho - \cos(\varphi)\,\vec e_\varphi}$$

- ***1[er] calcul : formule différentielle***
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$
Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à ρ, φ, θ en fonction des vecteurs $\vec e_\rho, \vec e_\varphi, \vec e_\theta$:
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \vec e_\rho \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho\,\vec e_\varphi \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \rho\sin\varphi\,\vec e_\theta$$
$$\Longrightarrow\ \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\vec e_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec e_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec e_\theta$$



- ***2[e] calcul : calcul différentiel***
Partant de $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec e_\rho$, on trouve
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}\rho)\,\vec e_\rho + \rho(\mathrm{d}\vec e_\rho) = \mathrm{d}\rho\,\vec e_\rho + \rho\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \rho}}_{\vec 0}\mathrm{d}\rho + \underbrace{\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \varphi}}_{\vec e_\varphi}\mathrm{d}\varphi + \underbrace{\frac{\partial \vec e_\rho}{\partial \theta}}_{\sin\varphi\,\vec e_\theta}\mathrm{d}\theta\Big)$$
$$= \mathrm{d}\rho\,\vec e_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec e_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec e_\theta$$

Remarque : le **« parallélépipède curviligne élémentaire »** a pour volume $\rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. Cet **« élément de volume élémentaire »** sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées sphériques dans les intégrales triples (cf. chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 2.3 (Repère local sphérique)

*En **coordonnées sphériques**, le **repère local** (orthonormé direct) est* $(M; \vec e_\rho, \vec e_\varphi, \vec e_\theta)$ *où*
$$\begin{cases}\vec e_\rho = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_y + \cos(\varphi)\,\vec e_z\\ \vec e_\varphi = \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec e_y - \sin(\varphi)\,\vec e_z\\ \vec e_\theta = -\sin(\theta)\,\vec e_x + \cos(\theta)\,\vec e_y\end{cases}$$
*Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **sphérique**, par*
$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec e_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec e_z = \rho\,\vec e_\rho$$
*et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **sphérique**, par :*
$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\vec e_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec e_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec e_\theta}$$

Remarque 2.4 (Base fixe/base locale)

⚠ Ne pas confondre :

*« $\overrightarrow{OM}$ dans un système de coordonnées donné dans la **base cartésienne fixe** »*

et

*« $\overrightarrow{OM}$ dans un système de coordonnées donné dans la **base locale** associée à ce système »*

Exemples :

- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **cylindriques** dans la **base cartésienne fixe :**
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec e_x + r\sin(\theta)\vec e_y + z\vec e_z}$$
- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **cylindriques** dans la **base locale** associée :
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec e_r + z\vec e_z}$$
- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **sphériques** dans la **base cartésienne fixe :**
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec e_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec e_y + \rho\cos(\varphi)\vec e_z}$$
- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **sphériques** dans la **base locale** associée :
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec e_\rho}$$

Notions à retenir

- Systèmes de coordonnées classiques : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
- Passage d'un système à un autre
- Détermination des repères locaux associés
- Description des lignes et surfaces coordonnées
- Calcul des dérivées partielles des vecteurs des repères locaux
- Calcul des déplacements élémentaires correspondants