INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes de coordonnées
Repères locaux

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1^{er} cycle, 1^{re} année

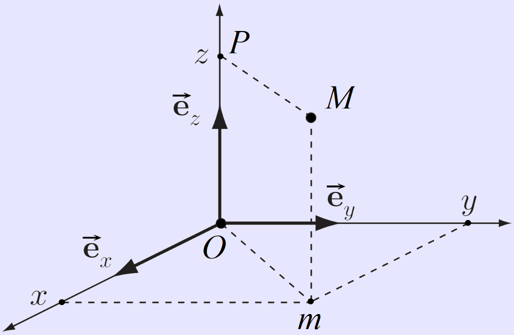
Sommaire

Dans tout ce paragraphe, on se place dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormé **fixe** direct $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ou $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Coordonnées cartésiennes

Dans l'espace (ou le plan), tout point M peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$



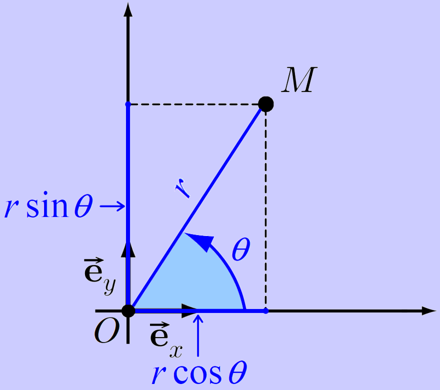
Les points $m(x, y, 0)$ et $P(0, 0, z)$ sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur le plan (Oxy) et l'axe (Oz).

Définition 1.1 (Coordonnées polaires)

Un point M du plan peut être repéré par sa distance $r \geqslant 0$ par rapport à l'origine O et son angle (lorsque $M \neq O$) $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

*Le couple (r, θ) est constitué des **coordonnées polaires** du point M.*

Avec ces notations, on a la relation $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y}$.



*L'origine O et l'axe $(O; \vec{e}_x)$ sont respectivement appelés **pôle** et **axe polaire**.*
*Le point O n'a pas de **coordonnées polaires** uniques.*

Propriété 1.2 (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{r},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \end{cases}}$$

Propriété 1.3 (Courbes coordonnées)

*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $\boldsymbol{r = cte}$ donne un **cercle** de centre O ;*
- *l'équation $\boldsymbol{\theta = cte}$ donne une **demi-droite** d'origine O.*

Plus précisément, pour $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta)$ est le **cercle** de centre O et de rayon r_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0)$ est la **demi-droite** d'origine O d'angle polaire θ_0.*

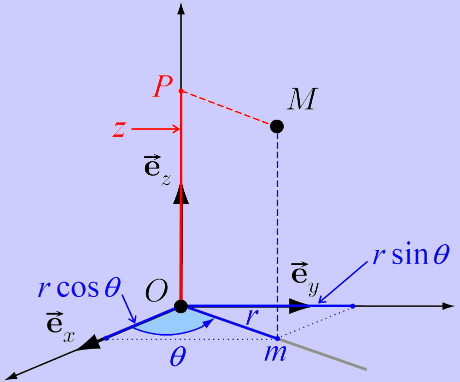
Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

Définition 1.4 (Coordonnées cylindriques)

*On projette le point M de l'espace sur le plan (Oxy) en m et sur l'axe (Oz) en P : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$, et l'on repère le projeté m par ses **coordonnées polaires** dans le plan :*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z \text{ avec } r \in [0, +\infty[,\ \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in \mathbb{R}}$$

*Le triplet (r, θ, z) est constitué des **coordonnées cylindriques** du point M.*



Remarque 1.5

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées cylindriques** uniques.
- Si m et P sont les projetés de M sur le plan (Oxy) et la droite (Oz), alors en **coordonnées cylindriques :** $M(r, \theta, z)$, $m(r, \theta, 0)$ et $P(0, ??, z)$.

Propriété 1.6 (Passage coordonnées cartésiennes/cylindriques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **cylindriques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{r},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \\ z = z \end{cases}}$$

Définition 1.7 (Coordonnées sphériques)

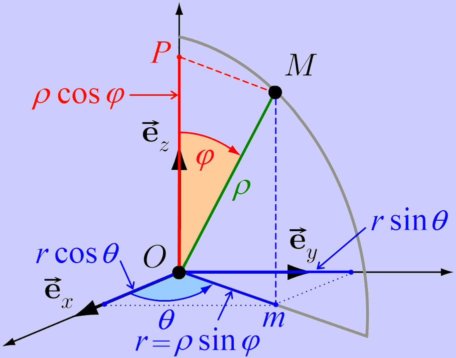
On repère un point M de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| & \text{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \text{colatitude (par rapport au demi-axe } (Oz)) \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \text{longitude (par rapport au demi-axe } (Ox)) \end{cases}$$

*Le triplet (ρ, φ, θ) constitue les **coordonnées sphériques** du point M.*

En décomposant comme précédemment $\overrightarrow{OM}$ selon $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z \text{ avec } \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi[}$$



Remarque 1.8

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées sphériques** uniques.
- Il existe plusieurs conventions pour les notations de **coordonnées sphériques** et **cylindriques.** Le choix adopté ici est tel que θ joue le même rôle dans les systèmes de **coordonnées cylindriques** et **coordonnées sphériques.**

Mais ce n'est pas toujours le cas !
Bien faire attention aux conventions choisies...

Propriété 1.9 (Passage coordonnées cartésiennes/sphériques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **sphériques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}}$$

Définition 1.10 (Courbes et surfaces coordonnées)

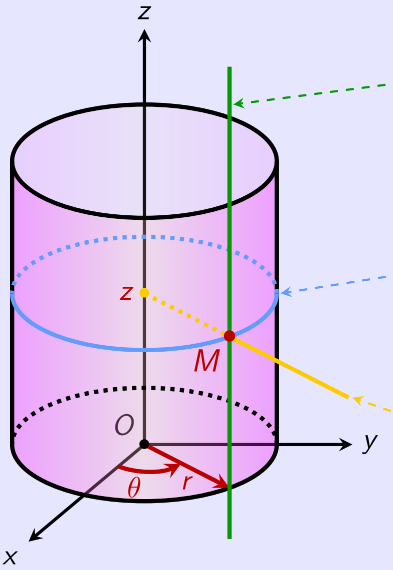
- *Lorsqu'**une** des trois coordonnées est fixée, et que les deux autres varient, le point M décrit une **surface coordonnée.***
- *Lorsque **deux** des trois coordonnées sont fixées et que la troisième varie, le point M décrit une **courbe coordonnée.***
  Ainsi, une courbe coordonnée est l'intersection de deux surfaces coordonnées.

Courbes coordonnées en cartésiennes

Les **courbes coordonnées** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :
les équations $\boldsymbol{(x = cte, y = cte)}$ ou $\boldsymbol{(x = cte, z = cte)}$ ou $\boldsymbol{(y = cte, z = cte)}$ donnent les **axes** de cordonnées.

Les **surfaces coordonnées** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :
les équations $\boldsymbol{x = cte}$ ou $\boldsymbol{y = cte}$ ou $\boldsymbol{z = cte}$ donnent les **plans** de cordonnées.

Courbes coordonnées en cylindriques



$r = cte, \ \theta = cte$
$z \in]-\infty, +\infty[$
droite verticale

$r = cte, \ z = cte$
$\theta \in [0, 2\pi[$
cercle horizontal
centré sur l'axe (Oz)

$\theta = cte, \ z = cte$
$r \in [0, +\infty[$
demi-droite horizontale
issue de l'axe (Oz)

Propriété 1.11 (Courbes coordonnées en cylindriques)

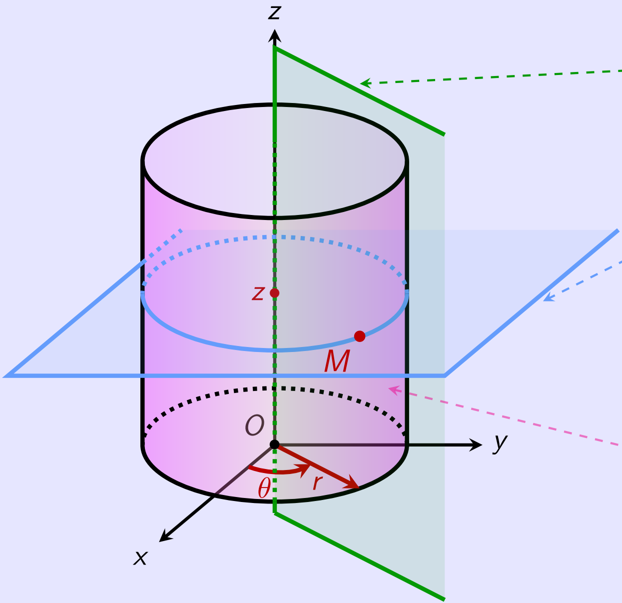
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :*

- *les équations $\boldsymbol{r = cte, \theta = cte}$ donnent une **droite** parallèle à l'axe (Oz) ;*
- *les équations $\boldsymbol{r = cte, z = cte}$ donnent un **cercle** centré sur l'axe (Oz) ;*
- *les équations $\boldsymbol{\theta = cte, z = cte}$ donnent une **demi-droite** issue de l'axe (Oz) parallèle au plan (Oxy).*

Plus précisément, pour $r_0 > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta_0, z)$ est la **droite** parallèle à l'axe (Oz) passant par le point de coordonnées cylindriques $(r_0, \theta_0, 0)$;*
- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta, z_0)$ est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z_0)$ et de rayon r_0 parallèle au plan (Oxy) ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0, z_0)$ est **la demi-droite** issue du point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z_0)$ parallèle au plan (Oxy).*

Surfaces coordonnées en cylindriques



$\theta = cte,\ r \in [0, +\infty[$
$z \in]-\infty, +\infty[$

demi-plan vertical d'arête l'axe (Oz)

$z = cte,\ r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, 2\pi[$

plan horizontal

$r = cte,\ \theta \in [0, 2\pi[$
$z \in]-\infty, +\infty[$

cylindre vertical d'axe (Oz)

Propriété 1.12 (Surfaces coordonnées en cylindriques)

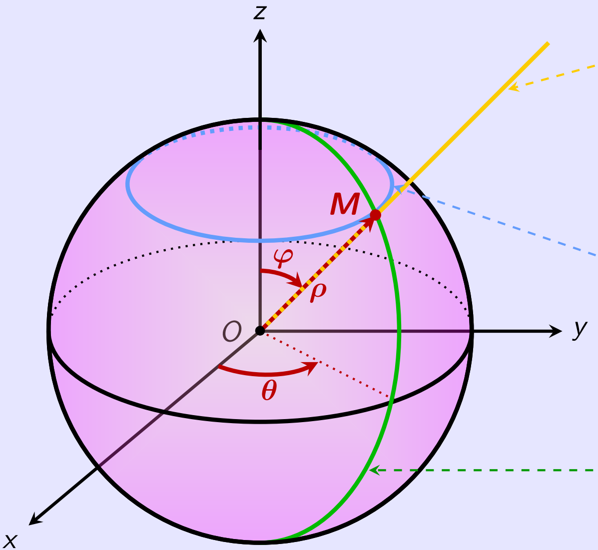
*Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées cylindriques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $\boldsymbol{r} = \textbf{cte}$ donne un **cylindre** d'axe (Oz) ;*
- *l'équation $\boldsymbol{\theta} = \textbf{cte}$ donne un **demi-plan** contenant l'axe (Oz) ;*
- *l'équation $\boldsymbol{z} = \textbf{cte}$ donne un **plan** parallèle au plan (Oxy).*

Plus précisément, pour $r_0 > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta, z)$ est le **cylindre** d'axe (Oz) et de rayon r_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0, z)$ est le **demi-plan** d'arête (Oz) d'angle polaire θ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta, z_0)$ est le **plan** d'équation $z = z_0$.*

Courbes coordonnées en sphériques



$\theta = cte,\ \varphi = cte$
$\rho \in [0, +\infty[$

demi-droite radiale issue de O

$\rho = cte,\ \varphi = cte$
$\theta \in [0, 2\pi[$

cercle parallèle centré sur l'axe (Oz)

$\rho = cte,\ \theta = cte$
$\varphi \in [0, \pi]$

demi-cercle méridien centré en O passant par les pôles

Propriété 1.13 (Courbes coordonnées en sphériques)

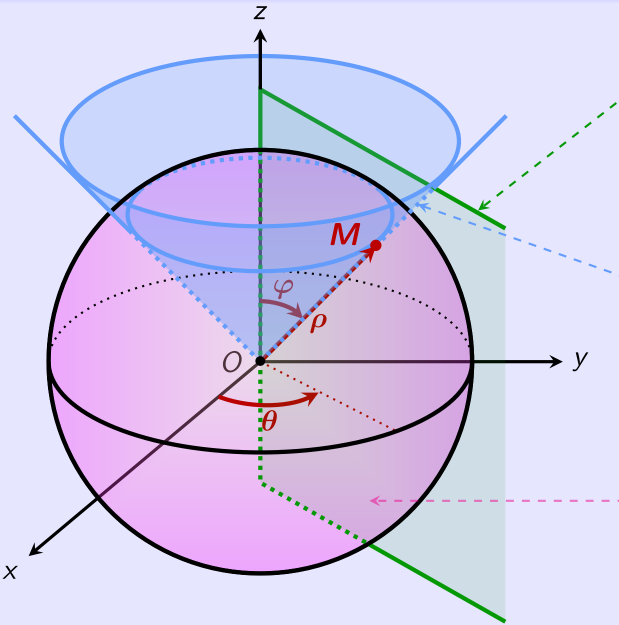
*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **deux** des coordonnées :*

- *les équations $\boldsymbol{\rho = \mathrm{cte}, \varphi = \mathrm{cte}}$ donnent un **cercle** centré sur l'axe (Oz) ($\to$ « **parallèle** ») ;*
- *les équations $\boldsymbol{\rho = \mathrm{cte}, \theta = \mathrm{cte}}$ donnent un **demi-cercle** de centre O passant par les pôles (points de coordonnées $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$ $\to$ « **méridien** ») ;*
- *les équations $\boldsymbol{\theta = \mathrm{cte}, \varphi = \mathrm{cte}}$ donnent une **demi-droite** issue de l'origine O.*

Plus précisément, pour $\rho_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0,\pi]$ et $\theta_0 \in [0,2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(\rho_0,\varphi_0,\theta)$ est le **cercle** de centre le point de coordonnées cartésiennes $(0,0,\rho_0\cos\varphi_0)$ et de rayon $\rho_0\sin\varphi_0$ parallèle au plan (Oxy) ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho_0,\varphi,\theta_0)$ est le **demi-cercle** dont un diamètre est le segment constitué des deux pôles et passant par le point de coordonnées cylindriques $(\rho_0,\theta_0,0)$;*
- *l'ensemble des points $M(\rho,\varphi_0,\theta_0)$ est **la demi-droite** issue de O et passant par le point de coordonnées sphériques $(1,\varphi_0,\theta_0)$.*

Surfaces coordonnées en sphériques



$\theta = cte,\ \varphi \in [0, \pi]$
$\rho \in [0, +\infty[$

demi-plan vertical
d'arête l'axe (Oz)

$\varphi = cte,\ \theta \in [0, 2\pi[$
$\rho \in [0, +\infty[$

demi-cône
de sommet O
d'axe (Oz)

$\rho = cte,\ \theta \in [0, 2\pi[$
$\varphi \in [0, \pi]$

sphère
de centre O
de rayon ρ

Propriété 1.14 (Surfaces coordonnées en sphériques)

*Les **surfaces coordonnées** en **coordonnées sphériques** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $\boldsymbol{\rho = \text{cte}}$ donne une **sphère** de centre O ;*
- *l'équation $\boldsymbol{\varphi = \text{cte}}$ donne un **demi-cône** de centre O et d'axe (Oz).*
- *l'équation $\boldsymbol{\theta = \text{cte}}$ donne un **demi-plan** d'arête (Oz) ;*

Plus précisément, pour $\rho_0 > 0$, $\varphi_0 \in [0, \pi]$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(\rho_0, \varphi, \theta)$ est la **sphère** de centre O et de rayon ρ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi_0, \theta)$ est le **demi-cône** de centre O, d'axe (Oz) et de demi-angle au sommet φ_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(\rho, \varphi, \theta_0)$ est le **demi-plan** d'arête (Oz) d'angle azimutal θ_0.*

Résumé : courbes et surfaces coordonnées dans les différents systèmes

Surfaces coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les surfaces coordonnées sont des **plans.**
- En coordonnées **cylindriques**, les surfaces coordonnées sont soit des **cylindres** soit **des demi-plans** soit des **plans.**
- En coordonnées **sphériques**, les surfaces coordonnées sont soit des **sphères**, soit des **demi-cônes**, soit des **demi-plans.**

Courbes coordonnées

- En coordonnées **cartésiennes**, les courbes coordonnées sont des **droites.**
- En coordonnées **cylindriques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **droites**, soit des **cercles**.
- En coordonnées **sphériques**, les courbes coordonnées sont soit des **demi-droites**, soit des **demi-cercles**, soit des **cercles.**

Remarque 1.15

Il est inutile de retenir tous ces résultats, il est préférable de savoir les retrouver à l'aide de graphiques.

Repère local

Dans un système de coordonnées, le **repère local** est constitué du point M comme origine et des vecteurs **tangents normés** aux courbes coordonnées, **orientés** dans le sens croissant de la variable.

Nous allons décrire les différents **repères locaux** obtenus dans les systèmes de coordonnées **cartésiennes**, **polaires**, **cylindriques** et **sphériques** en les construisant du point de vue **différentiel**.

Nous allons aussi définir les **déplacements élémentaires** dans chaque **repère local**.

Principe : lorsque les coordonnées subissent de petites variations :
(**déplacement élémentaire** d'un point M) $\approx$ ($\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ **différentielle** du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Sommaire

Méthode théorique

Formule différentielle : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\mathrm{d}z.$

Or $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont fixes donc leurs dérivées en x, y, z sont nulles.

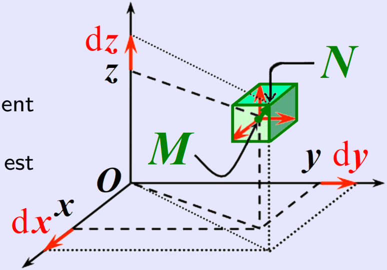
Donc $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = (1\vec{e}_x + x\vec{0}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{e}_x$.

De même, $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$.

$$\boxed{\text{Dans la base cartésienne : } d\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}$$

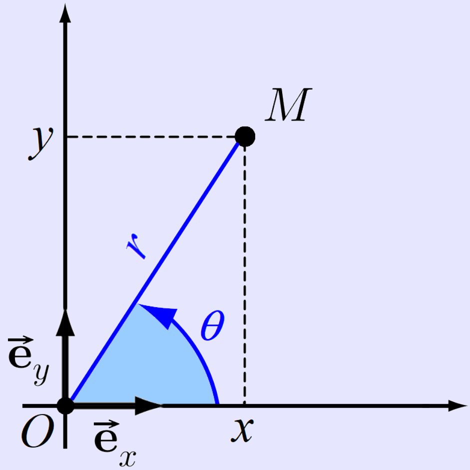
Méthode intuitive :

Le point $N(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ est infiniment proche de $M(x, y, z)$.
Le vecteur variation de position élémentaire est $\overrightarrow{MN} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ assimilé à $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.



On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ où M est le point du plan défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\theta =$ cste : $\vec{e}_r = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right\|}$

  avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y$

  qui est de norme 1 donc :

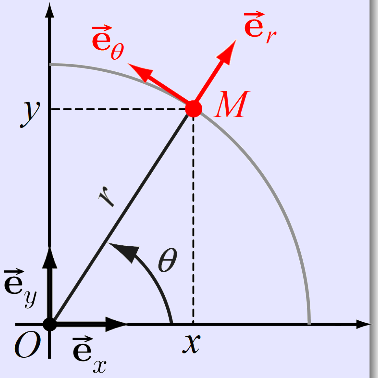
$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $r =$ cste : $\vec{e}_\theta = \dfrac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\|}$

  avec $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\,\vec{e}_x + r\cos(\theta)\,\vec{e}_y$

  qui est de norme r donc :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$



On remarque que

$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r}$ et $\boxed{\vec{e}_r\,,\,\vec{e}_\theta \text{ sont } \textbf{orthogonaux}}$

- $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ mais pas de r, donc :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}}$$

- $\dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y\right) = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \vec{0} + \cos(\theta)\,\vec{e}_y + \vec{0} = \vec{e}_\theta$, soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta}$$

- $\dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(-\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y\right) = -\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \vec{0} - \sin(\theta)\,\vec{e}_y + \vec{0} = -\vec{e}_r$, soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\Longrightarrow$ Une dérivation par rapport à θ correspond à une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ du vecteur.

- ***1er calcul : formule différentielle***

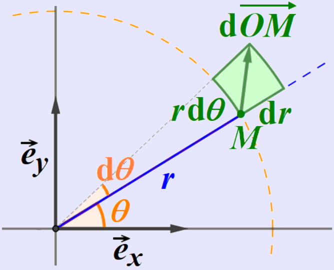
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à r, θ en fonction des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\,\vec{e}_\theta$$

donc :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$



- ***2e calcul : calcul différentiel***

Partant de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ on trouve (différentielle produit) :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}r)\vec{e}_r + r(\mathrm{d}\vec{e}_r) = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta\right) = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

Remarque : le « **rectangle curviligne élémentaire** » a pour aire $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.
Cet « **élément de surface élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées polaires dans les intégrales doubles (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 2.1 (Repère local polaire)

En ***coordonnées polaires****, le* ***repère local*** *(orthonormé direct) est* $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ *où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \end{cases}$$

Le ***vecteur-déplacement*** *est donné, dans les bases* ***cartésienne*** *et* ***polaire****, par*

$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y = r\,\vec{e}_r$$

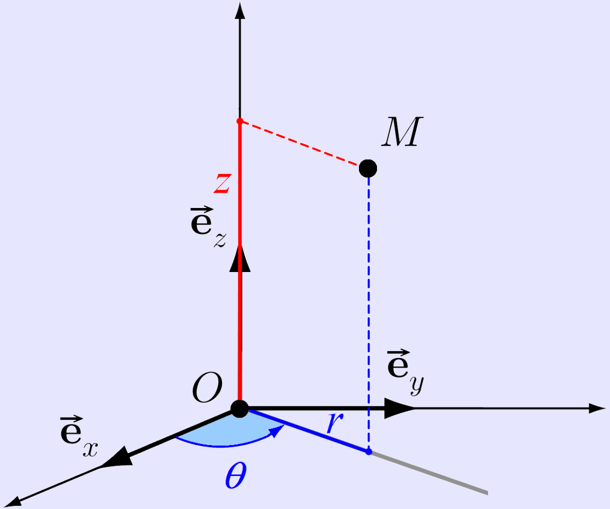
et le ***déplacement élémentaire*** *est donné, dans la base* ***polaire****, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta}$$

On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ où M est le point de l'espace défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z}$$

Par rapport aux polaires, il n'y a que l'altitude z à rajouter.



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ($\theta =$ cste, $z =$ cste) :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ($r =$ cste, $z =$ cste) :

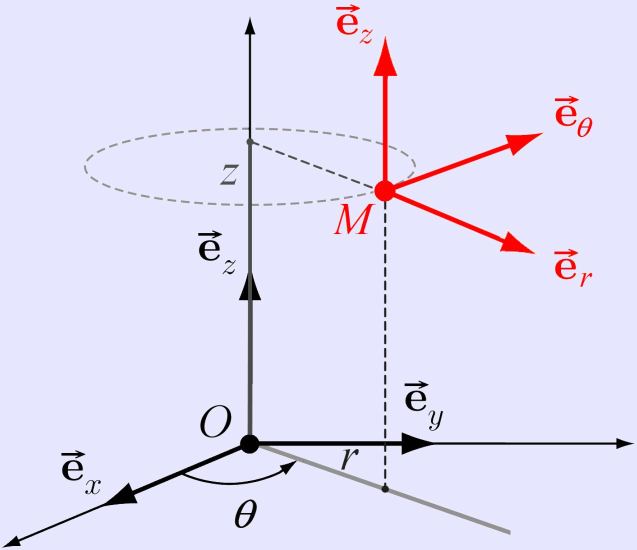
$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\|} \text{ où } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \text{ a été calculé en polaires, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée ($\theta =$ cste, $r =$ cste) :

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z \text{ qui est de norme 1, donc}$$

$$\boxed{\vec{e}_z = \vec{e}_z}$$



On remarque que

$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z}$ et $\boxed{\vec{e}_r\,,\vec{e}_\theta\,,\vec{e}_z \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \text{ et } \quad \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z}$

- $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ (mais ni de r, ni de z)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0} & \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0} & \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = \vec{0} \end{array}}$$

- $\vec{e}_z$ est constant

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}}$$

- On remarque que

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r}$$

$\Longrightarrow$ Une dérivation par rapport à θ correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ du vecteur.

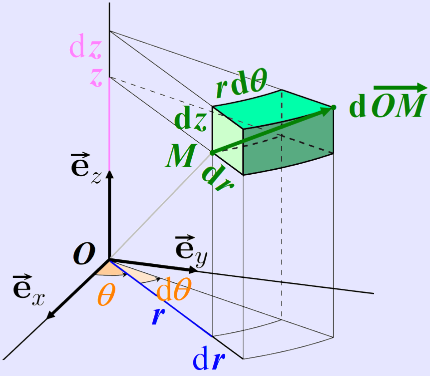
- ***1er calcul : formule différentielle***

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à r, θ, z en fonction des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$



- ***2e calcul : calcul différentiel***

Partant de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$, on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= (\mathrm{d}r)\,\vec{e}_r + r(\mathrm{d}\vec{e}_r) + (\mathrm{d}z)\,\vec{e}_z + z(\mathrm{d}\vec{e}_z)\\ &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}}_{\vec{0}}\mathrm{d}z\Big) + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z + z\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}}_{\vec{0}}\mathrm{d}r + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta}}_{\vec{0}}\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{\vec{0}}\mathrm{d}z\Big)\\ &= \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z\end{aligned}$$

Remarque : le « **parallélépipède curviligne élémentaire** » a pour volume $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.
Cet « **élément de volume élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées cylindriques dans les intégrales triples (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 2.2 (Repère local cylindrique)

En ***coordonnées cylindriques****, le* ***repère local*** *(orthonormé direct) est* $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ *où*

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Le ***vecteur-déplacement*** *est donné, dans les bases* ***cartésienne*** *et* ***cylindrique****, par*

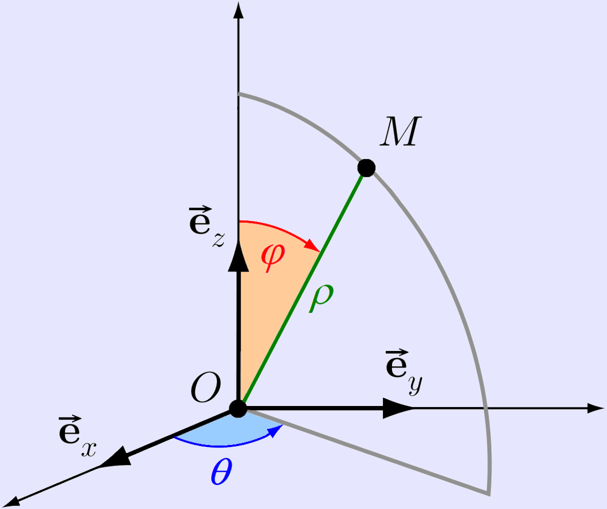
$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e}_x + r\sin(\theta)\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

et le ***déplacement élémentaire*** *est donné, dans la base* ***cylindrique****, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}$$

On cherche le **repère local** $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ où M est le point de l'espace défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z}$$



On calcule l'expression des vecteurs **tangents** puis on les **norme.**

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\varphi = \text{cste}$ et $\theta = \text{cste}$:

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z$$

qui est de norme 1, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\rho = \text{cste}$ et $\theta = \text{cste}$:

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \rho\sin(\varphi)\,\vec{e}_z$$

qui est de norme ρ, donc :

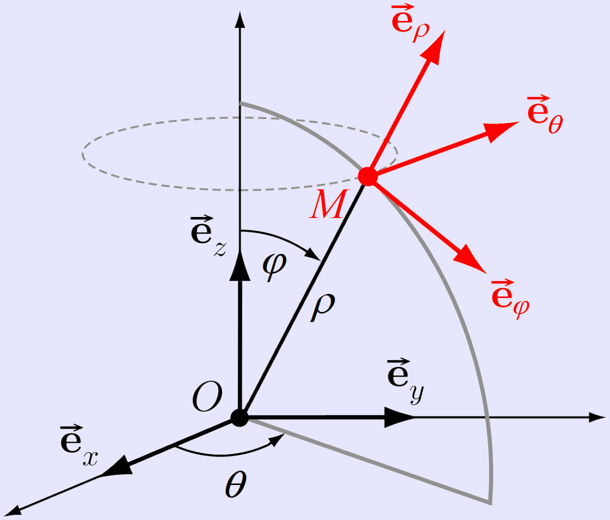
$$\boxed{\vec{e}_\varphi = \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z}$$

- Vecteur **unitaire tangent** à la courbe coordonnée $\rho = \text{cste}$ et $\varphi = \text{cste}$:

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right\|} \text{ avec } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y$$

qui est de norme $\rho\sin(\varphi)$, donc :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y}$$



On remarque que

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho}$ et $\boxed{\vec{e}_\rho\,,\vec{e}_\varphi\,,\vec{e}_\theta \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \text{ et } \quad \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\theta}$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ ne dépendent pas de ρ

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = \vec{0} \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = \vec{0} \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{0}}$$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z\right)\\ &= \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z = \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

  et un calcul similaire donne $\dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho$, et $\vec{e}_\theta$ ne dépend pas de φ, soit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{0}}$$

- Calculs similaires pour $\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}$, et l'on a $\dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos(\theta)\,\vec{e}_x - \sin(\theta)\,\vec{e}_y$.
  On remarque que

$$\begin{aligned}\sin(\varphi)\vec{e}_\rho + \cos(\varphi)\vec{e}_\varphi &= \sin(\varphi)\left(\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z\right)\\ &\quad + \cos(\varphi)\left(\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z\right)\\ &= \cos(\theta)\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)\vec{e}_x + \sin(\theta)\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)\vec{e}_y\\ &\quad + \left(\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\right)\vec{e}_z\\ &= \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

  soit $\boxed{\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} = \sin(\varphi)\,\vec{e}_\theta \qquad \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = \cos(\varphi)\,\vec{e}_\theta \qquad \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin(\varphi)\,\vec{e}_\rho - \cos(\varphi)\,\vec{e}_\varphi}$

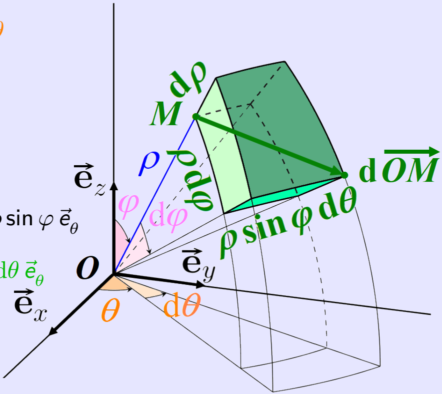
- ***1er calcul : formule différentielle***

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$

Récupérons les dérivées partielles de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à ρ, φ, θ en fonction des vecteurs $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho\,\vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \rho \sin\varphi\,\vec{e}_\theta$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$



- ***2e calcul : calcul différentiel***

Partant de $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$, on trouve

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (\mathrm{d}\rho)\,\vec{e}_\rho + \rho(\mathrm{d}\vec{e}_\rho) = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}}_{\vec{0}}\mathrm{d}\rho + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}}_{\vec{e}_\varphi}\mathrm{d}\varphi + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}}_{\sin\varphi\,\vec{e}_\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

Remarque : le « **parallélépipède curviligne élémentaire** » a pour volume $\rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. Cet « **élément de volume élémentaire** » sera utilisé dans le changement de variables en coordonnées sphériques dans les intégrales triples (voir chapitre Intégrales multiples).

En résumé, on a obtenu les formules ci-dessous.
Plutôt que de les apprendre par cœur, il est préférable de savoir les retrouver par la méthode visuelle.

Propriété 2.3 (Repère local sphérique)

*En **coordonnées sphériques**, le **repère local** (orthonormé direct) est* $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ *où*

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \cos(\varphi)\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi)\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \end{cases}$$

*Le **vecteur-déplacement** est donné, dans les bases **cartésienne** et **sphérique**, par*

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z = \rho\,\vec{e}_\rho$$

*et le **déplacement élémentaire** est donné, dans la base **sphérique**, par :*

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta}$$

Remarque 2.4 (Base fixe/base locale)

Ne pas confondre :

« $\overrightarrow{OM}$ dans un système de coordonnées donné dans la ***base cartésienne fixe*** *»*

et

« $\overrightarrow{OM}$ dans un système de coordonnées donné dans la ***base locale*** *associée à ce système »*

Exemples :

- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **cylindriques** dans la **base cartésienne fixe :**

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$

- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **cylindriques** dans la **base locale** associée :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$$

- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **sphériques** dans la **base cartésienne fixe :**

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\vec{e}_z}$$

- $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées **sphériques** dans la **base locale** associée :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho}$$

Notions à retenir

- Systèmes de coordonnées classiques : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
- Passage d'un système à un autre
- Détermination des repères locaux associés
- Description des lignes et surfaces coordonnées
- Calcul des dérivées partielles des vecteurs des repères locaux
- Calcul des déplacements élémentaires correspondants