Sinus et produit eulérien

1. Un polynôme ad hoc

1. Un polynôme ad hoc

1. Partons de

$$
\begin{aligned}
\sin((2n+1)\theta) &= \operatorname{Im}\left(e^{i(2n+1)\theta}\right) = \operatorname{Im}\left[\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right]^{2n+1} \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[\cos(\theta)\right]^{2n+1-k}\left[i\sin(\theta)\right]^{k}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}\cos^{2n-2p}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta) \\
&= \sin(\theta)\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}(1-\sin^2(\theta))^{n-p}\sin^{2p}(\theta) \\
&= \sin(\theta)\,P(\sin^2(\theta))
\end{aligned}
$$

où P est le polynôme défini par

$$
P = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}(1-X)^{n-p}X^p.
$$

1. Un polynôme ad hoc

1. On a donc
$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\quad P(\sin^2(\theta))=\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.}$$

2. Résolvons l'équation $P(\sin^2(\theta))=0$:
$$\begin{aligned}P(\sin^2(\theta))=0 &\Longleftrightarrow \sin((2n+1)\theta)=0 \text{ et } \sin(\theta)\neq 0\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ (2n+1)\theta=k\pi \text{ et } \theta\notin\pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$
Les solutions dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ sont les angles $\frac{k\pi}{2n+1}$, $k\in\{1,\dots,n\}$.

   Donc, les nombres $\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})$, $k\in\{1,\dots,n\}$, sont n racines distinctes du polynôme P.

   D'autre part, P est de degré n. Les nombres précédents sont exactement toutes les racines de P.

1. Un polynôme ad hoc

2. On peut donc factoriser P par $\prod_{k=1}^{n}\left(X-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$ ou encore par $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$:

$$P=\lambda\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

où λ est une constante.

Le terme constant de $P=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}(1-X)^{n-p}X^p$ est obtenu pour $p=0$: c'est $\lambda=2n+1$.

On a donc pour tout $\theta\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$:

$$\boxed{P(\sin^2(\theta))=\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2(\theta)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).}$$

2. Une factorisation du sinus

2. Une factorisation du sinus

Proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

On va calculer la limite de cette expression lorsque $n \to +\infty$.

1. On a d'abord
$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right) = x.$$
Soit m un entier inférieur à n. On décompose le produit selon
$$\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \times \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).$$
On va calculer la limite de chacun de ces deux produits lorsque $n \to +\infty$, puis $m \to +\infty$.

2. Une factorisation du sinus

2. On examine d'abord le produit $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$.

On a
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{x}{k\pi}$$

donc, *m étant fixé,*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)=\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).}$$

2. Une factorisation du sinus

3. On examine ensuite le produit $\boxed{\displaystyle\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).}$

On a les inégalités élémentaires

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\geqslant 1+x\quad\text{et}\quad\forall x\in[0,1/2],\ \ln(1-x)\geqslant -2x.$$

En écrivant pour une suite de $\varepsilon_k\in[0,1/2]$

$$\prod_k(1-\varepsilon_k)=\mathrm{e}^{\sum_k\ln(1-\varepsilon_k)}\geqslant 1+\sum_k\ln(1-\varepsilon_k)\geqslant 1-2\sum_k\varepsilon_k,$$

on obtient

$$0\leqslant 1-\prod_{k=m+1}^{n}(1-\varepsilon_k)\leqslant 2\sum_{k=m+1}^{n}\varepsilon_k.$$

2. Une factorisation du sinus

3. On examine ensuite le produit $\boxed{\displaystyle\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$.

On choisit
$$\varepsilon_k=\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$
avec x suffisamment petit pour que $\varepsilon_k\in[0,1/2]$.
À l'aide de l'encadrement élémentaire
$$\forall u\in[0,\pi/2],\ \frac{2}{\pi}u\leqslant\sin(u)\leqslant u,$$
on trouve
$$0\leqslant\varepsilon_k\leqslant\frac{x^2}{4k^2},$$
puis
$$0\leqslant 1-\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\leqslant 2\sum_{k=m+1}^{n}\varepsilon_k\leqslant\frac{x^2}{2}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

2. Une factorisation du sinus

3. On examine ensuite le produit $\boxed{\displaystyle\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$.

Enfin,

$$0 \leqslant \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{m}-\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Pour chaque m, la suite $\left(\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant m}$ est croissante et majorée (par $1/m$), donc convergente et

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Puis, en faisant tendre m vers l'infini, on trouve

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = 0.$$

2. Une factorisation du sinus

3. On examine ensuite le produit $\boxed{\displaystyle\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right]=1.}$$

3. Un résultat magnifique...

3. Un résultat magnifique...

Théorème (Euler)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Leonard Euler, 1707–1783

3. Un résultat magnifique...

Théorème (Euler)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Bonus tracks

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - k\pi}$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^2}$$

$$\frac{1}{\sin^4(x)} - \frac{2}{3\sin^2(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^4}$$

Indication : la dérivée logarithmique de sin est cot, la dérivée de cot est $-1/\sin^2$, la dérivée de $1/\sin^2$ est $6/\sin^4 - 4/\sin^2$...

3. Un résultat magnifique...

À l'aide du développement limité

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et de la formule

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-k\pi)^2},$$

on trouve

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x-k\pi)^2}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. Un résultat magnifique...

À l'aide du développement limité

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et de la formule

$$\frac{1}{\sin^4(x)} - \frac{2}{3\sin^2(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-k\pi)^4},$$

on trouve

$$\frac{2}{\pi^4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \lim_{x\to 0}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(x-k\pi)^4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x-k\pi)^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^4(x)} - \frac{2}{3\sin^2(x)} - \frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{45}.$$

3. Un résultat magnifique...

Corollaire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Démonstration heuristique de la première somme

Partant des deux formulations du sinus produit infini/somme infinie, on tire

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{\sin(x)}{x} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}.$$

En identifiant les coefficients de x^2 de part et d'autre :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{3!}$$

d'où le résultat.

MERCI D'ÊTRE RESTÉS JUSQU'AU BOUT !