Primitives et équations différentielles

Quelques exercices

Exercice 1

(N.B. Les trois questions sont indépendantes)

1. Calculer, à l'aide d'une décomposition en éléments simples, l'intégrale suivante :

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer, à l'aide du changement de variables $x=\mathrm{e}^t$, la primitive suivante :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t}.$$

3. Résoudre sur les intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E)\quad (t+2)\dot{u}(t)+u(t)=3t(t+2).$$

L'équation (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice nº 1

1. — **Calcul d'intégrale :**

- $$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \frac{x}{(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 \frac{x-3}{(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x + 3\int_2^3 \frac{1}{(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln\big((x-3)^2+1\big)\Big]_2^3 + 3\,[\arctan(x-3)]_2^3\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\int_2^3 \frac{x}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).}$$

2 — **Calcul de primitive :**

- Changement de variable $x = e^t$ $(x > 0)$:

  $dx = e^t\, dt = x\, dt$ ou encore $dt = \dfrac{dx}{x}$ (en fait $t = \ln x$), puis

$$\int \frac{dt}{e^{2t} + e^t} = \int \frac{dx}{x^3 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

Or

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

avec

$$c = \lim_{x \to -1} (x+1) f(x) = 1, \qquad a = \lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 1.$$

D'autre part,

$$\lim_{x \to \infty} x\, f(x) = b + c = 0 \Longrightarrow b = -1.$$

2 — **Calcul de primitive :**

- Changement de variable $x = \mathrm{e}^t$ $(x > 0)$:

$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}t$ ou encore $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ (en fait $t = \ln x$), puis

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)}.$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

Donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+1)} = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C$$

soit

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t} = \ln(\mathrm{e}^{-t} + 1) - \mathrm{e}^{-t} + C.}$$

3. **— Équation homogène associée à (E) :**

$$(E_H) \quad (t+2)\dot{u}_H(t) + u_H(t) = 0.$$

Solution générale de (E_H) sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,+\infty[$:

$$u_H(t) = A\,\mathrm{e}^{-\ln|t+2|} = \frac{A}{|t+2|} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

soit, sur $]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,+\infty[$:

$$\boxed{u_H(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{t+2} & \text{si } t < -2 \\[2ex] \dfrac{\mu}{t+2} & \text{si } t > -2 \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

Remarque : l'ensemble des solutions de (E_H) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions dérivables de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ dans $\mathbb{R}$, de base $\left\{t \mapsto \frac{1}{t+2}\mathbb{1}_{]-\infty,-2[},\, t \mapsto \frac{1}{t+2}\mathbb{1}_{]-2,+\infty[}\right\}$ (dimension 2).

3 **— Recherche d'une solution particulière de (E) (méthode de la variation de la constante) :**

$$u_P(t) = \frac{\lambda(t)}{t+2}.$$

Reportons dans (E) : $\dfrac{\dot\lambda(t)}{t+2} = 3t$, soit $\dot\lambda(t) = 3t^2 + 6t$,
ou encore

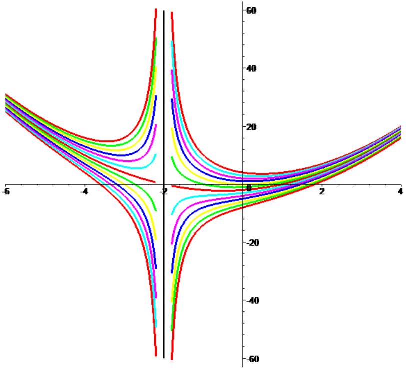
$$\lambda(t) = t^3 + 3t^2 \ (+C).$$

D'où

$$\boxed{u_P(t) = \frac{t^3+3t^2}{t+2}.}$$

3. — **Solution générale de** (E) **:** $u(t) = u_H(t) + u_P(t)$

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3+3t^2+\lambda}{t+2} & \text{si } t < -2 \\[2ex] \dfrac{t^3+3t^2+\mu}{t+2} & \text{si } t > -2 \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$



3 — **Recherche des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:**

Continuité en -2 :

$$u \text{ est prolongeable par } \textbf{continuité} \text{ en } -2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t\to-2^-} \frac{t^3+3t^2+\lambda}{t+2} \text{ et } \lim_{t\to-2^+} \frac{t^3+3t^2+\mu}{t+2} \text{ existent et coïncident}$$

$$\Longleftrightarrow$$

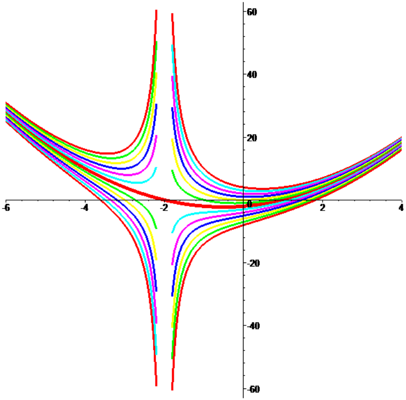
$$\lambda = \mu = -4.$$

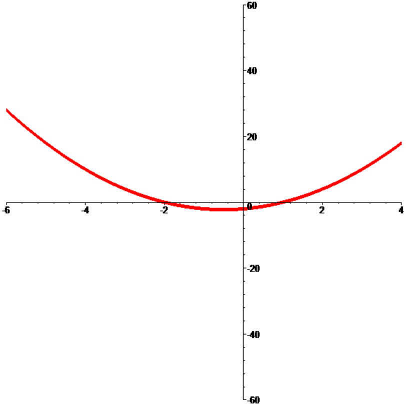
Dans ce cas,

$$u(t) = \frac{t^3+3t^2-4}{t+2} = t^2+t-2.$$

③ — **Recherche des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:**

Le prolongement par **continuité** $t \longmapsto t^2 + t - 2$ est **dérivable** et c'est la seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.





Exercice 2

(N.B. Les deux questions sont dépendantes)

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties la primitive suivante :
$$\int t \sin(t)\, \mathrm{d}t.$$

2. Résoudre sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ les équations différentielles suivantes :
$$\begin{aligned} &(E_1) \quad t\dot{u}(t) = u(t) + t^3 \sin(t), \\ &(E_2) \quad t\dot{u}(t) = 2u(t) + t^4 \sin(t). \end{aligned}$$

   Les équations (E_1) et (E_2) admettent-elles des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice n° 2

1. **— Calcul de primitive :**

Intégration par parties :

$$\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}[-\cos(t)] = -t\cos(t) + \int \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \sin(t) - t\cos(t) + C.}$$

2. — **Équation homogène associée à (E_1) :**

$$(E_{1H}) \quad t\dot{u}_{1H}(t) = u_{1H}(t).$$

Solution générale de (E_{1H}) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$u_{1H}(t) = A\,\mathrm{e}^{\ln|t|} = A|t| \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

soit, sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$:

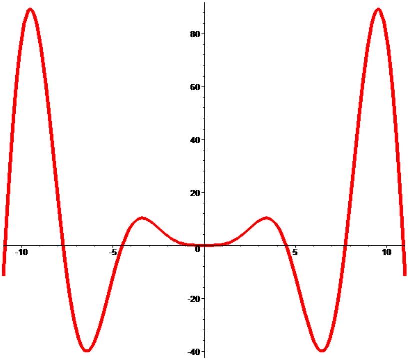
$$\boxed{u_{1H}(t) = \begin{cases} \lambda t & \text{si } t < 0 \\ \mu t & \text{si } t > 0 \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

Remarque : l'ensemble des solutions de (E_{1H}) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, de base $\left\{t \mapsto t\mathbb{1}_{]-\infty,0[}, t \mapsto t\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right\}$ (dimension 2).

2. **— Recherche d'une solution particulière de (E_1) :**
Méthode de la variation de la constante : $u_{1P}(t) = \lambda(t)t$.

Reportons dans (E_1) : $\dot{\lambda}(t)t^2 = t^3\sin(t)$, soit $\dot{\lambda}(t) = t\sin(t)$, ou encore $\lambda(t) = \sin(t) - t\cos(t)$. D'où une solution particulière :

$$\boxed{u_{1P}(t) = t\sin(t) - t^2\cos(t).}$$



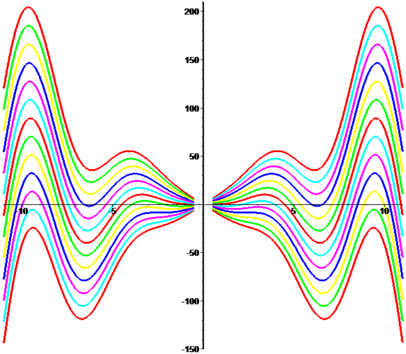
Exercice n° 2

2. — **Solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}^*$:**

$$u_1(t) = u_{1H}(t) + u_{1P}(t)$$

soit :

$$\boxed{u_1(t) = \begin{cases} \lambda t + t\sin(t) - t^2\cos(t) & \text{si } t < 0 \\ \mu t + t\sin(t) - t^2\cos(t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$



2 — **Recherche des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$:**

1) u_1 est prolongeable par **continuité** en posant $u_1(0) = 0$;

2) **dérivabilité** en 0 :

ce prolongement est **dérivable** en 0

$$\Longleftrightarrow$$

$$\dot{u}_{1g}(0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{u_1(t)}{t} \quad \text{et} \quad \dot{u}_{1d}(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{u_1(t)}{t}$$

existent et coïncident

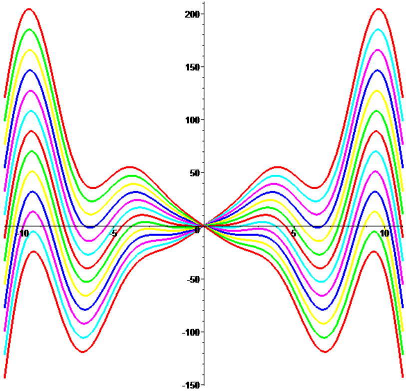
$$\Longleftrightarrow$$

$$\lambda = \mu.$$

2 — **Recherche des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$:**

D'où la solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{u_1(t) = \lambda t + t\sin(t) - t^2\cos(t) \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$$



2. — **Équation homogène associée à (E_2) :**

$$(E_{2H}) \quad t\dot{u}_{2H}(t) = 2u_{2H}(t).$$

Solution générale de (E_{2H}) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$u_{2H}(t) = A\,\mathrm{e}^{2\ln|t|} = At^2 \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

soit, sur $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$:

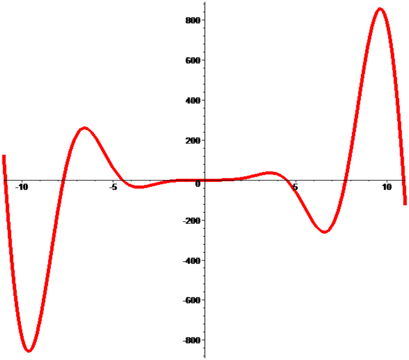
$$\boxed{u_{2H}(t) = \begin{cases} \lambda t^2 & \text{si } t < 0 \\ \mu t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

Remarque : l'ensemble des solutions de (E_{2H}) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, de base $\left\{t \mapsto t^2\mathbb{1}_{]-\infty,0[},\, t \mapsto t^2\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right\}$ (dimension 2).

2. — **Recherche d'une solution particulière de (E_2) :**
Méthode de la variation de la constante : $u_{2P}(t) = \lambda(t)t^2$.

Reportons dans (E_2) : $\dot{\lambda}(t)t^3 = t^4\sin(t)$, soit $\dot{\lambda}(t) = t\sin(t)$, ou encore $\lambda(t)=\sin(t)-t\cos(t)$. D'où une solution particulière :

$$\boxed{u_{2P}(t) = t^2\sin(t) - t^3\cos(t).}$$

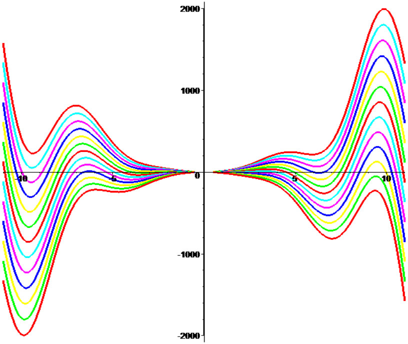


2 — **Solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}^*$:**

$$u_2(t) = u_{2H}(t) + u_{2P}(t)$$

soit :

$$\boxed{u_2(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^2\sin(t) - t^3\cos(t) & \text{si } t < 0 \\ \mu t^2 + t^2\sin(t) - t^3\cos(t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$



Exercice n° 2

2 — **Recherche des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$:**

1) u_2 est prolongeable par **continuité** en posant $u_2(0) = 0$;

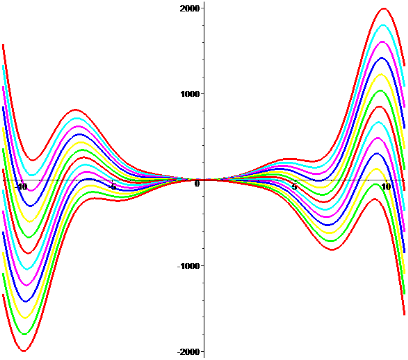
2) ce prolongement est **dérivable** en 0 car $\dot{u}_{2g}(0) = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{u_2(t)}{t}$ et $\dot{u}_{2d}(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{u_2(t)}{t}$ existent et coïncident (quels que soient λ et μ) :

$$\dot{u}_{2d}(0) = \dot{u}_{2g}(0) = 0.$$

2. — **Recherche des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$:**

D'où la solution générale de (E_2) sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{u_2(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^2\sin(t) - t^3\cos(t) & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mu t^2 + t^2\sin(t) - t^3\cos(t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$



Exercice 3

(N.B. Les deux questions sont dépendantes)

1. Calculer les primitives suivantes :
   - à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;
   - à l'aide d'une décomposition en éléments simples : $\displaystyle\int \frac{1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$;
   - à l'aide du changement de variables $x=\mathrm{e}^t$: $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$:

     $$(E_1)\quad (\mathrm{e}^t-1)\dot{u}(t)+u(t)=t+1.$$

     L'équation (E_1) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
   - sur les intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$:

     $$(E_2)\quad (t^2-t)\dot{u}(t)+u(t)=t+1.$$

     L'équation (E_2) admet-elle des solutions définies sur $]-\infty,1[$? Sur $]0,+\infty[$? Sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice nº 3

1. — **Calcul de primitives :**
   - Intégration par parties :

$$\int (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int (t+1)\,\mathrm{d}[-\mathrm{e}^{-t}] = -(t+1)\mathrm{e}^{-t} + \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\int (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + C.}$$

Exercice n° 3

1. — **Calcul de primitives :**
   - Décomposition en éléments simples :

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - t} = \frac{1}{t(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$$

avec $a = \lim_{t\to 0} t\,f(t) = -1, \quad b = \lim_{t\to 1} (t-1)f(t) = 1.$

Donc
$$\int \frac{1}{t^2 - t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

soit :
$$\boxed{\int \frac{1}{t^2 - t}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C.}$$

Remarque : la fonction f étant définie sur $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$, on devrait choisir des constantes C indépendantes sur chacun des intervalles :

$$\int \frac{1}{t^2 - t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_1 & \text{si } t \in \,]-\infty, 0[, \\ \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_2 & \text{si } t \in \,]0, 1[, \\ \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_3 & \text{si } t \in \,]1, +\infty[. \end{cases}$$

Exercice n° 3

1. — **Calcul de primitives :**
   - Changement de variable $x = \mathrm{e}^t$ $(x > 0)$:

     on a $g(t) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \dfrac{1}{x-1}$,

     $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}t$ ou encore $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ (en fait $t = \ln x$), puis

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

donc : $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1} = \ln\frac{|\mathrm{e}^t - 1|}{\mathrm{e}^t} + C = \ln|\mathrm{e}^t - 1| - t + C.}$

Remarque : la fonction g étant définie sur $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$, on devrait choisir des constantes C indépendantes sur chacun des intervalles :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1} = \begin{cases} \ln|\mathrm{e}^t - 1| - t + C_1 & \text{si } t \in\,]-\infty, 0[, \\ \ln|\mathrm{e}^t - 1| - t + C_2 & \text{si } t \in\,]0, +\infty[. \end{cases}$$

2 — **Équation homogène associée à (E_1) :**

$$(E_{1H}) \quad \big(\mathrm{e}^t - 1\big)\dot{u}_{1H}(t) + u_{1H}(t) = 0.$$

Solution générale de (E_{1H}) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

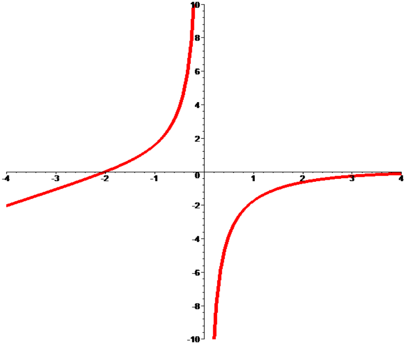
$$u_{1H}(t) = A\,\mathrm{e}^{t-\ln|\mathrm{e}^t-1|} = A\,\frac{\mathrm{e}^t}{|\mathrm{e}^t - 1|} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

soit, sur $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$:

$$\boxed{u_{1H}(t) = \begin{cases} \lambda\,\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1} & \text{si } t < 0 \\ \mu\,\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

2. **— Recherche d'une solution particulière de (E_1) :**
Méthode de la variation de la constante : $u_{1P}(t) = \lambda(t)\,\dfrac{e^t}{e^t - 1}$.
Reportons dans (E_1) : $\dot{\lambda}(t)\,e^t = t + 1$, soit $\dot{\lambda}(t) = (t+1)e^{-t}$, ou encore $\lambda(t) = -(t+2)e^{-t}$. D'où une solution particulière :

$$\boxed{u_{1P}(t) = -\frac{t+2}{e^t - 1}.}$$

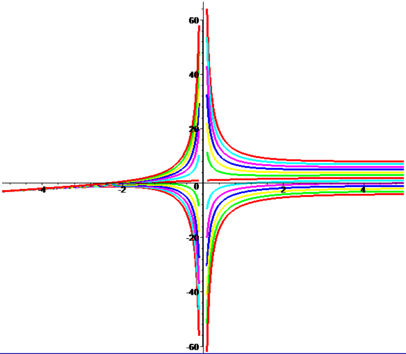


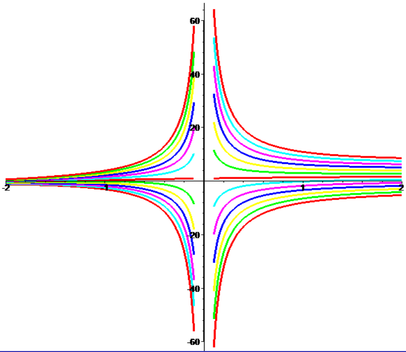
2. — **Solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}^*$:**

$$u_1(t) = u_{1H}(t) + u_{1P}(t)$$

soit :

$$\boxed{u_1(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\,\mathrm{e}^t - t - 2}{\mathrm{e}^t - 1} & \text{si } t < 0 \\[2ex] \dfrac{\mu\,\mathrm{e}^t - t - 2}{\mathrm{e}^t - 1} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$





3 — **Recherche des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$:**
Continuité en 0 :

$$u_1 \text{ est prolongeable par } \textbf{continuité} \text{ en } 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\lambda\,\mathrm{e}^t - t - 2}{\mathrm{e}^t - 1} \text{ et } \lim_{t\to 0^+} \frac{\mu\,\mathrm{e}^t - t - 2}{\mathrm{e}^t - 1} \text{ existent et coïncident}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lambda = \mu = 2.$$

Dans ce cas :

$$u_1(t) = \frac{2\,\mathrm{e}^t - t - 2}{\mathrm{e}^t - 1} = 2 - \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} u_1(t) = 1.$$

La seule solution possible sur $\mathbb{R}$ est

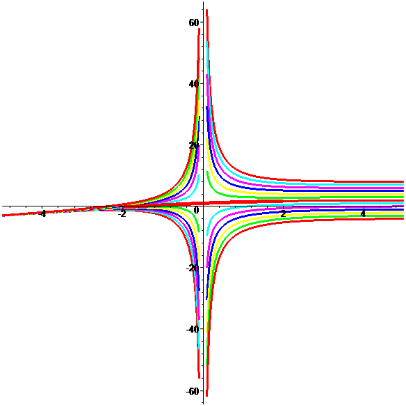
$$\boxed{\tilde{u}_1(t) = \begin{cases} 2 - \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}}$$

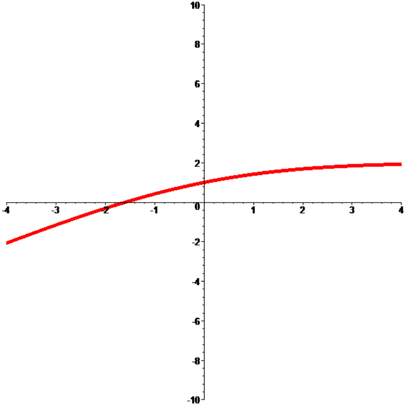
3 — Recherche des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$:

Développement limité d'ordre 1 en 0 du prolongement :

$$\tilde{u}_1(t) \underset{t\to 0}{=} 2 - \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)} \underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}t + o(t).$$

Le prolongement par **continuité** $\tilde{u}_1$ est donc **dérivable** en 0 et c'est la seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.





2. — **Équation homogène associée à (E_2) :**

$$(E_{2H}) \quad \left(t^2 - t\right)\dot{u}_{2H}(t) + u_{2H}(t) = 0.$$

Solution générale de (E_{2H}) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$:

$$u_{2H}(t) = A\,\mathrm{e}^{\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|} = A\left|\frac{t}{t-1}\right| \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

soit, sur $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$:

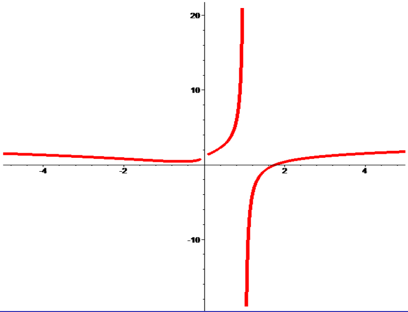
$$\boxed{u_{2H}(t) = \begin{cases} \lambda\,\dfrac{t}{t-1} & \text{si } t < 0 \\ \mu\,\dfrac{t}{t-1} & \text{si } 0 < t < 1 \\ \nu\,\dfrac{t}{t-1} & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.}$$

2. — **Recherche d'une solution particulière de (E_2) :**
Méthode de la variation de la constante : $u_{2P}(t) = \lambda(t)\,\dfrac{t}{t-1}$.

Reportons dans (E_2) : $\dot{\lambda}(t)\,t^2 = t+1$, soit $\dot{\lambda}(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}$,

ou encore $\lambda(t) = \ln|t| - \dfrac{1}{t}$. D'où une solution particulière :

$$\boxed{u_{2P}(t) = \frac{t\ln|t| - 1}{t-1}.}$$

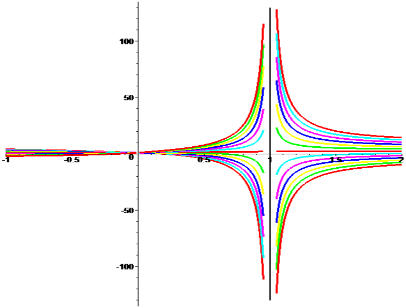


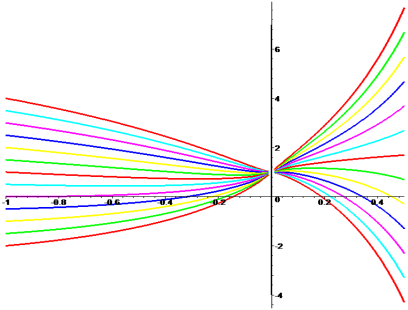
Exercice n° 3

2 — **Solution générale de (E_2) sur $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$:**

$$u_2(t) = \color{red}{u_{2H}(t)} + \color{green}{u_{2P}(t)}$$

soit : $\boxed{u_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda t + t\ln|t| - 1}{t-1} & \text{si } t<0 \\ \dfrac{\mu t + t\ln t - 1}{t-1} & \text{si } 0<t<1 \\ \dfrac{\nu t + t\ln t - 1}{t-1} & \text{si } t>1 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}.}$





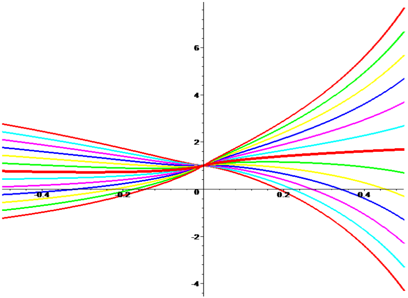
3. — **Recherche des solutions de (E_2) sur $]-\infty,1[$:**

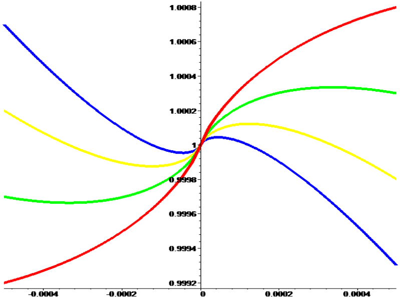
1) u_2 est prolongeable par **continuité** en 0 en posant $u_2(0)=1$. Mais ce prolongement **n'est pas dérivable** en 0 :

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{u_2(t)-1}{t}=\frac{\lambda+\ln|t|-1}{t-1}=+\infty,$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{u_2(t)-1}{t}=\frac{\mu+\ln|t|-1}{t-1}=+\infty.$$

(E_2) n'admet donc pas de solution définie sur $]-\infty,1[$ ni sur $\mathbb{R}$.





3 — **Recherche des solutions de (E_2) sur $]0,+\infty[$:**

2) **Continuité** en 1 :

u_2 est prolongeable par **continuité** en 1

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{t\to 1^-}\frac{\mu t+t\ln|t|-1}{t-1} \text{ et } \lim_{t\to 1^+}\frac{\nu t+t\ln|t|-1}{t-1} \text{ existent et coïncident}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mu=\nu=1.$$

Dans ce cas :

$$u_2(t)=\frac{t+t\ln|t|-1}{t-1}=1+\frac{t\ln|t|}{t-1} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1}u_2(t)=2.$$

La seule solution possible sur $]0,+\infty[$ est

$$\boxed{\tilde{u}_2(t)=\begin{cases}1+\dfrac{t\ln|t|}{t-1} & \text{si } t\neq 1,\\ 2 & \text{si } t=1.\end{cases}}$$

Exercice nº 3

3. — **Recherche des solutions de** (E_2) **sur** $]0, +\infty[$ **:**

2) **Dérivabilité** en 1 :

Calculons le développement limité d'ordre 1 en 1 de $\tilde{u}_2$, en posant $t = 1 + h$:

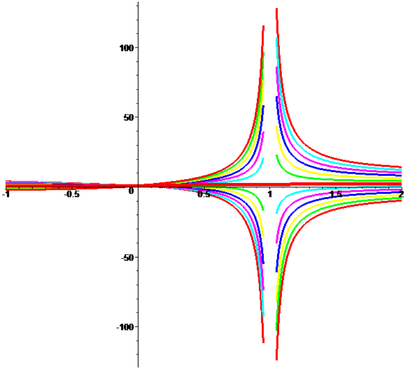
$$\begin{aligned}
\tilde{u}_2(1+h) &= 1 + \ln(1+h) + \frac{\ln(1+h)}{h} \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + h + \frac{h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)}{h} \\
&\underset{h\to 0}{=} 2 + \frac{1}{2}h + o(h).
\end{aligned}$$

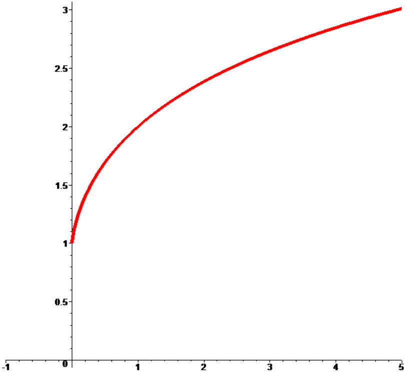
Le prolongement par **continuité** $\tilde{u}$ est donc **dérivable** en 1.

③ — **Recherche des solutions de (E_2) sur $]0,+\infty[$:**

Ainsi, (E_2) admet pour unique solution sur $]0,+\infty[$:

$$\boxed{\tilde{u}_2(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{t\ln|t|}{t-1} & \text{si } t \neq 1, \\ 2 & \text{si } t = 1. \end{cases}}$$





Exercice 4

(N.B. Les deux questions sont dépendantes)

1. Calculer les primitives :
   - sur $]-1,1[$ à l'aide du changement de variables $t = \sin(\theta)$, $\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$:
   $$\int \frac{1}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t\ ;$$
   - sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ à l'aide des changements de variables respectifs $t = -\mathrm{ch}(\theta)$ et $t = \mathrm{ch}(\theta)$, $\theta > 0$:
   $$\int \frac{1}{\left(t^2-1\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$
2. Résoudre sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ l'équation différentielle suivante :
   $$(E) \quad \left(t^2-1\right)\dot{u}(t) = t\,u(t) - 1.$$
   L'équation (E) admet-elle des solutions définies sur $]-\infty,1[$? Sur $]-1,+\infty[$? Sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice nº 4

1. **— Calcul de primitive :**

Changement de variable :

- Sur $]-1,1[$: $t=\sin\theta$ ($\theta\in]-\pi/2,\pi/2[$)

$$\int \frac{1}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\tan\theta+C=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+C$$

- Sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$: $t=\begin{cases}+\mathrm{ch}\,\theta & \text{pour } t\in]1,+\infty[\\ -\mathrm{ch}\,\theta & \text{pour } t\in]-\infty,-1[\end{cases}$ $(\theta>0)$

$$\int \frac{1}{\left(t^2-1\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t=\pm\int\frac{1}{\mathrm{sh}^2\,\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mp\coth\theta+C=-\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}+C$$

Soit :

$$\boxed{\int\frac{1}{|t^2-1|^{3/2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{sgn}(1-t^2)\,t}{\sqrt{|t^2-1|}}+C.}$$

2. — **Équation homogène associée à (E) :**

$$(E_H) \quad \left(t^2-1\right)\dot{u}_H(t) = t\,u_H(t).$$

Solution générale de (E_H) sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$:

$$u_H(t) = A\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln|t^2-1|} = A\sqrt{|t^2-1|} \quad \text{avec } A\in\mathbb{R},$$

soit, sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,+\infty[$:

$$\boxed{u_H(t) = \begin{cases} \lambda\sqrt{t^2-1} & \text{si } t<-1 \\ \mu\sqrt{1-t^2} & \text{si } -1<t<1 \\ \nu\sqrt{t^2-1} & \text{si } t>1 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}.}$$

Remarque : l'ensemble des solutions de (E_H) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions dérivables de $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ dans $\mathbb{R}$, de base

$\left\{t\mapsto\sqrt{t^2-1}\,\mathbb{1}_{]-\infty,-1[},\, t\mapsto\sqrt{1-t^2}\,\mathbb{1}_{]-1,1[},\, t\mapsto\sqrt{t^2-1}\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}\right\}$ (dimension 3).

Exercice n° 4

2. — **Recherche d'une solution particulière de (E) :**

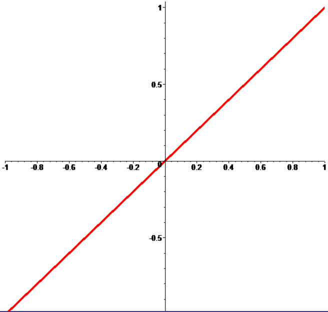
Méthode de la variation de la constante : $u_P(t) = \lambda(t)\sqrt{|t^2-1|}$.

Reportons dans (E) : $\operatorname{sgn}(t^2-1)\left|t^2-1\right|^{3/2}\dot{\lambda}(t) = -1$,

soit $\dot{\lambda}(t) = \frac{\operatorname{sgn}(1-t^2)}{|t^2-1|^{3/2}}$, ou encore $\lambda(t) = \frac{t}{\sqrt{|t^2-1|}}$.

D'où une solution particulière :

$$\boxed{u_P(t) = t.}$$



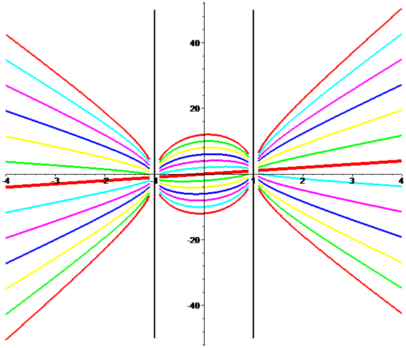
Exercice n° 4

2. — **Solution générale de (E) sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$**

$$u(t) = u_H(t) + u_P(t)$$

soit :

$$\boxed{u_1(t) = \begin{cases} \lambda\sqrt{t^2-1}+t & \text{si } t<-1 \\ \mu\sqrt{1-t^2}+t & \text{si } -1<t<1 \\ \nu\sqrt{t^2-1}+t & \text{si } t>1 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}.}$$



2 — **Recherche des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:**

1) u est prolongeable par **continuité** en posant $u(-1) = -1$ et $u(1) = 1$;

2) **dérivabilité** en -1 et 1 :

$$\text{ce prolongement est dérivable en } -1 \text{ et } 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{les limites } \lim_{t \to -1^-} \frac{u(t)+1}{t+1} \text{ et } \lim_{t \to -1^+} \frac{u(t)+1}{t+1} \text{ existent et coïncident}$$
$$\text{et les limites } \lim_{t \to 1^-} \frac{u(t)-1}{t-1} \text{ et } \lim_{t \to 1^+} \frac{u(t)-1}{t-1} \text{ existent et coïncident}$$

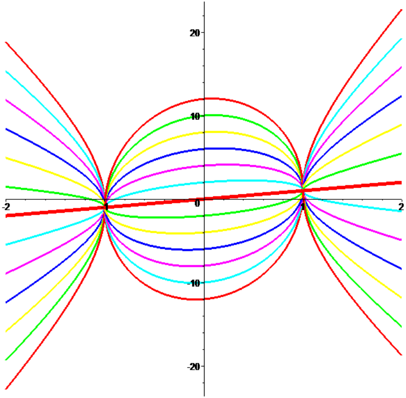
$$\Longleftrightarrow$$

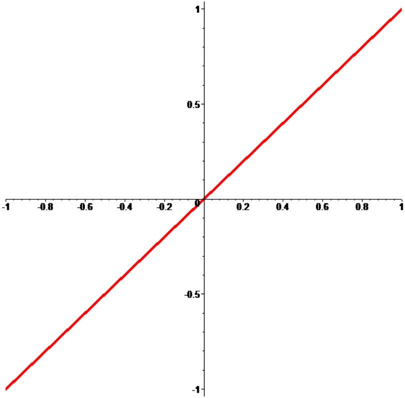
$$\lambda = \mu = \nu = 0.$$

Exercice n° 4

❷ — **Recherche des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:**

D'où l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$: $\boxed{u(t) = t.}$





Exercice 5

Soit a et b des fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ainsi que $t_0 \in I$.

On considère l'équation différentielle (E) : $\dot{u}(t) + a(t)\,u(t) = b(t)$.

On note $\{u_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des solutions de (E) et l'on appelle, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de u_λ.

1. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ à la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ au point de coordonnées $(t_0, u_\lambda(t_0))$.
2. - On suppose que $a(t_0) \neq 0$. Montrer que les droites $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont concourantes.
   - On suppose que $a(t_0) = 0$. Que peut-on dire des droites $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$?
3. Examiner l'exemple où $a(t) = b(t) = t$ et $t_0 \in \{0, 1\}$.

Exercice n° 5

1. Équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ dans le plan xOy :

$$y = \dot{u}_\lambda(t_0)(x - t_0) + u_\lambda(t_0)$$

soit

$$y = u_\lambda(t_0)\Big[1 - a(t_0)(x - t_0)\Big] + b(t_0)(x - t_0).$$

2. - Supposons $a(t_0) \neq 0$.
   Un éventuel point commun (x_1, y_1) aux droites $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifie donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ u_\lambda(t_0)\Big[a(t_0)(x_1 - t_0) - 1\Big] + \Big[y_1 - b(t_0)(x_1 - t_0)\Big] = 0.$$

   D'autre part u_λ est de la forme $\lambda\varphi+\psi$ où φ ne s'annule pas sur I (solution exponentielle de l'équation homogène associée à (E)) et ψ est une solution particulière de (E).

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\varphi(t_0)\Big[a(t_0)(x_1 - t_0) - 1\Big] + \Big(\psi(t_0)\Big[a(t_0)(x_1 - t_0) - 1\Big] + \Big[y_1 - b(t_0)(x_1 - t_0)\Big]\Big) = 0$$

Exercice nº 5

1. Équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ dans le plan xOy :

$$y = \dot{u}_\lambda(t_0)(x - t_0) + u_\lambda(t_0)$$

soit

$$y = u_\lambda(t_0)\Big[1 - a(t_0)(x - t_0)\Big] + b(t_0)(x - t_0).$$

2. • Supposons $a(t_0) \neq 0$.
Remarquant que $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \alpha\lambda + \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$, on en tire le système

$$\begin{cases} a(t_0)(x_1 - t_0) = 1 \\ y_1 - b(t_0)(x_1 - t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{de solution} \quad \begin{cases} x_1 = t_0 + \dfrac{1}{a(t_0)} \\ y_1 = \dfrac{b(t_0)}{a(t_0)} \end{cases}$$

Les tangentes $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont donc concourantes, le point de concours ayant pour coordonnées $\left(t_0 + \dfrac{1}{a(t_0)}, \dfrac{b(t_0)}{a(t_0)}\right)$.

Exercice nº 5

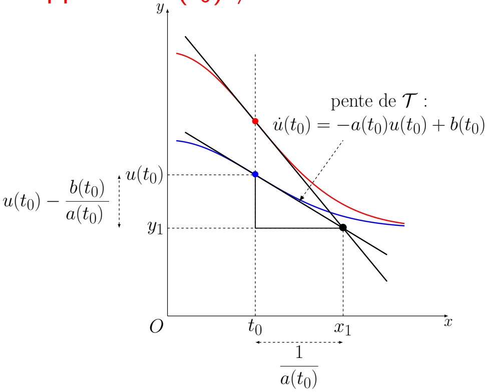
1. Équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ dans le plan xOy :

$$y = \dot{u}_\lambda(t_0)(x - t_0) + u_\lambda(t_0)$$

soit

$$y = u_\lambda(t_0)\Big[1 - a(t_0)(x - t_0)\Big] + b(t_0)(x - t_0).$$

2. • Supposons $a(t_0) \neq 0$.



$$\begin{cases} x_1 = t_0 + \dfrac{1}{a(t_0)} \\ y_1 = \dfrac{b(t_0)}{a(t_0)} \end{cases}$$

Exercice n° 5

1. Équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ dans le plan xOy :

$$y = \dot{u}_\lambda(t_0)(x - t_0) + u_\lambda(t_0)$$

soit

$$y = u_\lambda(t_0)\Big[1 - a(t_0)(x - t_0)\Big] + b(t_0)(x - t_0).$$

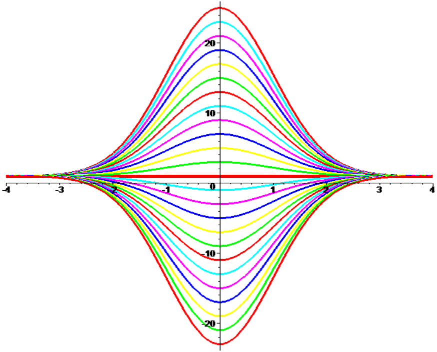
2. - Supposons $a(t_0) = 0$.
   L'équation de $\mathcal{T}_\lambda$ s'écrit

$$y = b(t_0)(x - t_0) + u_\lambda(t_0).$$

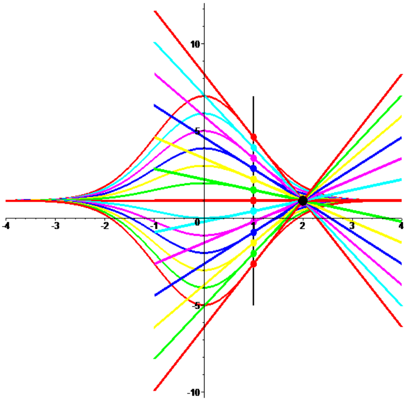
   Les tangentes $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ont même pente $b(t_0)$, elles sont donc parallèles.

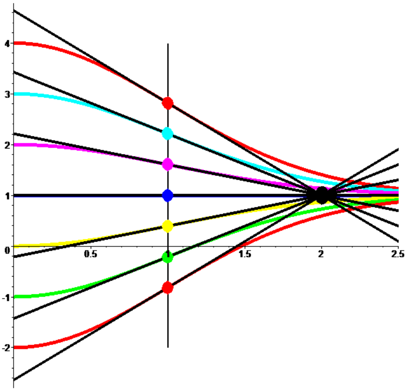
Exercice nº 5

3. Cas $a(t) = b(t) = t$
   - Équation différentielle :
$$(E) : \dot{u}(t) + t\,u(t) = t.$$
   - Solution générale :
$$\boxed{u(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$



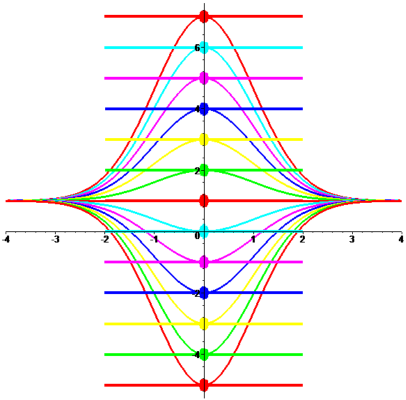
3. Cas $a(t) = b(t) = t$
   - En $t_0 = 1$:

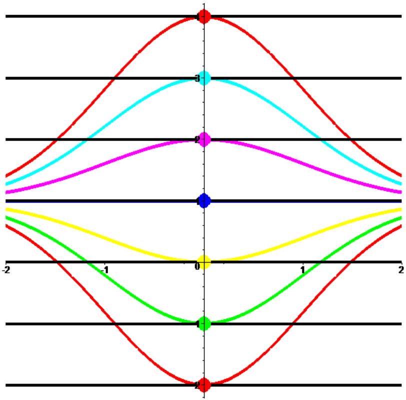




Exercice nº 5

3. Cas $a(t) = b(t) = t$
   - En $t_0 = 0$:





MERCI DE VOTRE PARTICIPATION
À CE DERNIER BONUS TRACK !