Intégrale de Gauss

Sommaire

1. Intégrales de Wallis

1. Intégrales de Wallis

On introduit la suite des ***intégrales de Wallis***

$$\boxed{W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.}$$

John Wallis, 1616–1703

1. Intégrales de Wallis

Les valeurs $W_0 = 1$, $W_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et la relation de récurrence $W_n = \dfrac{n-1}{n}\, W_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, fournissent les écritures explicites

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

La formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$$

donne alors

$$W_{2p} \text{ et } W_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

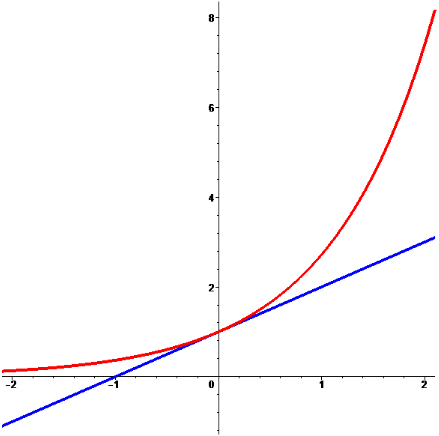
soit :

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

2. Un encadrement

2. Un encadrement

1. La fonction exponentielle étant convexe, sa courbe se situe au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geqslant 1 + t$.



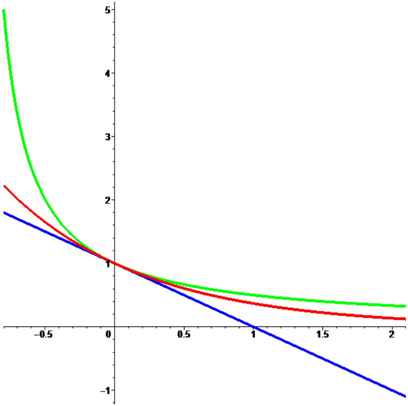
2. Un encadrement

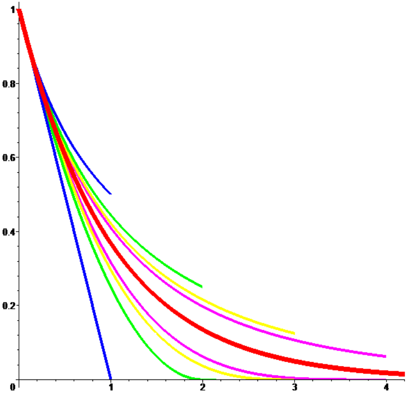
1. La fonction exponentielle étant convexe, sa courbe se situe au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \geqslant 1 + t$.

   - En changeant t en $-t$, on obtient $e^{-t} \geqslant 1 - t$.
   - Avec $e^{-t} = \dfrac{1}{e^t}$, on obtient $\forall t \in \left]-1, +\infty\right[$, $e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$; d'où
   $$\forall t \in \left]-1, +\infty\right[, \quad 1 - t \leqslant e^{-t} \leqslant \frac{1}{1+t}.$$
   - En écrivant $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} = \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n$ on obtient
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, n], \quad 0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \leqslant \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}.$$

2. Un encadrement

1. La fonction exponentielle étant convexe, sa courbe se situe au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$.

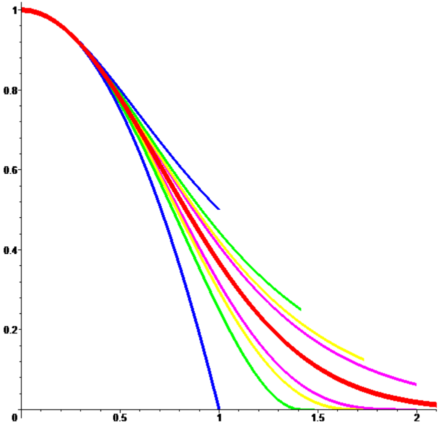




2. Un encadrement

2. En remplaçant t par x^2, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[0, \sqrt{n}\right], \quad 0 \leqslant \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$



3. Deux calculs d’intégrale

3. Deux calculs d'intégrale

1. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(\theta)$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2(\theta)\right)^n \cos(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta)\mathrm{d}\theta = \sqrt{n}\, W_{2n+1}.$$

3. Deux calculs d'intégrale

2. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(\theta)$ et en utilisant $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^A \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x &= \sqrt{n} \int_0^{\arctan(A/\sqrt{n})} \left(1 + \tan^2(\theta)\right)^{-n} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)} \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\arctan(A/\sqrt{n})} \cos^{2n-2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{n}\, W_{2n-2}.
\end{aligned}$$

4. Le dénouement

4. Le dénouement

On en déduit l'encadrement

$$\forall A \in [\sqrt{n}, +\infty[, \quad \sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \int_0^A e^{-x^2}\, dx \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}.$$

L'équivalence $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ entraîne

$$W_{2n+1} \text{ et } W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_{2n-2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d'où la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x^2}\, dx$ notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Théorème (Intégrale de Gauss)

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Carl Friedrich Gauss, 1777–1855

4. Une démonstration fonctionnelle

Bonus track : une autre démonstration

Posons pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\boxed{\psi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}\,dt.}$$

1. On a
$$\psi(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
2. On a, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $t \in [0, 1]$,
$$0 \leqslant \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} \leqslant e^{-x}$$
puis $0 \leqslant \psi(x) \leqslant e^{-x}$ qui entraîne que
$$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 0.$$

Bonus track : une autre démonstration

3. La dérivée de ψ est donnée par

$$\psi'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x}\,\mathrm{d}t.$$

En effet, posons :

$$\Delta_x(h) = \frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)h}-1}{(t^2+1)h}\right)\mathrm{d}t.$$

Bonus track : une autre démonstration

3. De l'encadrement obtenu précédemment

$$\forall u \in \left]-1,+\infty\right[, \quad 1-u \leqslant \mathrm{e}^{-u} \leqslant \frac{1}{1+u}$$

on tire

$$\forall u \in \left]0,+\infty\right[, \quad -1 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u} \leqslant -\frac{1}{1+u} \leqslant -1+u$$

encadrement duquel on déduit

$$-\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x}\,\mathrm{d}t \leqslant \Delta_x(h) \leqslant -\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x}\,\mathrm{d}t + A(x)h$$

où l'on a posé $A(x) = \displaystyle\int_0^1 (t^2+1)\mathrm{e}^{-(t^2+1)x}\,\mathrm{d}t$.

Notons que $0 \leqslant A(x) \leqslant 2$. D'où

$$\lim_{h\to 0} \Delta_x(h) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x}\,\mathrm{d}t.$$

Bonus track : une autre démonstration

4. Posons $\chi(x) = \psi(x^2)$ et $I(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.
   - On a
   $$\chi'(x) = 2x\,\psi'(x^2) \quad \text{et} \quad I'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$
   Remarquons, à l'aide du changement de variable $u = tx$, que
   $$\psi'(x^2) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$
   Donc
   $$\chi'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2I(x)I'(x) = -(I^2)'(x)$$
   La fonction $\chi + I^2$ a donc une dérivée nulle, elle est constante :
   $$\forall x \in \,]0, +\infty], \quad \chi(x) + I(x)^2 = \chi(0) + I(0)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Bonus track : une autre démonstration

4

- Passons à la limite en $+\infty$ dans la relation $\chi(x) + I(x)^2 = \frac{\pi}{4}$:

  puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi(x) = 0$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} I(x)^2 = \frac{\pi}{4},$$

  puis, $I(x)$ étant évidemment positif :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

4. Une démonstration bidimensionnelle

Bonus track : encore une autre démonstration

Posons pour tout $A \in [0, +\infty[$:

$$\boxed{I(A) = \int_0^A e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-A}^{A} e^{-x^2}\,dx.}$$

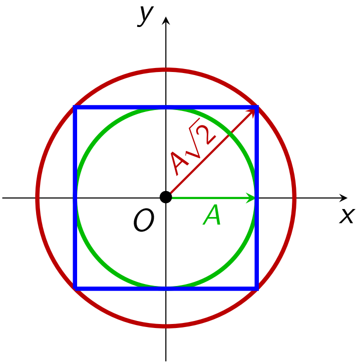
1. On élève au carré et on introduit une intégrale double :

$$I(A)^2 = \frac{1}{4}\left(\int_{-A}^{A} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{1}{4}\int_{-A}^{A} e^{-x^2}\,dx \times \int_{-A}^{A} e^{-y^2}\,dy$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A} e^{-x^2} \times e^{-y^2}\,dx dy = \frac{1}{4}J(A)$$

où $J(A) = \iint_{\mathcal{C}_A} e^{-(x^2+y^2)}\,dx dy$ et $\mathcal{C}_A$ est le carré $[-A, A] \times [-A, A]$.

Bonus track : encore une autre démonstration

2. On encadre le carré $\mathcal{C}_A$ par des disques $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_{A\sqrt{2}}$ de centre O et de rayons respectifs A et $A\sqrt{2}$, puis on encadre $J(A)$ par les deux intégrales correspondantes :



$$\iint_{\mathcal{D}_A} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant J(A) \leqslant \iint_{\mathcal{D}_{A\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

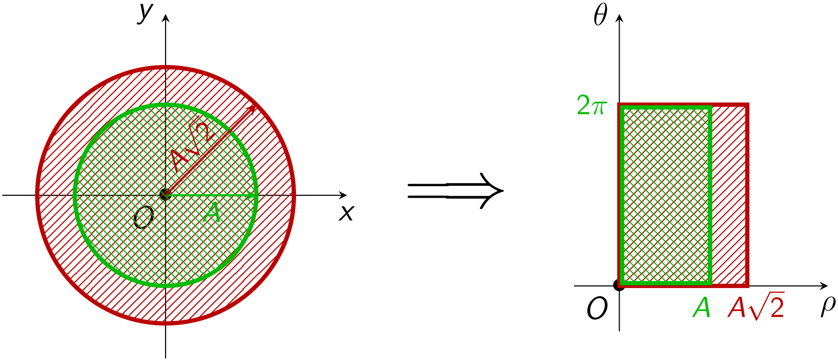
Bonus track : encore une autre démonstration

3. Passons en coordonnées polaires :

$$(x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

Les disques $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_{A\sqrt{2}}$ se transforment en les rectangles

$$\mathcal{R}_A = [0, A] \times [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{A\sqrt{2}} = [0, A\sqrt{2}\,] \times [0, 2\pi].$$



Bonus track : encore une autre démonstration

3. On obtient :

$$\iint_{\mathcal{D}_A} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}_A} \mathrm{e}^{-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^A \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^A \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\right]_0^A$$

$$= \pi\left(1-\mathrm{e}^{-A^2}\right).$$

De même : $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}_{A\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\left(1-\mathrm{e}^{-2A^2}\right).$

D'où l'encadrement

$$\pi\left(1-\mathrm{e}^{-A^2}\right) \leqslant J(A) \leqslant \pi\left(1-\mathrm{e}^{-2A^2}\right).$$

Puis en passant à la limite lorsque $A \to +\infty$: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} J(A) = \pi$,

soit, puisque $I(A) = \dfrac{1}{2}\sqrt{J(A)}$: $\boxed{\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I(A) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

5. Lois gaussiennes

5. Lois gaussiennes

Théorème (Intégrale de Gauss)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

N.B. Notation : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B$

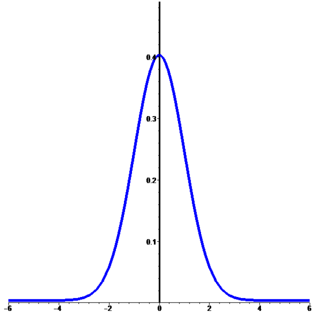
Application : densité de probabilité de la « loi de Gauss standard » (ou « loi normale ») :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Masse totale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$

Moyenne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0$

Variance : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx = 1$



5. Lois gaussiennes

Démonstration : Soit A, B deux réels tels que $A < 0 < B$.

1. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{2}\, y$ et par parité de φ :

$$\begin{aligned}\int_A^B \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{A/\sqrt{2}}^{B/\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{|A|/\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \int_0^{B/\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\ &\underset{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 1\end{aligned}$$

2. En remarquant que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$:

$$\int_A^B x\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\varphi(x)\Big]_A^B = \varphi(A) - \varphi(B) \underset{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}}{\longrightarrow} 0$$

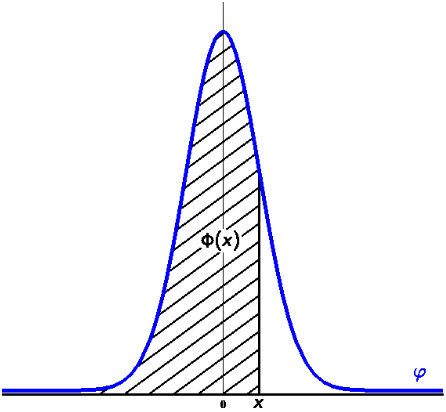
3. À l'aide d'une intégration par parties :

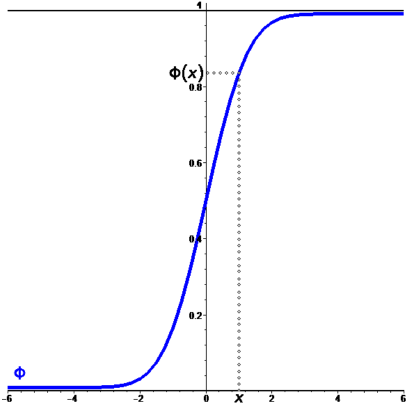
$$\begin{aligned}\int_A^B x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_A^B x\,\mathrm{d}\big(-\varphi(x)\big) = \Big[-x\varphi(x)\Big]_A^B + \int_A^B \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= A\varphi(A) - B\varphi(B) + \int_A^B \varphi(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1\end{aligned}$$

5. Lois gaussiennes

Fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant la loi normale :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leqslant x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\, \mathrm{d}u}$$

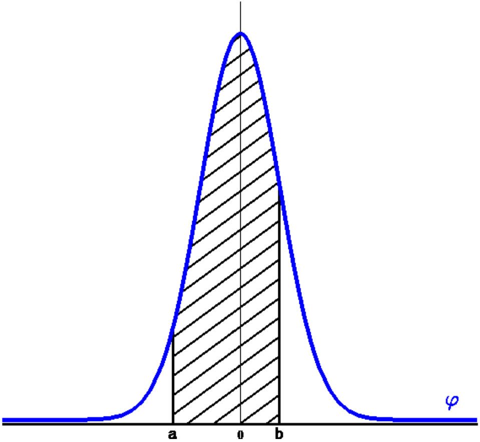




5. Lois gaussiennes

Théorème (Loi de Gauss standard ou loi normale)

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b \varphi(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$



5. Lois gaussiennes

Densité de probabilité des lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$\boxed{\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

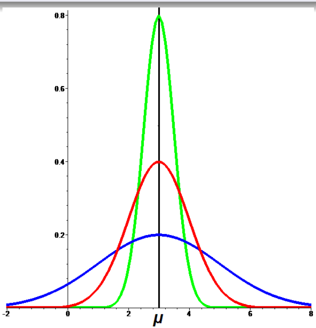
Théorème (Lois gaussiennes)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = \mu \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2$$

Masse totale : 1

Moyenne : μ

Variance : σ^2



$\mu = 3$

$\sigma = 1$

$\sigma = 2$

$\sigma = 0.5$

5. Lois gaussiennes

Démonstration : on effectue le changement de variable $x = \sigma y + \mu$. On a $\mathrm{d}x = \sigma\,\mathrm{d}y$ et $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(y)$ puis pour $A < 0 < B$, $x \in [A, B] \Longleftrightarrow y \in \left[\frac{1}{\sigma}(A-\mu), \frac{1}{\sigma}(B-\mu)\right]$. Lorsque $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$, on a $\frac{1}{\sigma}(A-\mu) \to -\infty$ et $\frac{1}{\sigma}(B-\mu) \to +\infty$.

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1$$

2. $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + \mu)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \mu\end{aligned}$$

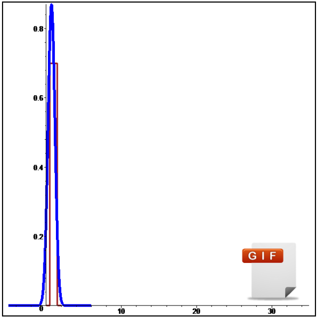
3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sigma^2$$

5. De la loi binomiale vers la loi de Gauss

Loi binomiale de paramètres* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0,1]$ *(notée* $\mathcal{B}(n,p)$*) :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,1,2,\ldots,n\}}$$

Lorsque $n \to +\infty$...

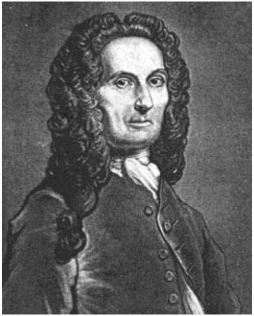


5. Une merveille de la nature...

Théorème (De Moivre–Laplace, 1733 & 1812)

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant z\right) = \Phi(z)$$

En pratique, pour $\left\{\begin{array}{c} n \geqslant 30 \\ np(1-p) \geqslant 10 \end{array}\right\}$: $\mathcal{B}(n,p) \underset{n\to+\infty}{\approx} \mathcal{N}\big(np, np(1-p)\big)$



Abraham de Moivre, 1667–1754

Pierre-Simon de Laplace, 1749–1827

5. Une merveille de la nature...

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY ♦ IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING ♦
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT

— William John Youden, 1962

MERCI DE VOTRE INDÉFECTIBLE STOÏCISME !