INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Binôme de Newton

Sommaire

1. Factorielle

1. Factorielle

Définition (Factorielle)

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « **factorielle** » de n le nombre*

$$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple (Les 10 premières factorielles)

$1\,! = 1$	$6\,! = 720$
$2\,! = 2$	$7\,! = 5040$
$3\,! = 6$	$8\,! = 40320$
$4\,! = 24$	$9\,! = 362880$
$5\,! = 120$	$10\,! = 3628800$

Proposition (Permutations)

$n!$ est le nombre de ***permutations*** *d'un ensemble contenant n éléments.*

Exemples (Permutations)

- **Cas $n = 3$:** il y a $3! = 6$ permutations de 3 éléments.

  123 132 213 231 312 321

- **Cas $n = 4$:** il y a $4! = 24$ permutations de 4 éléments.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

1. Factorielle

Exemples (Factorielles)

- $\dfrac{50\,!}{46\,!} = 50 \times 49 \times 48 \times 47 = 5527200$
- $\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \dfrac{(2n+3)(2n+2) \times (2n+1)!}{(2n+1)!} = (2n+3)(2n+2)$
  $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n\,!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n^3$
  $\dfrac{(n-1)!}{n\,!} - \dfrac{n\,!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$
- $\dfrac{(2n)!}{n\,!} = \dfrac{(2n)(2n-1)\dots(n+1) \times n\,!}{n\,!} = (n+1)(n+2)\dots(2n)$
  Pour $n = 1, 2, 3, 4$ on obtient respectivement : $2, 12, 120, 1680$.
- ***Une minoration de*** $n\,!$ ***:*** pour $n \geqslant 10$,
  $n\,! = \underbrace{n}_{\geqslant 10} \times \underbrace{(n-1)}_{\geqslant 10} \times \underbrace{(n-2)}_{\geqslant 10} \times \cdots \times \underbrace{10}_{\geqslant 10} \times 9\,! \geqslant 9\,! \times 10^{n-9}$

Exemples (Factorielles)

- ***Produit des premiers nombres pairs :*** partant de
$\prod_{k=1}^{n}(2k) = \prod_{k=1}^{n} 2 \times \prod_{k=1}^{n} k$, on trouve
$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n\, n\,!$$

- ***Produit des premiers nombres impairs :*** partant de
$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) \times \prod_{k=1}^{n}(2k) = 1 \times 2 \times \cdots \times (2n+1) = (2n+1)\,!$$
on trouve
$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n\,!}$$

- Partant de, pour tout $k \geqslant 1$, $k\,! \geqslant 2^{k-1}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Exemple (Arrangements (facultatif))

On dispose de n objets discernables. On en prélève successivement p les uns après les autres. Il y a :

- n choix possibles pour prélever le 1er objet ;
- $(n-1)$ choix possibles pour prélever le 2e objet ;
- $(n-2)$ choix possibles pour prélever le 3e objet ;
- ...
- $(n-p+1)$ choix possibles pour prélever le pe objet.

On obtient ainsi $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$ prélèvements possibles. On a $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \dfrac{n\,!}{(n-p)!}$.

C'est le nombre d'**arrangements** de p objets parmi n. On le note A_n^p.

Exemple (Le tiercé hippique (facultatif))

Le **tiercé** est un principe de pari hippique dans lequel le parieur est invité à pronostiquer les trois chevaux arrivés en tête d'une course, soit dans l'ordre pour un gain maximal, soit dans un ordre différent.

Un pronostic de **tiercé ordonné** revient à désigner 3 numéros parmi n (effectif total des partants). Il y en a $A_n^3 = n \times (n-1) \times (n-2)$.

Pour une course de 10 partants, il y a $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés ordonnés possibles, pour une course de 20 partants, il y en a $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

2. Combinaison

2. Combinaison

- Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire à deux issues possibles (par exemple « succès » et « échec »).
- Un ***schéma de Bernoulli*** est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition (Combinaison)

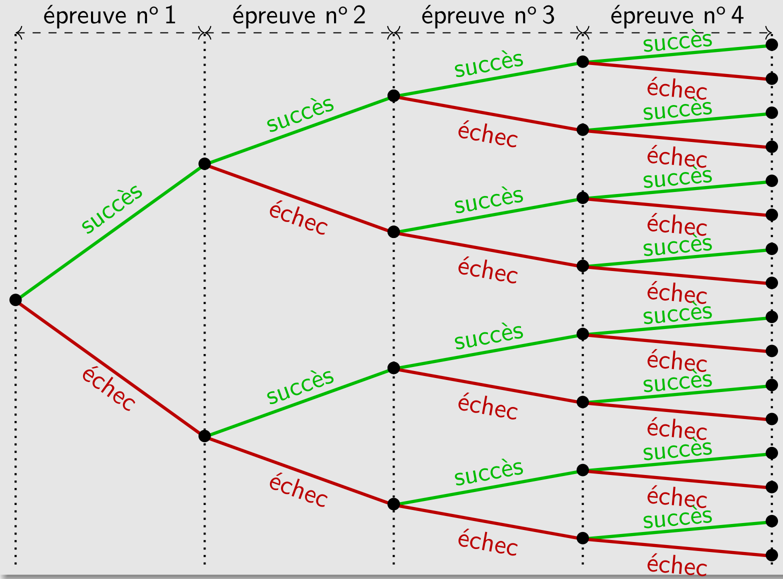
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
*On appelle **« combinaison »** de p parmi n le nombre de chemins dans l'arbre binaire représentatif d'un schéma de n épreuves de Bernoulli conduisant à p succès.*

On note ce nombre $\binom{n}{p}$ (« p parmi n »).

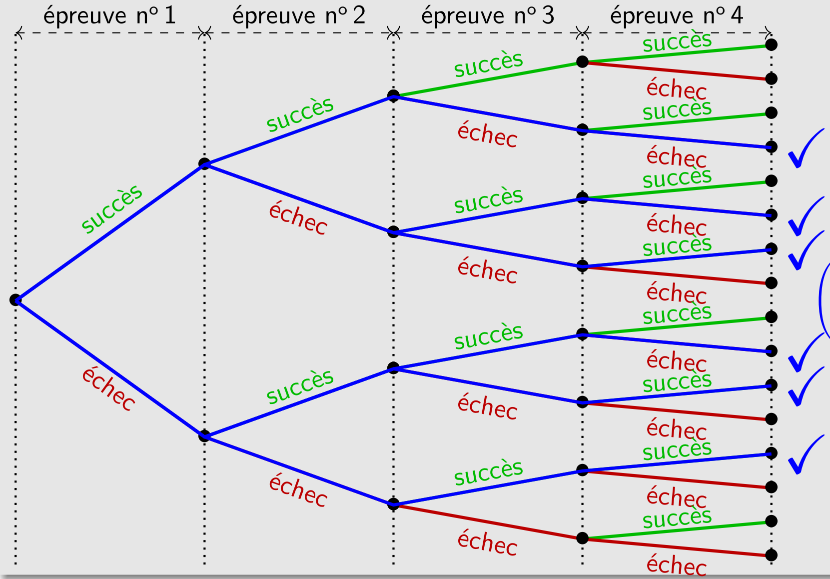
*$\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de prélèvements **simultanés** (**sans remise**) de p objets parmi n.*

2. Combinaison

Arbre binaire



Arbre binaire : 2 succès sur 4 épreuves



$$\binom{4}{2} = 6$$

2. Combinaison

Proposition (Combinaison)

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \{0, 1, \dots, n\}$*. On a*

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p\,!}$$

En effet : étant donné p objets discernables prélevés simultanément, leurs $p!$ permutations génèrent tous les prélèvements successifs possibles de ces objets.
Comme il y a A_n^p prélèvements successifs distincts (arrangements) de p objets parmi n, il y a $p!$ fois moins prélèvements simultanés, soit $\frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}$.

2. Combinaison

Exemple (Jeu du loto (facultatif))

Le jeu du **loto** (version 1976) consiste à cocher 6 numéros sur une grille de 49 cases numérotées de 1 à 49.

Le tirage s'effectue par des prélèvements successifs de 6 boules d'une gigantesque urne rotative. Cela dit, l'ordre des numéros tirés n'a pas d'importance, le tirage est équivalent à un prélèvement simultané de 6 boules.

Il y a donc 1 seule combinaison gagnante parmi $\binom{49}{6}$ combinaisons possibles avec $\binom{49}{6} = \dfrac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6\,!} = 13983816$.

Il y a ainsi 1 chance sur environ 14 millions de remporter le gros lot, soit une probabilité de 7×10^{-8}...

2. Combinaison

Proposition (Valeurs particulières, symétrie)

1. *Pour tous* $p, n \in \mathbb{N}$ *tels que* $p \leqslant n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exemples (Combinaisons)

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \qquad \binom{50}{2} = \frac{50 \times 49}{2} = 1225$$

$$\binom{50}{49} = \binom{50}{50-1} = \binom{50}{1} = 50$$

Proposition (Formule de Pascal)

Soit $p, n \in \mathbb{N}$ *tels que* $p \leqslant n-1$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

En effet :

$$\binom{n}{p+1} = \frac{n\,!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} = \frac{n-p}{p+1} \times \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)!} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$$

puis
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \left[1 + \frac{n-p}{p+1}\right]\binom{n}{p} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$
$$= \frac{n+1}{p+1} \times \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!}$$
$$= \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

2. Combinaison

Triangle de Pascal

Un terme du tableau s'obtient en additionnant le terme au-dessus de lui et son voisin de gauche. En d'autres termes, on peut construire de proche en proche chaque ligne du tableau à partir de la précédente.

$$
\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
 & \dots & p & p+1 & \dots \\
\hline
\vdots & & & & \\
n & \dots & \binom{n}{p} \; {\color{red}+} & \binom{n}{p+1} & \dots \\
 & & & {\color{red}\parallel} & \\
n+1 & \dots & \dots & \binom{n+1}{p+1} & \dots \\
\vdots & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Exemples (Somme de combinaisons (facultatif))

1. Partant de $\binom{k}{p}+\binom{k}{p+1}=\binom{k+1}{p+1}$ valable pour tout $k \geqslant p+1$, on déduit $\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$ puis, à l'aide d'une somme téléscopique, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$:

$$\sum_{k=p}^{q}\binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^{q}\left[\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right]$$
$$= 1 + \left[\binom{q+1}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}\right] = \binom{q+1}{p+1}$$

soit
$$\boxed{\sum_{k=p}^{q}\binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}}$$

Exemples (Somme de combinaisons (facultatif))

- Pour $p=1$, on trouve $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}$, soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

- Pour $p=2$, on trouve $\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$, soit

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

puis
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

Exemples (Somme de combinaisons (facultatif))

2. Partant de $\binom{2n}{k-1} + \binom{2n}{k} = \binom{2n+1}{k}$ valable pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, on déduit à l'aide d'une somme téléscopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\binom{2n}{k-1} + \binom{2n}{k}\right] \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^k \binom{2n}{k-1} - (-1)^{k+1} \binom{2n}{k}\right] \\ &= 1 + \left[-1 - (-1)^{n+1} \binom{2n}{n}\right] = (-1)^n \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

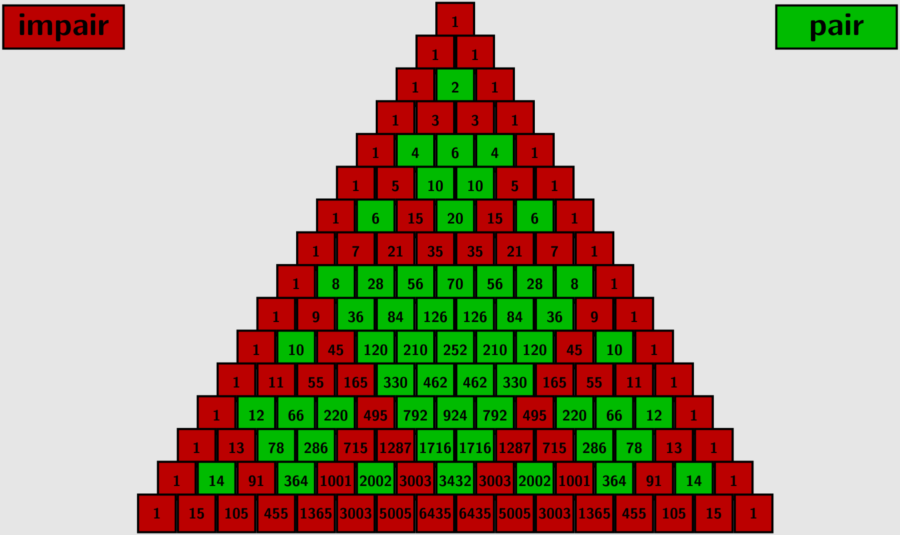
soit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k} = (-1)^n \binom{2n}{n}}$$

Triangle de Pascal (une autre représentation)

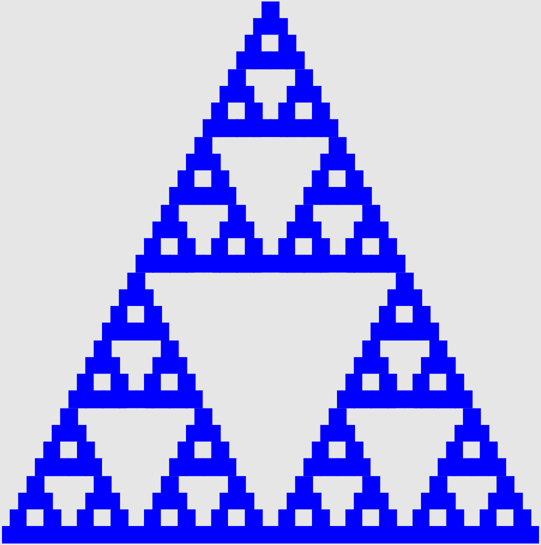
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

En séparant les pairs et impairs...



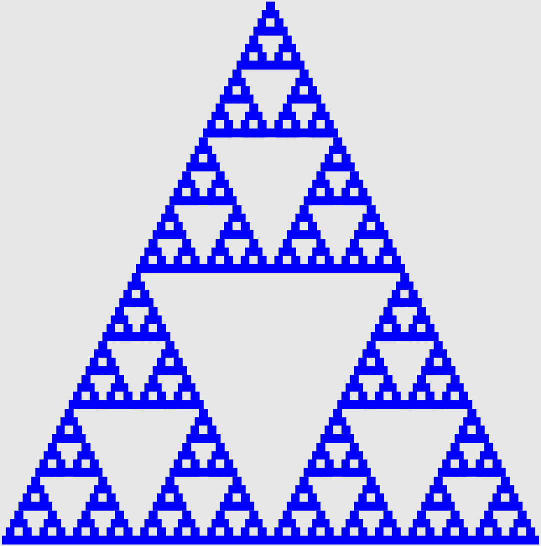
2. Combinaisons : une curiosité (facultatif)

En séparant les pairs et impairs... 32 lignes



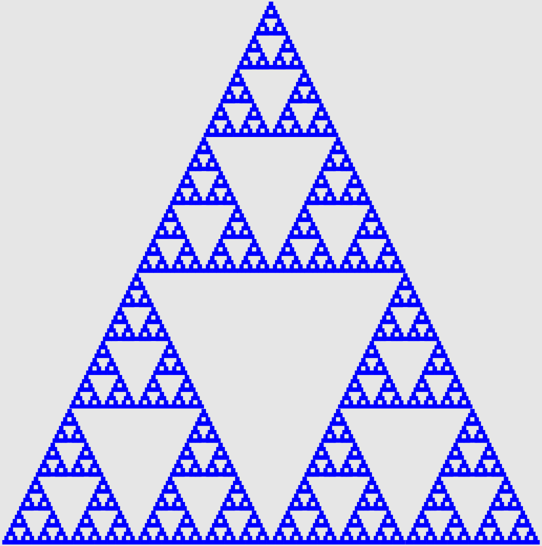
2. Combinaisons : une curiosité (facultatif)

En séparant les pairs et impairs... 64 lignes

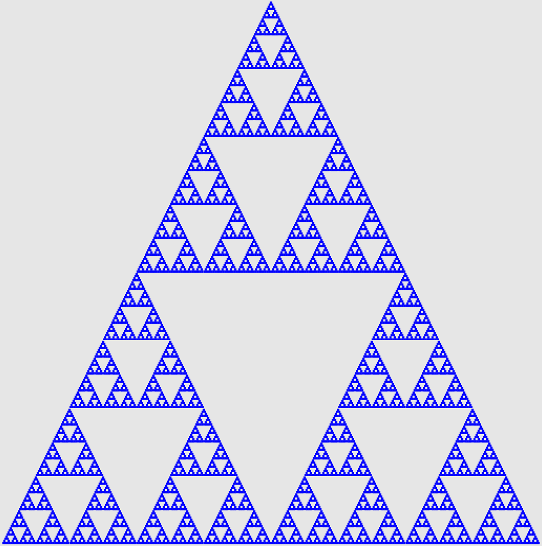


2. Combinaisons : une curiosité (facultatif)

En séparant les pairs et impairs... 128 lignes

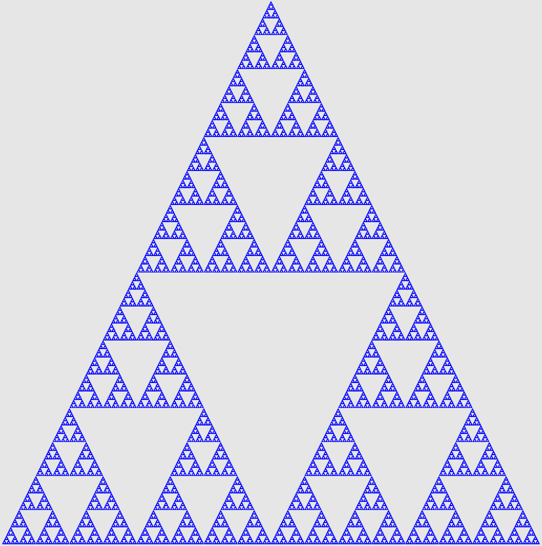


En séparant les pairs et impairs… 256 lignes



2. Combinaisons : une curiosité (facultatif)

À la limite : triangle de Sierpiński...



3. Formule du binôme

3. Formule du binôme

Proposition (Formule du binôme de Newton)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \\ &= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

Remarque

Les combinaisons sont encores appelées **« coefficients binomiaux »**.

3. Formule du binôme

Proposition (Formule du binôme de Newton)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x-y)^n &= \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}xy^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\end{aligned}$$

3. Formule du binôme

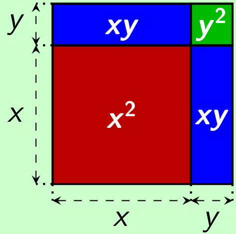
Exemples (Premières identités remarquables)

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

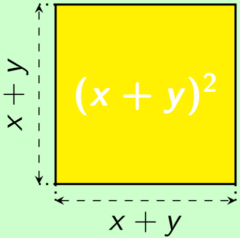
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

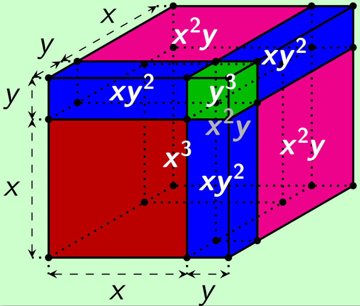
3. Formule du binôme

Exemples (Carré et cube)

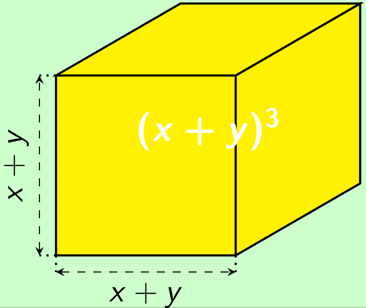


aire



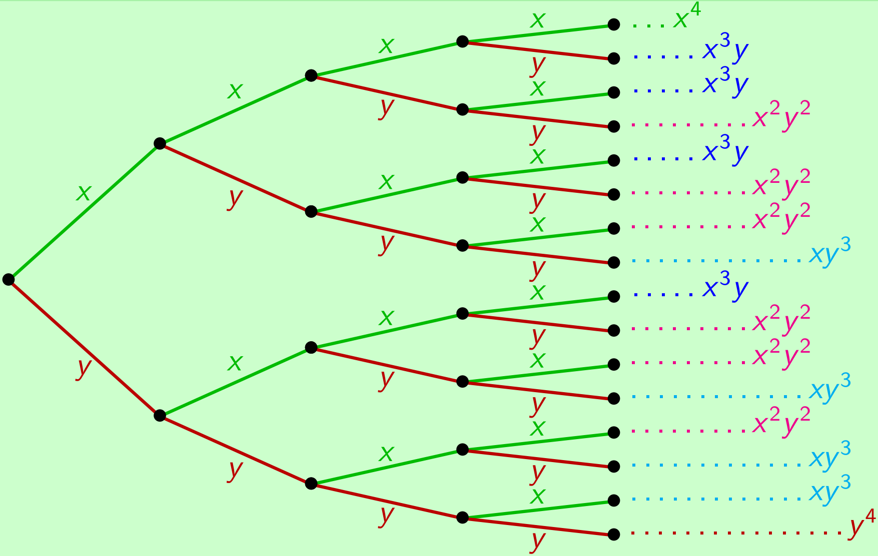


volume



3. Formule du binôme

Exemple (Puissance 4)



Exemple (Dérivée de la fonction puissance)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = x^n$.

Calculons le nombre dérivé $f'(x_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} &= \frac{(x_0+\varepsilon)^n - x_0^n}{\varepsilon} \\
&= \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2}\varepsilon + \cdots + \binom{n}{n} \varepsilon^{n-1} \\
&\underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} n x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

3. Formule du binôme

Exemples

- $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
- $$\begin{aligned}(2x-1)^5 &= (2x)^5 - 5(2x)^4 + 10(2x)^3 - 10(2x)^2 + 5(2x) - 1\\ &= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1\end{aligned}$$
- Déterminons le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$. On écrit tout d'abord
  $$(a-b+2c)^9 = [(a-b)+2c]^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (a-b)^{9-k}(2c)^k.$$
  Le coefficient de c^3 dans la somme précédente vaut $2^3\binom{9}{3}(a-b)^6$ avec $2^3\binom{9}{3} = 8 \times \frac{9\times8\times7}{3\,!} = 672$. Puis
  $$(a-b)^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} (-1)^i a^i b^{6-i}.$$
  Le coefficient de a^4b^2 dans la somme précédente vaut $\binom{6}{4} = 15$. Ainsi, le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$ vaut $15 \times 672 = 10080$.

3. Formule du binôme

Corollaire (Cas particulier)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Exemples (Somme des coefficients binomiaux)

- Pour $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

- Pour $x = -1$ et $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$
$$= (1-1)^n = 0$$

Exemples (Autres sommes (facultatif))

- Partant de $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n\,2^{n-1}$$

- ***Autre méthode.*** En dérivant $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$:

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

et pour $x = 1$, on retrouve :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$$

Exemples (Autres sommes (facultatif))

- Partant de $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

- ***Autre méthode.*** En intégrant $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ de 0 à 1 :

$$\left[\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1$$

on retrouve :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

3. Formule du binôme

Exemples (Calcul numérique approché (facultatif))

Déterminons une valeur approchée de 1.01^{10} à 10^{-3} près.

- $$1.01^{10} = (1+0.01)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 0.01^k$$
  $$= 1 + 10 \times 0.01 + 45 \times 0.01^2 + \varepsilon = 1.1045 + \varepsilon$$
  avec $\varepsilon = \sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} 0.01^k$.
- Remarquant que le plus grand des coefficients binomiaux $\binom{10}{k}$ est $\binom{10}{5} = 252$, on a la majoration
  $$0 < \varepsilon < 252 \times \sum_{k=3}^{10} 0.01^k = 252 \times \frac{0.01^3 - 0.01^{11}}{1-0.01}$$
  $$< 252 \times \frac{0.01^3}{1-0.01} < 252 \times 0.01^3(1 + 2 \times 0.01)$$
  $$< 252 \times 0.00000102 < 0.0003$$
- Ainsi $1.104 < 1.01^{10} < 1.105$. *Valeur exacte : 1.1046221254112045 1001.*

3. Formule du binôme

Exemples (Calcul numérique approché (facultatif))

Déterminons une valeur approchée de 0.99^8 à 10^{-3} près.

- $$0.99^8 = (1-0.01)^8 = \sum_{k=0}^{8}(-1)^k\binom{8}{k}0.01^k$$
  $$= 1 - 8\times 0.01 + 28\times 0.01^2 + \varepsilon = 0.9228 + \varepsilon$$
  avec $\varepsilon = \sum_{k=3}^{8}(-1)^k\binom{8}{k}0.01^k$.
- Remarquant que le plus grand des coefficients binomiaux $\binom{8}{k}$ est $\binom{8}{4} = 70$, on a la majoration
  $$0 < |\varepsilon| < 70\times\sum_{k=3}^{8}0.01^k = 70\times\frac{0.01^3-0.01^9}{1-0.01}$$
  $$< 70\times\frac{0.01^3}{1-0.01} < 70\times 0.01^3(1+2\times 0.01)$$
  $$< 70\times 0.00000102 < 0.00008$$
- Ainsi $0.922 < 0.99^8 < 0.923$. *Valeur exacte : 0.9227446944279201.*

4. Applications trigonométriques

4. Applications trigonométriques

Application 1 : linéarisation

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut transformer $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ comme combinaison linéaire de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Méthode :

- **Formules d'Euler :** on écrit $\begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{cases}$
- **Formule du binôme :** on développe
$$(e^{ix} \pm e^{-ix})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k (\pm e^{-ix})^{n-k}$$
- **Formule de De Moivre :** on écrit
$$(e^{ix})^k (e^{-ix})^{n-k} = e^{i(2k-n)x}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$
- **Formules d'Euler :** on rassemble les e^{ikx}, $k \in \{-n, -n+2, \ldots, n\}$ deux à deux conjuguées : $\begin{cases} e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos(kx) \\ e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i\sin(kx) \end{cases}$

Exemple (Puissance 3)

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left[\tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right]^3 \\
&= \tfrac{1}{8}\left[(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\right] \\
&= \tfrac{1}{8}\left[e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right] \\
&= \tfrac{1}{8}\left[2\cos(3x) + 3 \times 2\cos(x)\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\cos(3x) + \tfrac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left[\tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right]^3 \\
&= \tfrac{1}{-8i}\left[(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(-e^{-ix}) + 3(e^{ix})(-e^{-ix})^2 + (-e^{-ix})^3\right] \\
&= -\tfrac{1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right] \\
&= -\tfrac{1}{8i}\left[2i\sin(3x) - 3 \times 2i\sin(x)\right] \\
&= -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

4. Applications trigonométriques

Exemple (Puissance 4)

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left[\tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right]^4 \\
&= \tfrac{1}{16}\left[(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4(e^{ix})(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right] \\
&= \tfrac{1}{16}\left[e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right] \\
&= \tfrac{1}{16}\left[2\cos(4x) + 4 \times 2\cos(2x) + 6\right] \\
&= \tfrac{1}{8}\cos(4x) + \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{3}{8}
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \cos^4(x)dx &= \int \left(\tfrac{1}{8}\cos(4x) + \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{3}{8}\right) dx \\
&= \tfrac{1}{8}\int \cos(4x)dx + \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)dx + \tfrac{3}{8}\int dx \\
&= \tfrac{1}{32}\sin(4x) + \tfrac{1}{4}\sin(2x) + \tfrac{3}{8}x + \mathit{Constante}
\end{aligned}$$

4. Applications trigonométriques

Exemple (Puissance 4)

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right]^4 \\
&= \frac{1}{16}\left[(e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 - 4(e^{ix})(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[2\cos(4x) - 4 \times 2\cos(2x) + 6\right] \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(x)dx &= \int \left(\frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\right)dx \\
&= \frac{1}{8}\int \cos(4x)dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx + \frac{3}{8}\int dx \\
&= \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + \textit{Constante}
\end{aligned}$$

Exemple (Puissance 5)

$$\begin{aligned}
\cos^5(x) &= \left[\tfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right]^5 \\
&= \tfrac{1}{32}\Big[(e^{ix})^5 + 5(e^{ix})^4(e^{-ix}) + 10(e^{ix})^3(e^{-ix})^2 \\
&\quad + 10(e^{ix})^2(e^{-ix})^3 + 5(e^{ix})(e^{-ix})^4 + (e^{-ix})^5\Big] \\
&= \tfrac{1}{32}\left[e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right] \\
&= \tfrac{1}{32}\left[2\cos(5x) + 5\times 2\cos(3x) + 10\times 2\cos(x)\right] \\
&= \tfrac{1}{16}\cos(5x) + \tfrac{5}{16}\cos(3x) + \tfrac{5}{8}\cos(x)
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(x)\mathrm{d}x &= \int \left(\tfrac{1}{16}\cos(5x) + \tfrac{5}{16}\cos(3x) + \tfrac{5}{8}\cos(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{16}\int \cos(5x)\mathrm{d}x + \tfrac{5}{16}\int \cos(3x)\mathrm{d}x + \tfrac{5}{8}\int \cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{80}\sin(5x) + \tfrac{5}{48}\sin(3x) + \tfrac{5}{8}\sin(x) + \mathit{Constante}
\end{aligned}$$

4. Applications trigonométriques

Exemple (Puissance 5)

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right]^5 \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\Big[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^5 - 5(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) + 10(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 \\
&\quad - 10(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3 + 5(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4 - (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^5\Big] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{32}\left[\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 10\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{32}\left[2\mathrm{i}\sin(5x) - 5 \times 2\mathrm{i}\sin(3x) + 10 \times 2\mathrm{i}\sin(x)\right] \\
&= \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x)
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(x)\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\int \sin(5x)\mathrm{d}x - \frac{5}{16}\int \sin(3x)\mathrm{d}x + \frac{5}{8}\int \sin(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{80}\cos(5x) + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{5}{8}\cos(x) + \mathit{Constante}
\end{aligned}$$

4. Applications trigonométriques

Application 2 : anti-linéarisation

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut transformer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ comme polynôme de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$ de degré n.

<u>**Méthode :**</u>

- **Exponentielle complexe :** on écrit $\begin{cases} \cos(nx) & = \Re e(e^{inx}) \\ \sin(nx) & = \Im m(e^{inx}) \end{cases}$
- **Formule de De Moivre :** on écrit
$$e^{inx} = (e^{ix})^n = [\cos(x) + i\sin(x)]^n$$
- **Formule du binôme :** on développe
$$[\cos(x) + i\sin(x)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\cos(x)]^{n-k} [i\sin(x)]^k$$
- **Parties réelles/imaginaires :** on obtient un polynôme de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Avec $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, les puissances paires (resp. impaires) de $\sin(x)$ peuvent s'exprimer comme polynômes de $\cos(x)$ (resp. $\sin(x)\times$polynômes de $\cos(x)$).

4. Applications trigonométriques

Exemple (Angle triple)

Partant de

$$\begin{aligned}
e^{i(3x)} &= (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\
&= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)[i\sin(x)] + 3\cos(x)[i\sin(x)]^2 + [i\sin(x)]^3 \\
&= \left[\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)\right] + i\left[3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right] \\
&= \left[\cos^3(x) - 3\cos(x)(1-\cos^2(x))\right] \\
&\quad + i\left[3\sin(x)(1-\sin^2(x)) - \sin^3(x)\right] \\
&= \left[4\cos^3(x) - 3\cos(x)\right] + i\left[3\sin(x) - 4\sin^3(x)\right]
\end{aligned}$$

on déduit
$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \Re e\left(e^{i(3x)}\right) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\
\sin(3x) &= \Im m\left(e^{i(3x)}\right) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
\end{aligned}$$

$\cos(3x) = P(\cos(x))$ et $\sin(3x) = -P(\sin(x))$ avec $P(X) = 4X^3 - 3X$.

4. Applications trigonométriques

Exemple (Angle quadruple)

Partant de

$$
\begin{aligned}
e^{i(4x)} &= (e^{ix})^4 = (\cos(x) + i\sin(x))^4 \\
&= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)[i\sin(x)] + 6\cos^2(x)[i\sin(x)]^2 \\
&\quad + 4\cos(x)[i\sin(x)]^3 + [i\sin(x)]^4 \\
&= \left[\cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)\right] \\
&\quad + i\left[4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)\right] \\
&= \left[\cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (1-\cos^2(x))^2\right] \\
&\quad + 4i\sin(x)\left[\cos^3(x) - \cos(x)(1-\cos^2(x))\right] \\
&= \left[8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1\right] + i\,4\sin(x)\left[2\cos^3(x) - \cos(x)\right]
\end{aligned}
$$

on déduit

$$
\begin{aligned}
\cos(4x) &= \Re e\left(e^{i(4x)}\right) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 \\
\sin(4x) &= \Im m\left(e^{i(4x)}\right) = 4\sin(x)\left[2\cos^3(x) - \cos(x)\right]
\end{aligned}
$$

4. Applications trigonométriques

Exemple (Angle quintuple)

Partant de $e^{i(5x)} = (e^{ix})^5 = (\cos(x) + i\sin(x))^5$:

$$\begin{aligned}
e^{i(5x)} = \; & \cos^5(x) + 5\cos^4(x)[i\sin(x)] + 10\cos^3(x)[i\sin(x)]^2 \\
& + 10\cos^2(x)[i\sin(x)]^3 + 5\cos(x)[i\sin(x)]^4 + [i\sin(x)]^5 \\
= \; & \left[\cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x)\right] \\
& + i\left[5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)\right] \\
= \; & \left[\cos^5(x) - 10\cos^3(x)(1-\cos^2(x)) + 5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2\right] \\
& + i\sin(x)\left[5(1-\sin^2(x))^2 - 10\sin^2(x)(1-\sin^2(x)) + \sin^4(x)\right] \\
= \; & \left[16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)\right] \\
& + i\left[16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)\right]
\end{aligned}$$

on déduit

$$\cos(5x) = \Re e\left(e^{i(5x)}\right) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$$

$$\sin(5x) = \Im m\left(e^{i(5x)}\right) = 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$$

5. Application aux probabilités

5. Application aux probabilités (facultatif)

Définition (Loi binomiale)

*Considérons un **schéma de Bernoulli** constitué de n répétitions d'épreuves indépendantes de Bernoulli à deux issues possibles 1 et 0 avec probabilités respectives p et $q = 1 - p$ ($p \in [0, 1]$ étant un nombre fixé).*

Notons X le nombre d'apparitions de « 1 ».
*X est une **variable aléatoire** prenant les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$.*

Dans l'arbre binaire des successions d'épreuves, un chemin comportant k issues « 1 » (et donc $(n - k)$ issues « 0 ») est suivi avec probabilité $p^k q^{n-k}$. De plus, il y a $\binom{n}{k}$ tels chemins.

Ainsi $$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n\}.}$$

*On dit que la v.a. X suit la **loi binomiale de paramètres n et p**.*

5. Application aux probabilités (facultatif)

Proposition (Espérance)

*L'**espérance** de X est donnée par* $\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$

En effet :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

À l'aide de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(x+1)^{n-1}$ (dérivée de $(x+1)^n$) et en rappelant que $p+q=1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = pq^{n-1} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} = npq^{n-1}\left(\frac{p}{q}+1\right)^{n-1} = np.$$

Proposition (Variance)

*La **variance** de X est donnée par* $\boxed{\mathbb{V}(X) = npq}$

En effet : calculons d'abord

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

À l'aide de $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(x+1)^{n-2}$ (dérivée seconde de $(x+1)^n$) et en rappelant que $p+q=1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p^2 q^{n-2} \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-2}$$
$$= n(n-1)p^2 q^{n-2}\left(\frac{p}{q}+1\right)^{n-2} = n(n-1)p^2$$

puis $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$

$$= n(n-1)p^2 - np + n^2p^2 = np(1-p).$$