INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Carrés magiques d'ordre 3

I

Carrés d'ordre 3 et culture

I – Carrés d'ordre 3 et culture

Apparition en Chine : ~ 650 av. J.-C.

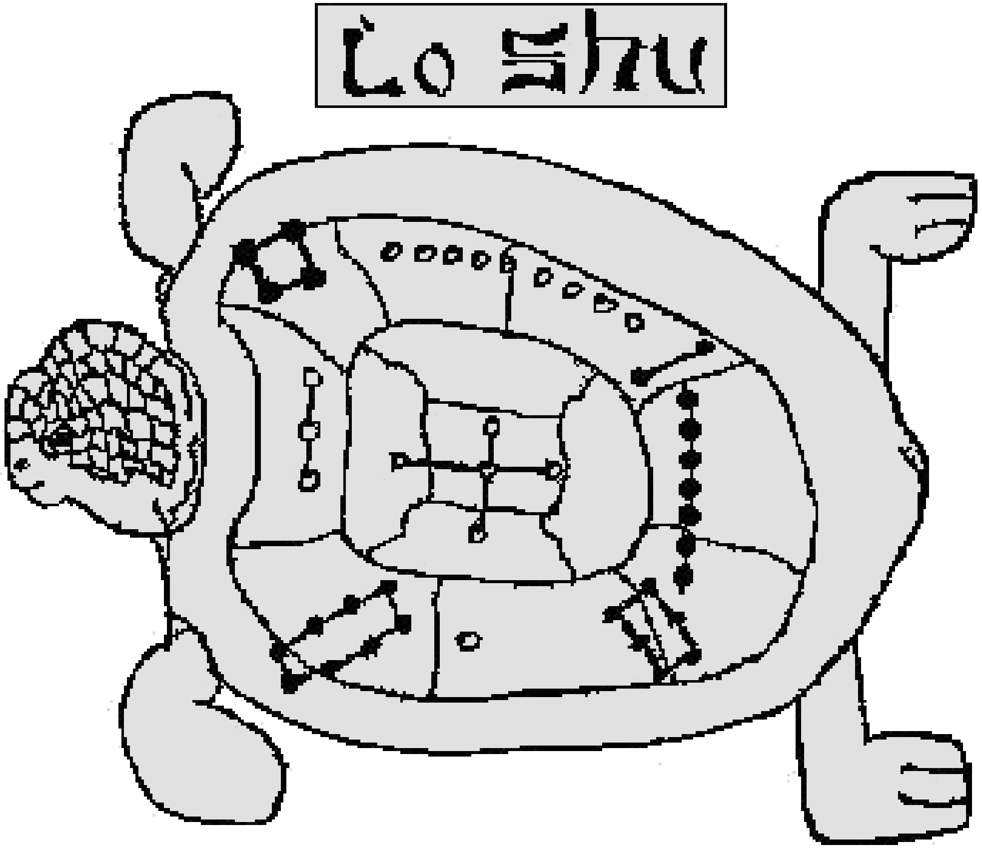
→ *Légende de « Luo Shu »*
(Le Livre de la rivière Luo – 洛書
~ 2200 av. J.-C.)

肆	玖	貳
參	伍	柒
捌	壹	陸

→

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Carré « Lo Shu »



I – Carrés d'ordre 3 et culture

Apparition en Chine : ~ 650 av. J.-C.

→ *Légende de « Luo Shu »*

(Le Livre de la rivière Luo – 洛書 ,
~ 2200 av. J.-C.)

4	+	9	+	2	=	15
3	+	5	+	7	=	15
8	+	1	+	6	=	15

I – Carrés d'ordre 3 et culture

Apparition en Chine : ~ 650 av. J.-C.

→ *Légende de « Luo Shu »*

*(Le Livre de la rivière Luo – 洛書 ,
~ 2200 av. J.-C.)*

4 + 9 + 2	=	15
3 + 5 + 7	=	15
8 + 1 + 6	=	15

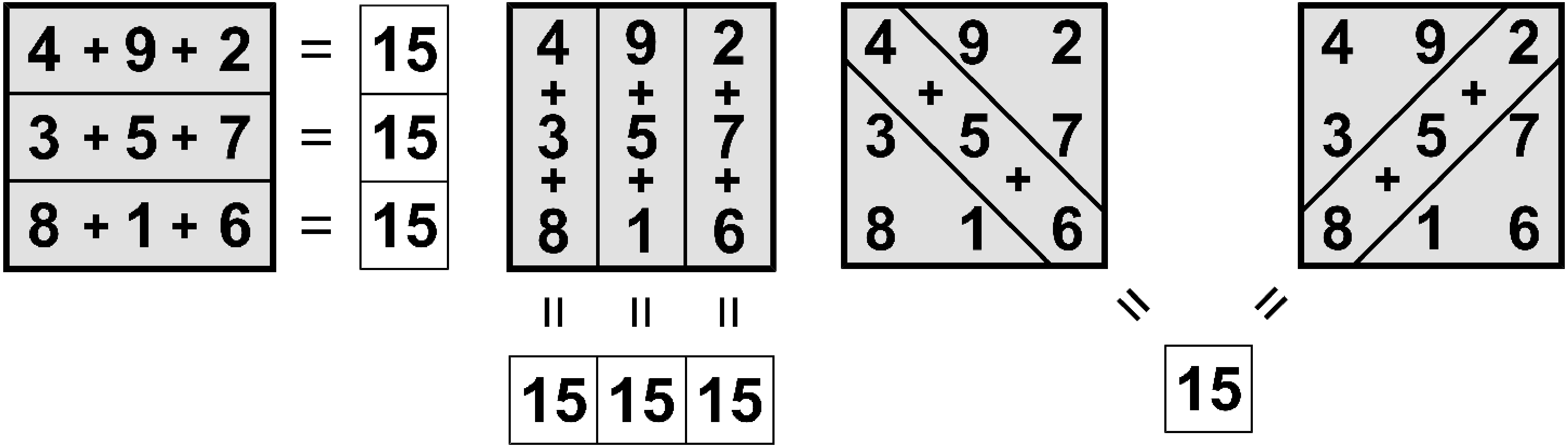
4 + 3 + 8	9 + 5 + 1	2 + 7 + 6
‖	‖	‖
15	15	15

I – Carrés d'ordre 3 et culture

Apparition en Chine : ~ 650 av. J.-C.

→ *Légende de « Luo Shu »*

(Le Livre de la rivière Luo – 洛書 ,
~ 2200 av. J.-C.)



II

Résolution complète

II – Résolution complète

Données

X_1	X_2	X_3
X_4	X_5	X_6
X_7	X_8	X_9

II – Résolution complète

Conditions pour avoir un carré magique de somme S

Lignes

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=S \\ x_4+x_5+x_6=S \\ x_7+x_8+x_9=S \end{cases}$$

Colonnes

$$\begin{cases} x_1+x_4+x_7=S \\ x_2+x_5+x_8=S \\ x_3+x_6+x_9=S \end{cases}$$

Diagonales

$$\begin{cases} x_1+x_5+x_9=S \\ x_3+x_5+x_7=S \end{cases}$$

II – Résolution complète

Système linéaire (8 équations, 9 inconnues)

$$
\begin{array}{l}
E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \\ E_7 \\ E_8
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{lllllllllr}
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & & & = S \\
 & & & x_4 & +x_5 & +x_6 & & & & = S \\
 & & & & & & x_7 & +x_8 & +x_9 & = S \\
x_1 & & & +x_4 & & & +x_7 & & & = S \\
 & x_2 & & & +x_5 & & & +x_8 & & = S \\
 & & x_3 & & & +x_6 & & & +x_9 & = S \\
x_1 & & & & +x_5 & & & & +x_9 & = S \\
 & & x_3 & & +x_5 & & +x_7 & & & = S
\end{array}
\right.
$$

II – Résolution complète

Permutations et combinaisons des équations

$$
\begin{array}{llllllllllll}
E_1' = E_4 & x_1 & & & +x_4 & & & +x_7 & & & = S \\
E_2' = E_5 & & x_2 & & & +x_5 & & & +x_8 & & = S \\
E_3' = E_6 & & & x_3 & & & +x_6 & & & +x_9 & = S \\
E_4' = E_2 & & & & x_4 & +x_5 & +x_6 & & & & = S \\
E_5' = E_1 - E_4 - E_5 - E_6 & & & & x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & +x_9 & = 2S \\
E_6' = E_7 + E_5 + E_6 - E_1 & & & & & 2x_5 & +x_6 & & +x_8 & +2x_9 & = 2S \\
E_7' = E_8 - E_6 & & & & & x_5 & -x_6 & +x_7 & & -x_9 & = 0 \\
E_8' = E_3 & & & & & & & x_7 & +x_8 & +x_9 & = S
\end{array}
$$

II – Résolution complète

Permutations et combinaisons des équations

$$
\begin{array}{ll}
E_1'' = E_1' & x_1 + x_4 + x_7 = S \\
E_2'' = E_2' & x_2 + x_5 + x_8 = S \\
E_3'' = E_3' & x_3 + x_6 + x_9 = S \\
E_4'' = E_4' & x_4 + x_5 + x_6 = S \\
E_5'' = E_7' & x_5 - x_6 + x_7 - x_9 = 0 \\
E_6'' = E_6' - 2\times E_7' & 3x_6 - 2x_7 + x_8 + 4x_9 = 2S \\
E_7'' = E_8' & x_7 + x_8 + x_9 = S \\
E_8'' = E_5' - E_4' & x_7 + x_8 + x_9 = S
\end{array}
$$

II – Résolution complète

Inconnues 2daires : x_8, x_9 — Équation 2daire : E_8''' — Rang=7

$E_1''' = E_1''$ $\quad x_1 + x_4 + x_7 = S$

$E_2''' = E_2''$ $\quad x_2 + x_5 = S - x_8$

$E_3''' = E_3''$ $\quad x_3 + x_6 = S - x_9$

$E_4''' = E_4''$ $\quad x_4 + x_5 + x_6 = S$

$E_5''' = E_5''$ $\quad x_5 - x_6 + x_7 = x_9$

$E_6''' = E_6''$ $\quad 3x_6 - 2x_7 = 2S - x_8 - 4x_9$

$E_7''' = E_7''$ $\quad x_7 = S - x_8 - x_9$

$E_8''' = E_8'' - E_7''$ $\quad 0 = 0$

II – Résolution complète

Résolution de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 et x_7

$$\begin{cases}
x_1 = S - x_4 - x_7 \\
x_2 = S - x_5 - x_8 \\
x_3 = S - x_6 - x_9 \\
x_4 = S - x_5 - x_6 \\
x_5 = x_6 - x_7 + x_9 \\
x_6 = \frac{2}{3}S + \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{4}{3}x_9 \\
x_7 = S - x_8 - x_9
\end{cases}$$

II – Résolution complète

Substitution progressive en fonction de x_8 et x_9

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}S - x_9 \\ x_2 = \frac{2}{3}S - x_8 \\ x_3 = -\frac{1}{3}S + x_8 + x_9 \\ x_4 = -\frac{2}{3}S + x_8 + 2x_9 \\ x_5 = \frac{1}{3}S \\ x_6 = \frac{4}{3}S - x_8 - 2x_9 \\ x_7 = S - x_8 - x_9 \end{cases}$$

II – Résolution complète

→ Infinité de solutions dépendant de x_8, x_9 et S

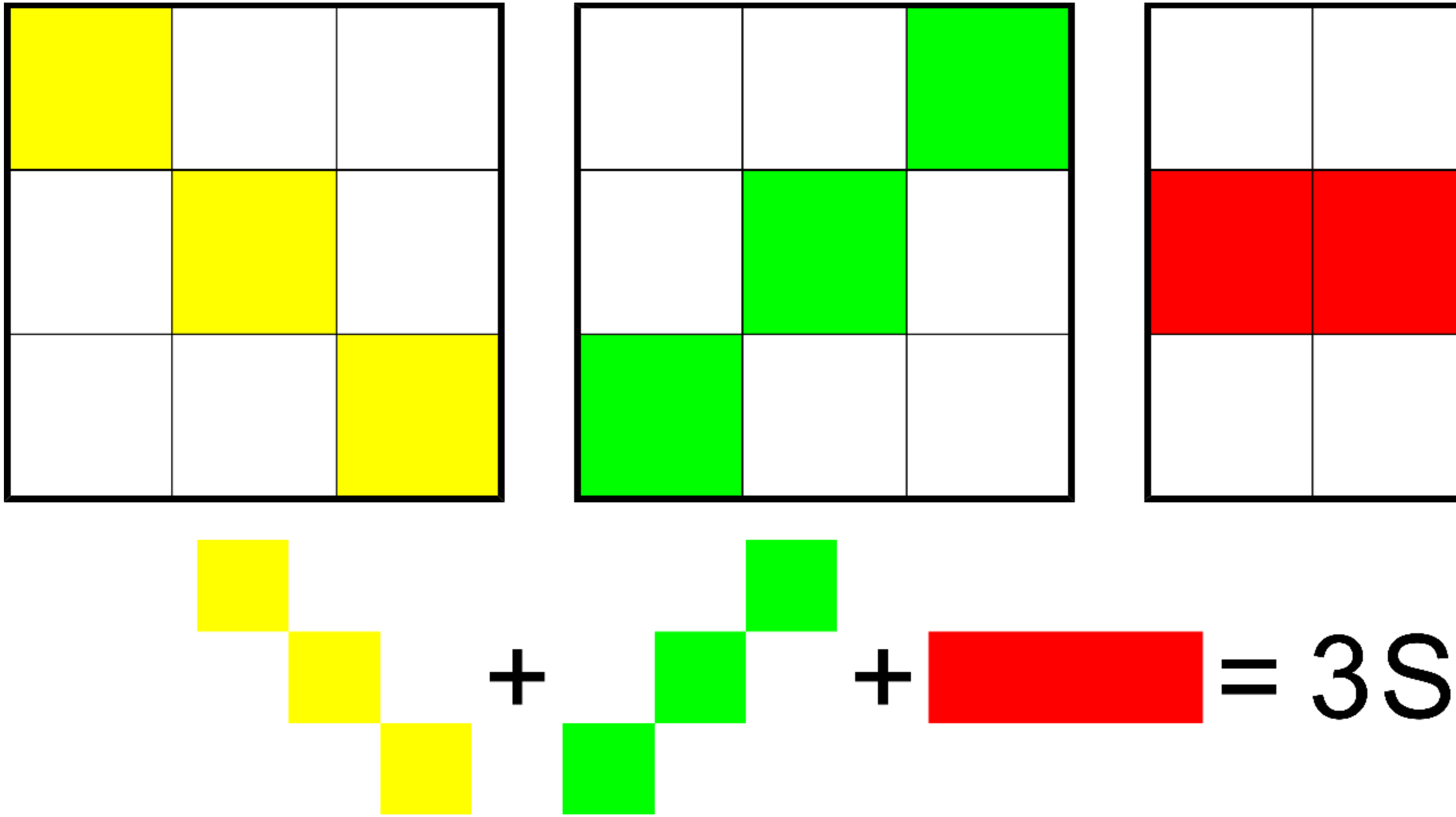
$\frac{2}{3}S - x_9$	$\frac{2}{3}S - x_8$	$-\frac{1}{3}S + x_8 + x_9$
$-\frac{2}{3}S + x_8 + 2x_9$	$\frac{1}{3}S$	$\frac{4}{3}S - x_8 - 2x_9$
$S - x_8 - x_9$	x_8	x_9

Remarque 1

La somme magique S
vaut nécessairement $3x_5$
et le terme central est $\boxed{S/3}$

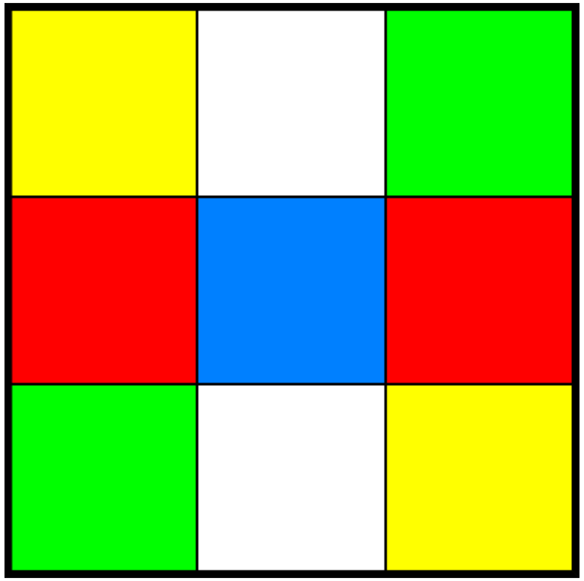
II – Résolution complète

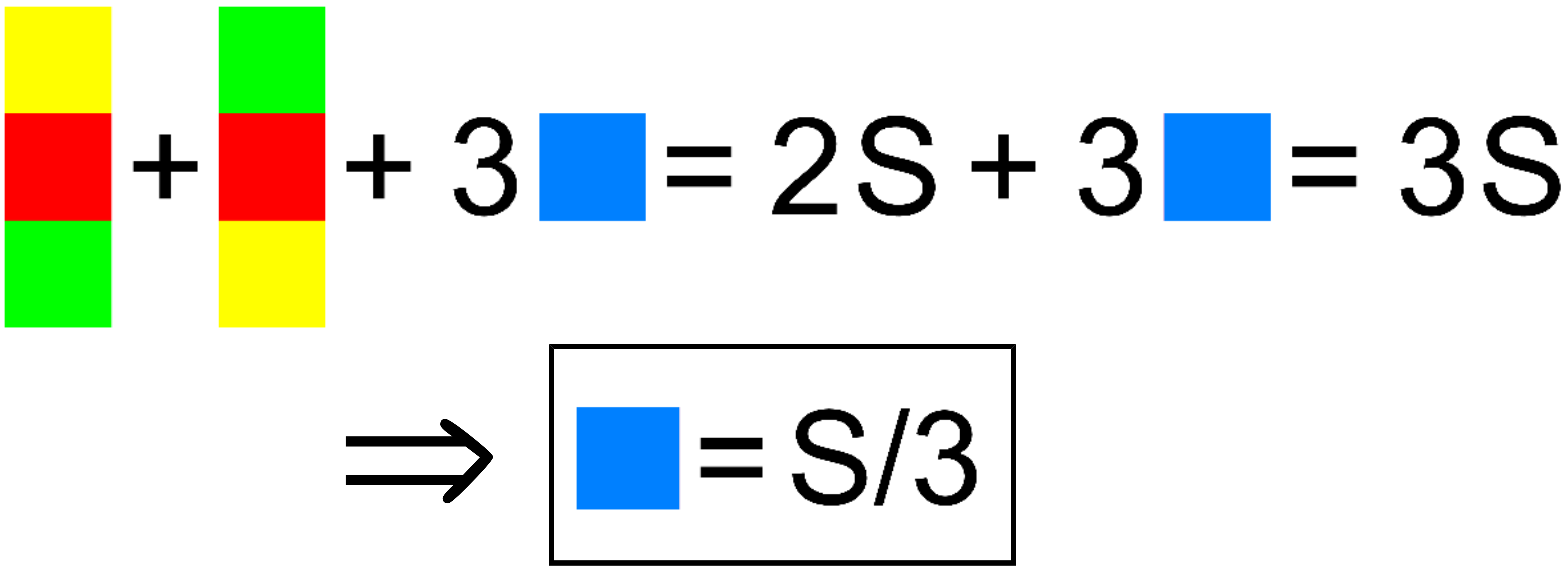
Une explication en couleurs



II – Résolution complète

Une explication en couleurs





Remarque 2

Équation 2^daire^ : $\boxed{E_8''' = 0}$

Or $E_8''' = E_8'' - E_7''$

$= E_5' - E_4' - E_8'$

$= E_1 + E_2 + E_3 - E_4 - E_5 - E_6$

D'où : $\boxed{E_1 + E_2 + E_3 - E_4 - E_5 - E_6 = 0}$

III

Une méthode de construction

III – Une méthode de construction

Remplissage progressif

	a	

À partir du paramètre central
→ **a**

III – Une méthode de construction

Remplissage progressif

a+b		
	a	
		a–b

2 paramètres

→ **a,b**

III – Une méthode de construction

Remplissage progressif

a+b		a+c
	a	
a–c		a–b

3 paramètres
→ **a,b,c**

III – Une méthode de construction

Remplissage progressif

a+b	a–b–c	a+c
	a	
a–c		a–b

3 paramètres
→ **a,b,c**

III – Une méthode de construction

Remplissage progressif

a+b	a–b–c	a+c
	a	
a–c	a+b+c	a–b

3 paramètres
→ **a,b,c**

III – *Une méthode de construction*

Remplissage progressif

a+b	a–b–c	a+c
a–b+c	a	
a–c	a+b+c	a–b

3 paramètres
→ **a,b,c**

III – Une méthode de construction

Remplissage progressif

a+b	a–b–c	a+c
a–b+c	a	a+b–c
a–c	a+b+c	a–b

3 paramètres
→ **a,b,c**

III – Une méthode de construction

Une représentation à trois paramètres

a+b	a–b–c	a+c
a–b+c	a	a+b–c
a–c	a+b+c	a–b

Carré
de somme
magique 3a

→ *Espace vectoriel de dimension **3***

III – Une méthode de construction

Une décomposition

$$a \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} + b \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline\end{array} + c \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Carré magique *trivial* de somme **3a**	Carré magique *symétrique* de somme **0**	Carré magique *antisymétrique* de somme **0**

III – Une méthode de construction

Un mathématicien

Édouard Lucas (1842–1891)

Mathématicien français.

→ *« Récréations mathématiques »* *(1882–1894)*

→ *Forme générale des carrés d'ordre 3*

IV

Carrés d'ordre 3 normaux

IV – Carrés d'ordre 3 normaux

Avec les chiffres de 1 à 9…

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Un carré normal de somme 15

IV – Carrés d'ordre 3 normaux

Avec les chiffres de 1 à 9…

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Il y a 8 carrés magiques normaux d'ordre 3

(obtenus par rotations et symétries)

MERCI
DE
VOTRE ATTENTION !

Diaporama complet disponible sur

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/carres_magiques_diaporama.pdf