INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes linéaires

Quelques exercices

Exercice 1 (Quelques systèmes linéaires – Énoncé)

Résoudre les systèmes suivants où a, b, c sont des paramètres :

1. $$\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x + y + 2az + t = a \\ x + by + z + t = 2b \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x - 3y - 4z = 10 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 15 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

Exercice n° 1

1. $$(S) : \begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + az = a^2 \\ (a-1)y + (1-a)z = a - a^2 \\ (1-a)y + (1-a^2)z = 1 - a^3 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2' = E_2 - E_1 \\ E_3' = E_3 - aE_1 \end{array}$$

- Si $a = 1$:

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2' \\ E_3' \end{array}$$

Les équations de **compatibilité** E_2' et E_3' sont redondantes, le système (S) est **compatible** et équivalent à E_1, il est de **rang** 1. En récrivant E_1 selon $x = 1 - y - z$, le système (S) admet une infinité de solutions données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(1 - y - z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

Exercice n° 1

1. $$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + az &=& a^2 \\ x + ay + z &=& a \\ ax + y + z &=& 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 1$:

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + az &=& a^2 \\ y - z &=& -a \\ y + (a+1)z &=& a^2 + a + 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} E_1 \\ \tilde{E}'_2 = \frac{1}{a-1} E'_2 \\ \tilde{E}'_3 = \frac{1}{1-a} E'_3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + az &=& a^2 \\ y - z &=& -a \\ (a+2)z &=& a^2 + 2a + 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} E_1 \\ \tilde{E}'_2 \\ E''_3 = \tilde{E}'_3 - \tilde{E}'_2 \end{array} \right.$$

1. $$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& az &=& a^2 \\ x &+& ay &+& z &=& a \\ ax &+& y &+& z &=& 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 1$:
  - Si $a = -2$:

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x + y + az = a^2 \\ y - z = -a \\ 0 = 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ \tilde{E}_2' \\ E_3'' \end{array}\right.$$

D'après l'équation E_3'', le système (S) est **incompatible**, il n'admet pas de solution :

$$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing.}$$

Exercice n° 1

1. $$(S) : \begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 1$:
  - $*$ Si $a \neq -2$:

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + az = a^2 \\ \quad\quad y - z = -a \\ \quad\quad\quad z = \frac{a^2+2a+1}{a+2} \end{cases}$$

On a $z = \frac{a^2+2a+1}{a+2}$, puis $y = z - a = \frac{1}{a+2}$,
puis $x = a^2 - y - az = -\frac{a+1}{a+2}$.
Le système (S) est de **rang** 3, il admet une unique solution :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{a^2+2a+1}{a+2} \right) \right\}.}$$

Exercice nº 1

1.
$$(S) : \quad \begin{cases} x + \ \ y + az = a^2 \\ x + ay + \ \ z = a \\ ax + \ \ y + \ \ z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

En résumé :

- Si $a = 1$:

$$\mathscr{S} = \{(1 - y - z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si $a = -2$:

$$\mathscr{S} = \varnothing.$$

- Si $a \in \mathbb{R} \backslash \{1, -2\}$:

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{a^2+2a+1}{a+2} \right) \right\}.$$

1. $$(S) : \quad \begin{cases} x + \ \ y + az = a^2 \\ x + ay + \ \ z = a \\ ax + \ \ y + \ \ z = 1 \end{cases} \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Interprétation géométrique

Chaque équation du système (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Notons

- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + az = a^2$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + ay + z = a$
- $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $ax + y + z = 1$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection des trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.

1. $$(S) : \begin{cases} x + y + az = a^2 & E_1 \\ x + ay + z = a & E_2 \\ ax + y + z = 1 & E_3 \end{cases}$$

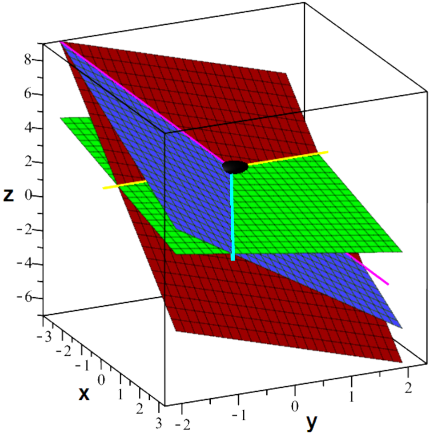
Interprétation géométrique

- Si $a \in \mathbb{R}\backslash\{1, -2\}$:

Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ sont **concourants** au point M de coordonnées $\left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{a^2+2a+1}{a+2}\right)$:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{M\}$$

Figure : cas $a = 2$



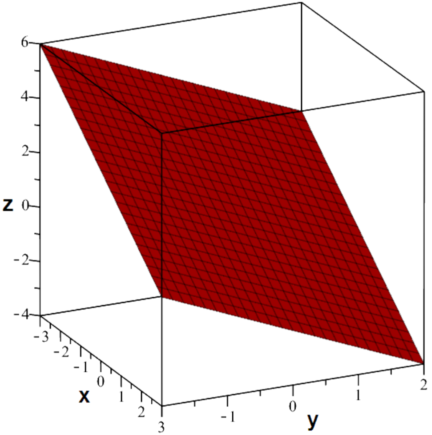
1. $$(S) : \begin{cases} x + y + az = a^2 & E_1 \\ x + ay + z = a & E_2 \\ ax + y + z = 1 & E_3 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

- Si $a = 1$:

Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ sont **identiques** (d'équation $x+y+z=1$) :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$$



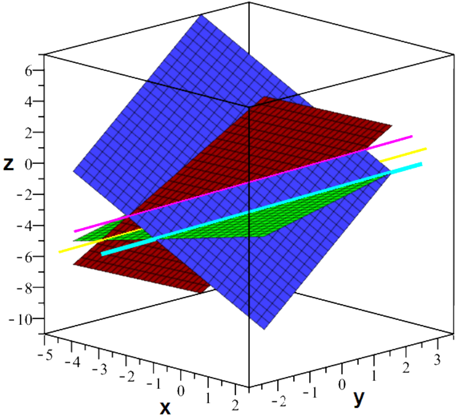
1. $$(S) : \begin{cases} x + y + az = a^2 & E_1 \\ x + ay + z = a & E_2 \\ ax + y + z = 1 & E_3 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

- Si $a = -2$:

Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ sont **disjoints dans leur ensemble** :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$$



Exercice n° 1

2.
$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ ax + by + cz = 0 & E_2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 & E_3 \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ (b-a)y + (c-a)z = 0 & E_2' = E_2 - aE_1 \\ (b^2-a^2)y + (c^2-a^2)z = 1 & E_3' = E_3 - a^2E_1 \end{cases}$$

- Si $a = b$:

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ (c-b)z = 0 & E_2' \\ (c^2-b^2)z = 1 & E_3' \end{cases}$$

En récrivant E_3' selon $(c+b)(c-b)z = 1$, les équations E_2' et E_3' entraînent $0 = 1$, elles sont donc **incompatibles**, ainsi que le système (S) :

$$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing.}$$

2.
$$(S) : \quad \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ ax + by + cz = 0 & E_2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 & E_3 \end{cases}$$

- Si $a \neq b$:

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ (b-a)y + (c-a)z = 0 & E_2' \\ (c-a)(c-b)z = 1 & E_3'' = (a+b)E_2' \end{cases}$$

  * Si $a = c$ ou $b = c$:
    l'équation E_3'' se récrit selon $0 = 1$, le système (S) est **incompatible** :

$$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing.}$$

Exercice n° 1

2.
$$(S) : \quad \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ ax + by + cz = 0 & E_2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 & E_3 \end{cases}$$

- <u>Si $a \neq b$:</u>

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ (b-a)y + (c-a)z = 0 & E_2' \\ (c-a)(c-b)z = 1 & E_3'' = (a+b)E_2' \end{cases}$$

$*$ <u>Si $a \neq c$ et $b \neq c$:</u>
On a $z = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$, puis $y = -\frac{c-a}{b-a}z = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$,
puis $x = -y - z = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.
Le système (S) est de **rang** 3, il admet une unique solution :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{1}{(a-b)(a-c)}, \frac{1}{(b-a)(b-c)}, \frac{1}{(c-a)(c-b)} \right) \right\}}.$$

2. $$(S) : \quad \left\{\begin{array}{rrrl|l} x+ & y+ & z= & 0 & E_1 \\ ax+ & by+ & cz= & 0 & E_2 \\ a^2x+ & b^2y+ & c^2z= & 1 & E_3 \end{array}\right.$$

En résumé :

- <u>Si $a=b$ ou $a=c$ ou $b=c$:</u>

$$\mathscr{S}=\varnothing.$$

- <u>Si a,b,c sont tous distincts :</u>

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{1}{(a-b)(a-c)},\frac{1}{(b-a)(b-c)},\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right)\right\}.$$

Exercice nº 1

2. $$(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 & E_1 \\ ax + by + cz = 0 & E_2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 & E_3 \end{cases}$$

Remarque :

Le système (S) est un cas particulier de **système de Vandermonde** :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b_1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_2 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = b_n \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des paramètres réels ou complexes fixés.

On sait résoudre explicitement ce système.

3. $$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2az + t = a & \Big| & E_1 \\ x + by + z + t = 2b & \Big| & E_2 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 & \Big| & E_3 \end{array}\right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} x + y + 2az + t = a & E_1 \\ (b-1)y + (1-2a)z = 2b - a & E_2' = E_2 - E_1 \\ 0y + (2-4a)z = 1 - 2a & E_3' = E_3 - 2E_1 \end{array}\right.$$

- <u>Si $b = 1$:</u>

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ll} x + y + 2az + t = a & E_1 \\ (1-2a)z = 2 - a & E_2' \\ (2-4a)z = 1 - 2a & E_3' \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x + y + 2az + t = a & E_1 \\ (1-2a)z = 2 - a & E_2' \\ 0 = -3 & E_3'' = E_3' - 2E_2' \end{array}\right.$$

Le système (S) est **incompatible** : $\boxed{\mathscr{S} = \varnothing.}$

3. $$(S):\quad \begin{cases} x+\ \ y+2az+\ \ t=a \\ x+by+\ \ \ z+\ \ t=2b \\ 2x+2y+\ 2z+2t=1 \end{cases} \left|\ \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right.$$

$$(S)\Longleftrightarrow\begin{cases} x+\qquad y+\qquad 2az+t=a \\ \qquad (b-1)y+(1-2a)z\quad =2b-a \\ \qquad\quad 0y+(2-4a)z\quad =1-2a \end{cases} \left|\ \begin{array}{l} E_1 \\ E'_2=E_2-E_1 \\ E'_3=E_3-2E_1 \end{array}\right.$$

- Si $b\neq 1$:

  $*$ Si $a=\frac{1}{2}$:
  $$(S)\Longleftrightarrow\begin{cases} x+\qquad y+z+t=\frac{1}{2} \\ \qquad (b-1)y\qquad =2b-\frac{1}{2} \\ \qquad\qquad\quad 0=0 \end{cases} \left|\ \begin{array}{l} E_1 \\ E'_2 \\ E''_3=E'_3 \end{array}\right.$$
  $$\Longleftrightarrow\begin{cases} x+y=\frac{1}{2}-z-t \\ \qquad y=\frac{4b-1}{2b-2} \end{cases} \left|\ \begin{array}{l} E_1 \\ E'_2 \end{array}\right.$$

  On a $y=\frac{4b-1}{2b-2}$, puis $x=\frac{1}{2}-y-z-t=-\frac{3b}{2b-2}-z-t$,
  et le système (S) admet une infinité de solutions données par
  $$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\left(-\frac{3b}{2b-2}-z-t,\ \frac{4b-1}{2b-2},z,t\right),\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

3 $$(S):\quad\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2az+t=a & E_1\\ x+by+z+t=2b & E_2\\ 2x+2y+2z+2t=1 & E_3\end{array}\right.$$

$$(S)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl|l} x+y+2az+t &= a & E_1\\ (b-1)y+(1-2a)z &= 2b-a & E_2'=E_2-E_1\\ 0y+(2-4a)z &= 1-2a & E_3'=E_3-2E_1\end{array}\right.$$

- Si $b\neq 1$:
  - $*$ Si $a\neq\frac{1}{2}$: $$(S)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl|l} x+y+2az &= a-t & E_1\\ (b-1)y+(1-2a)z &= 2b-a & E_2'\\ z &= \frac{1}{2} & E_3''=E_3'\end{array}\right.$$

    On a $z=\frac{1}{2}$, puis $y=\frac{4b-1}{2b-2}$, puis $x=a-y-2az-t=-\frac{4b-1}{2b-2}-t$ et le système (S) admet une infinité de solutions données par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\left(-\frac{4b-1}{2b-2}-t,\frac{4b-1}{2b-2},\frac{1}{2},t\right),\ t\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Exercice n° 1

3 $$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2az + t = a \\ x + by + z + t = 2b \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right.$$

En résumé :

- Si $b = 1$:

$$\mathscr{S} = \varnothing.$$

- Si $b \neq 1$:
  - $*$ Si $a = \frac{1}{2}$:

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{3b}{2b-2} - z - t, \frac{4b-1}{2b-2}, z, t \right),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  - $*$ Si $a \neq \frac{1}{2}$:

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{4b-1}{2b-2} - t, \frac{4b-1}{2b-2}, \frac{1}{2}, t \right),\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3

$$(S) : \begin{cases} x + y + 2az + t = a & E_1 \\ x + by + z + t = 2b & E_2 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 & E_3 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

Chaque équation du système (S) représente un hyperplan dans l'hyperespace rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{\ell}\right)$. Notons

- $\mathcal{H}_1$ l'hyperplan d'équation $x + y + 2az + t = a$
- $\mathcal{H}_2$ l'hyperplan d'équation $x + by + z + t = 2b$
- $\mathcal{H}_3$ l'hyperplan d'équation $2x + 2y + 2z + 2t = 1$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection des trois hyperplans $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$.

Exercice nº 1

3.
$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2az + t = a & E_1 \\ x + by + z + t = 2b & E_2 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 & E_3 \end{array}\right.$$

Interprétation géométrique

- Si $b = 1$: les hyperplans $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ sont **disjoints dans leur ensemble** :
$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3 = \varnothing$$
- Si $b \neq 1$:
  - Si $a = \frac{1}{2}$: $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3$ est le **plan** passant par le point de coordonnées $\left(-\frac{3b}{2b-2}, \frac{4b-1}{2b-2}, 0, 0\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{i} - \vec{\ell}$.
  - Si $a \neq \frac{1}{2}$: $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3$ est la **droite** passant par le point de coordonnées $\left(-\frac{4b-1}{2b-2}, \frac{4b-1}{2b-2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{i} - \vec{\ell}$.

Exercice nº 1

4. $$(S) : \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 & E_1 \\ 2x + y - z = -1 & E_2 \\ x - 2y + z = 15 & E_3 \\ x + y + az = 2 & E_4 \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 & E_1 \\ 7y + 7z = -21 & E_2' = E_2 - 2E_1 \\ y + 5z = 5 & E_3' = E_3 - E_1 \\ 4y + (a+4)z = -8 & E_4' = E_4 - E_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 & E_1 \\ y + z = -3 & \tilde{E}_2' = E_2'/7 \\ y + 5z = 5 & E_3' = E_3 - E_1 \\ 4y + (a+4)z = -8 & E_4' = E_4 - E_1 \end{cases}$$

Exercice n° 1

4.
$$(S):\quad \left\{\begin{array}{rcl} x-3y-4z&=&10\\ 2x+y-z&=&-1\\ x-2y+z&=&15\\ x+y+az&=&2\end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1\\ E_2\\ E_3\\ E_4\end{array}\right.$$

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{rcl} x-3y-4z&=&10\\ y+z&=&-3\\ 4z&=&8\\ az&=&4\end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1\\ \tilde{E}_2'=E_2'/7\\ E_3''=E_3'-\tilde{E}_2'\\ E_4''=E_4'-4\tilde{E}_2'\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x-3y-4z&=&10\\ y+z&=&-3\\ z&=&2\\ 0&=&4-2a\end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1\\ \tilde{E}_2'=E_2'/7\\ \tilde{E}_3''=E_3''/4\\ E_4'''=E_4''-a\tilde{E}_3''\end{array}\right.$$

Exercice nº 1

4. $$(S) : \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 15 \\ x + y + az = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 2$: l'équation E_4''' est **incompatible** ainsi que le système :
$$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing.}$$

- Si $a = 2$: l'équation de **compatibilité** E_4''' est redondante et le système (S) est équivalent à $E_1 \tilde{E}_2' E_3''$:
on a $z = 2$, puis $y = -3 - z = -5$, puis $x = 10 + 3y + 4z = 3$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(3, -5, 2)\}.}$$

4. $$(S) : \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 15 \\ x + y + az = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \right.$$

Interprétation géométrique

Chaque équation du système (S) représente un plan dans l'espace rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Notons

- $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x - 3y - 4z = 10$
- $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x + y - z = -1$
- $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $x - 2y + z = 15$
- $\mathcal{P}_4$ le plan d'équation $x + y + az = 2$

Résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection des quatre plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$.

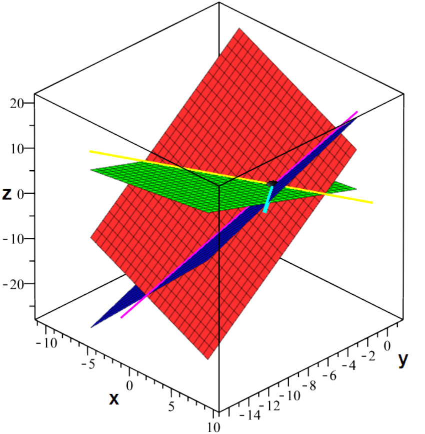
Exercice nº 1

4 $$(S) : \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 & E_1 \\ 2x + y - z = -1 & E_2 \\ x - 2y + z = 15 & E_3 \\ x + y + az = 2 & E_4 \end{cases}$$

Interprétation géométrique

Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ sont **concourants** au point M de coordonnées $(3, -5, 2)$:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{M\}$$



4

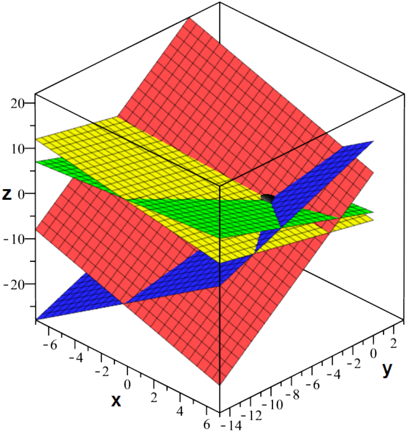
$$(S) : \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 15 \\ x + y + az = 2 \end{cases} \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}$$

Interprétation géométrique

- Si $a = 2$:

Le point M appartient au plan $\mathcal{P}_4$.
Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ sont **concourants** au point M :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_4 = \{M\}$$



4

$$(S) : \begin{cases} x - 3y - 4z = 10 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 15 \\ x + y + az = 2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{vmatrix}$$

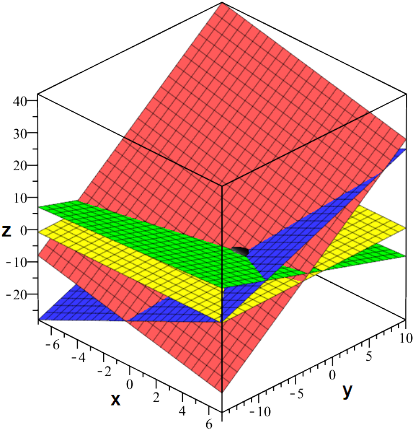
Interprétation géométrique

- Si $a \neq 2$:

Le point M n'appartient pas au plan $\mathcal{P}_4$.
Les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ sont **disjoints dans leur ensemble** :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_4 = \emptyset$$

Figure : cas $a = -30$



Exercice 2 (Un système linéaire et géométrie – Énoncé)

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

1. Déterminer, suivant les valeurs des réels a_1, a_2, …, a_n et la parité de n, le nombre de solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x_i + x_{i+1} = a_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ x_1 + x_n = a_n. \end{cases}$$

   Résoudre ensuite ce système dans les cas $n = 3$ et $n = 4$.

2. **Applications :** dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, déterminer
   - les triangles ayant pour milieux des côtés les trois points $A(1,0)$, $B(0,0)$, $C(0,1)$;
   - les rayons des trois cercles tangents entre eux centrés en A, B, C ;
   - les quadrilatères ayant pour milieux des côtés les quatre points A, B, C et $D(1,1)$.
     Plus généralement, de quel type doit être un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ pour qu'il existe des quadrilatères ayant A_1, A_2, A_3, A_4 pour milieux des côtés ?

Exercice n° 2

1. <u>Cas général :</u>

$$(S):\quad \begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 \\ \quad x_2 + x_3 & = a_2 \\ \qquad x_3 + x_4 & = a_3 \\ \qquad\quad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + x_n & = a_{n-1} \\ x_1 \qquad\qquad + x_n & = a_n \end{cases} \quad \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \\ E_{n-1} \\ E_n \end{array}$$

À l'aide de la combinaison $E'_n = E_n - E_1 + E_2 - E_3 + \cdots + (-1)^{n-1} E_{n-1}$:

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 \\ \quad x_2 + x_3 & = a_2 \\ \qquad x_3 + x_4 & = a_3 \\ \qquad\quad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + x_n & = a_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_n x_n & = a'_n \end{cases} \quad \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \\ E_{n-1} \\ E'_n \end{array}$$

avec $\alpha_n = 1 + (-1)^{n-1}$ et $a'_n = a_n - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}$.

Exercice nº 2

1. Cas général :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 & E_1 \\ \quad x_2 + x_3 & = a_2 & E_2 \\ \quad\quad x_3 + x_4 & = a_3 & E_3 \\ \quad\quad\quad \ddots & \vdots & \\ \quad\quad\quad x_{n-1} + x_n & = a_{n-1} & E_{n-1} \\ x_1 \quad\quad\quad + x_n & = a_n & E_n \end{cases}$$

- Cas n impair.

  On a $\alpha_n = 2$, le système (S) est de **rang** n.

  L'équation E'_n donne $x_n = \frac{1}{2}(a_n - a_1 + a_2 - \cdots + a_{n-1})$,
  puis l'on obtient successivement $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$.

  Ainsi, le système (S) admet une unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. <u>Cas général :</u>

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 & \mid E_1 \\ \quad x_2 + x_3 & = a_2 & \mid E_2 \\ \qquad x_3 + x_4 & = a_3 & \mid E_3 \\ \qquad\quad \ddots & \vdots & \\ \qquad\qquad x_{n-1} + x_n & = a_{n-1} & \mid E_{n-1} \\ x_1 \qquad\qquad + x_n & = a_n & \mid E_n \end{cases}$$

- <u>Cas n pair.</u>

On a $\alpha_n = 0$ et

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 & \mid E_1 \\ \quad x_2 + x_3 & = a_2 & \mid E_2 \\ \qquad x_3 + x_4 & = a_3 & \mid E_3 \\ \qquad\quad \ddots & \vdots & \\ \qquad\qquad x_{n-1} + x_n & = a_{n-1} & \mid E_{n-1} \\ 0 & = a'_n & \mid E'_n \end{cases}$$

avec $a'_n = a_n - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{n-1}$.

Exercice nº 2

1. Cas général :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 & \mid E_1 \\ \quad x_2 + x_3 & = a_2 & \mid E_2 \\ \quad\quad x_3 + x_4 & = a_3 & \mid E_3 \\ \quad\quad\quad \ddots & \vdots & \\ \quad\quad\quad\quad x_{n-1} + x_n & = a_{n-1} & \mid E_{n-1} \\ x_1 \quad\quad\quad\quad + x_n & = a_n & \mid E_n \end{cases}$$

- Cas n pair.

L'équation de **compatibilité** E_n' s'écrit

$$\boxed{(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) = 0.}$$

∗ Si cette condition n'est pas satisfaite, le système (S) est **incompatible** et $\mathscr{S} = \varnothing$.

∗ Sinon, le système (S) est **compatible** et de **rang** $(n-1)$, il admet une infinité de solutions dépendant de x_n.

Exercice n° 2

1. <u>Cas $n = 3$:</u> $(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & a_1 \\ x_2 + x_3 & = & a_2 \\ x_1 + x_3 & = & a_3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right.$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & a_1 \\ x_2 + x_3 & = & a_2 \\ -x_2 + x_3 & = & a_3 - a_1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2' = E_2 \\ E_3' = E_3 - E_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & a_1 \\ x_2 + x_3 & = & a_2 \\ 2x_3 & = & a_2 + a_3 - a_1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2' = E_2 \\ E_3'' = E_3' + E_2' \end{array}\right.$$

Ainsi $x_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1)$, puis $x_2 = a_2 - x_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)$, puis $x_1 = a_1 - x_2 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3)$.

Le système (S) est de **rang** 3, il admet une unique solution :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3), \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3), \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1)\right)\right\}.}$$

Exercice n° 2

1. <u>Cas $n = 4$:</u>

$$(S):\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 & E_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 & E_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 & E_3 \\ x_1 + x_4 = a_4 & E_4 \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 & E_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 & E_2' = E_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 & E_3' = E_3 \\ -x_2 + x_4 = a_4 - a_1 & E_4' = E_4 - E_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 & E_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 & E_2' = E_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 & E_3'' = E_3' \\ x_3 + x_4 = a_2 + a_4 - a_1 & E_4'' = E_4' + E_2' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 & E_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 & E_2' = E_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 & E_3'' = E_3' \\ 0 = a_2 + a_4 - a_1 - a_3 & E_4''' = E_4'' - E_3'' \end{cases}$$

1. Cas $n=4$:

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 & E_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 & E_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 & E_3 \\ x_1 + x_4 = a_4 & E_4 \end{cases}$$

- Si $a_1 + a_3 \neq a_2 + a_4$, alors le système (S) est **incompatible** :

$$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$$

- Si $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$, alors le système (S) est **compatible** et de **rang** 3. Il est équivalent à $E_1 E_2' E_3''$.
  On a $x_3 = a_3 - x_4$, puis $x_2 = a_2 - x_3 = a_2 - a_3 + x_4$,
  puis $x_1 = a_1 - x_2 = a_1 - a_2 + a_3 - x_4$.
  Le système (S) admet une infinité de solutions données par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(a_1 - a_2 + a_3 - x_4, a_2 - a_3 + x_4, a_3 - x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\}.}$$

2 Applications :

- On cherche les triangles $M_1M_2M_3$ dont les milieux des côtés sont A, B, C.

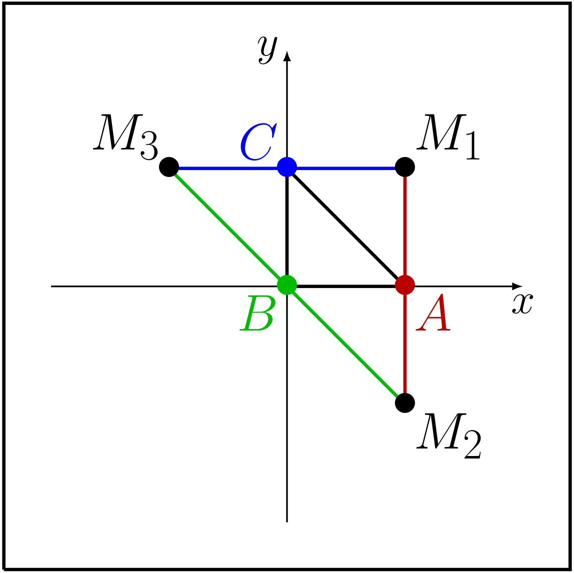
  Notons $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ les coordonnées respectives des points M_1, M_2, M_3.

  Les milieux des segments $[M_1, M_2], [M_2, M_3], [M_3, M_1]$ ont pour coordonnées
  $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right), \left(\frac{1}{2}(x_2+x_3), \frac{1}{2}(y_2+y_3)\right), \left(\frac{1}{2}(x_3+x_1), \frac{1}{2}(y_3+y_1)\right)$.

  Ils doivent coïncider avec les points A, B, C, ce qui conduit aux systèmes
  $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_3 = 2 \end{cases}$$

  Solution : $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -1)$ et $(y_1, y_2, y_3) = (1, -1, 1)$, soit
  $$\boxed{M_1(1,1), M_2(1,-1), M_3(-1,1).}$$

Exercice n° 2



2 Applications :

- On cherche les cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ centrés en A, B, C tangents entre eux.

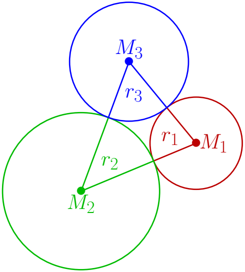
  Notons r_1, r_2, r_3 les rayons respectifs des cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

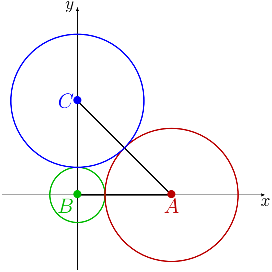
  La somme des rayons deux à deux doivent coïncider avec les distances entre les centres des cercles correspondants, ce qui conduit aux systèmes

$$\begin{cases} r_1 + r_2 \phantom{{}+r_3} = AB = 1 \\ \phantom{r_1+{}} r_2 + r_3 = BC = 1 \\ r_1 \phantom{{}+r_2} + r_3 = AC = \sqrt{2} \end{cases}$$

  Solution :

$$\boxed{r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, r_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, r_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$





2. **Applications :**

- On cherche les quadrilatères $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont A, B, C, D.

  Notons $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ les coordonnées respectives des points M_1, M_2, M_3, M_4.

  Les milieux des segments $[M_1, M_2], [M_2, M_3], [M_3, M_4], [M_4, M_1]$ ont pour coordonnées $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)), (\frac{1}{2}(x_2 + x_3), \frac{1}{2}(y_2 + y_3)),$ $(\frac{1}{2}(x_3 + x_4), \frac{1}{2}(y_3 + y_4)), (\frac{1}{2}(x_4 + x_1), \frac{1}{2}(y_4 + y_1))$.

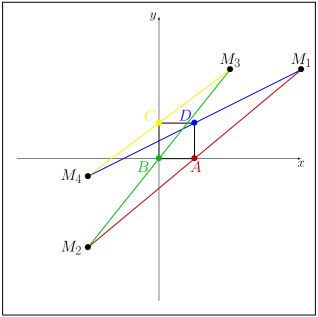
  Ils doivent coïncider avec les points A, B, C, D, ce qui conduit aux systèmes

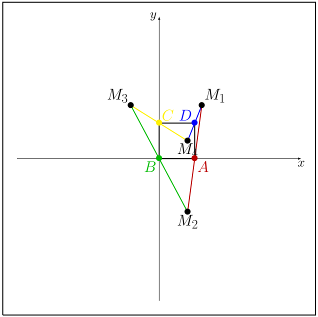
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 2 \\ \quad x_2 + x_3 & = 0 \\ \quad\quad x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 \quad\quad + x_4 & = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 & = 0 \\ \quad y_2 + y_3 & = 0 \\ \quad\quad y_3 + y_4 & = 2 \\ y_1 \quad\quad + y_4 & = 2 \end{cases}$$

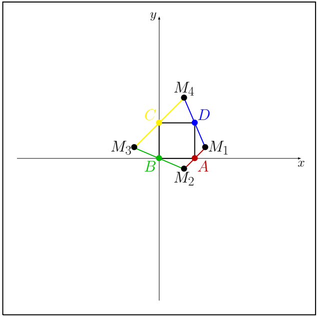
  Solution : $\begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - x_4, x_4, -x_4, x_4) \\ (y_1, y_2, y_3, y_4) = (2 - y_4, y_4 - 2, 2 - y_4, y_4) \end{cases}$, soit :

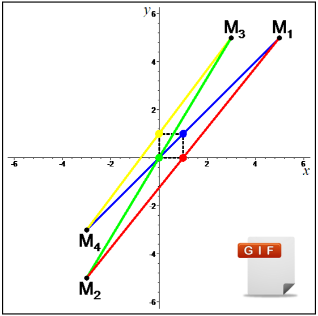
$$\boxed{M_1(2-\lambda, 2-\mu), M_2(\lambda, \mu-2), M_3(-\lambda, 2-\mu), M_4(\lambda, \mu), \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Exercice nº 2









Exercice nº 2

2. **Applications :**
   - On cherche les quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ pour lesquels il existe des quadrilatères $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont A_1, A_2, A_3, A_4.

     Notons $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)$ les coordonnées respectives des points A_1, A_2, A_3, A_4 et $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ celles des points M_1, M_2, M_3, M_4.

     Les milieux des segments $[M_1, M_2], [M_2, M_3], [M_3, M_4], [M_4, M_1]$ coïncident avec les points A_1, A_2, A_3, A_4 si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ x_3 + x_4 = 2a_3 \\ x_1 + x_4 = 2a_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 2b_1 \\ y_2 + y_3 = 2b_2 \\ y_3 + y_4 = 2b_3 \\ y_1 + y_4 = 2b_4 \end{cases}$$

     Ces systèmes admettent des solutions ssi $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$ et $b_1 + b_3 = b_2 + b_4$, ou encore ssi les segments $[A_1, A_3]$ et $[A_2, A_4]$ ont même milieu, i.e. $\boxed{A_1A_2A_3A_4 \text{ est un parallélogramme.}}$

Exercice 3 (Une fonction affine par morceaux – Énoncé)

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x < 1, \\ 4x + b & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \\ 8x + c & \text{si } 2 \leqslant x < 3, \\ 6x + d & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$$

1. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. On exprimera b, c, d en fonction de a.
2. On suppose les conditions précédentes satisfaites. Déterminer alors les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \alpha|x - 1| + \beta|x - 2| + \gamma|x - 3| + \delta x + \varepsilon.$$

Tracer la courbe représentative de f dans le cas où $a = 0$.

1. **Continuité de f :**
   - L'application f étant affine par morceaux est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1,2,3\}$.
   - f continue en $1,2,3 \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2) \\ \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = f(3) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a - 2 = b + 4 \\ b + 8 = c + 16 \\ c + 24 = d + 18 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = 6 \\ b - c = 8 \\ c - d = -6 \end{cases}$$

On obtient $b=a-6$, puis $c=b-8=a-14$, puis $d=c+6=a-8$ soit :

$$\boxed{b = a - 6, c = a - 14, d = a - 8.}$$

2. **Représentation de f :**
   - Posons $g(x) = \alpha|x-1| + \beta|x-2| + \gamma|x-3| + \delta x + \varepsilon$.
     On a

$$g(x) = \begin{cases} (-\alpha-\beta-\gamma+\delta)x + (\alpha+2\beta+3\gamma+\varepsilon) & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ (\alpha-\beta-\gamma+\delta)x + (-\alpha+2\beta+3\gamma+\varepsilon) & \text{si } x \in [1, 2] \\ (\alpha+\beta-\gamma+\delta)x + (-\alpha-2\beta+3\gamma+\varepsilon) & \text{si } x \in [2, 3] \\ (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + (-\alpha-2\beta-3\gamma+\varepsilon) & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

   - $f = g \iff \begin{cases} -\alpha-\beta-\gamma+\delta = -2 \\ \alpha-\beta-\gamma+\delta = 4 \\ \alpha+\beta-\gamma+\delta = 8 \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta = 6 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma+\varepsilon = a \\ -\alpha+2\beta+3\gamma+\varepsilon = b \\ -\alpha-2\beta+3\gamma+\varepsilon = c \\ -\alpha-2\beta-3\gamma+\varepsilon = d \end{cases}$

Exercice n° 3

2. **Représentation de f :**

- $$(S_1) : \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma-\delta = 2 \\ \alpha-\beta-\gamma+\delta = 4 \\ \alpha+\beta-\gamma+\delta = 8 \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta = 6 \end{cases} \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma+\varepsilon = a \\ -\alpha+2\beta+3\gamma+\varepsilon = b \\ -\alpha-2\beta+3\gamma+\varepsilon = c \\ -\alpha-2\beta-3\gamma+\varepsilon = d \end{cases}$$

  * $$(S_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma-\delta = 2 \\ \beta+\gamma-\delta = -1 \\ \gamma-\delta = -3 \\ \delta = 2 \end{cases} \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2' = -\frac{1}{2}(E_2-E_1) \\ E_3' = -\frac{1}{2}(E_3-E_1) \\ E_4' = \frac{1}{2}(E_4-E_1) \end{array}\right.$$

    On obtient $\delta = 2$, puis $\gamma = \delta - 3 = -1$, puis $\beta = -\gamma + \delta - 1 = 2$, puis $\alpha = -\beta - \gamma + \delta + 2 = 3$.

  * En reportant dans (S_2), on trouve $\varepsilon = a - 4 = b + 2 = c + 10 = d + 4$. On retrouve les conditions de continuité pour f. Lorsqu'elles sont satisfaites :

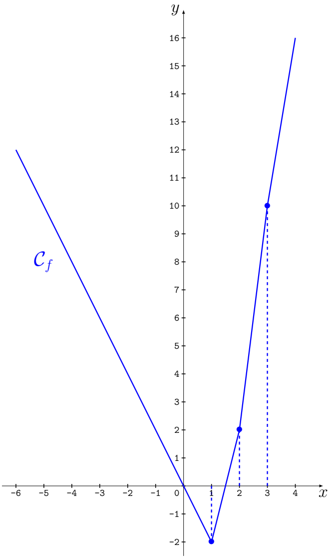
    $$\boxed{\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -1, \delta = 2, \varepsilon = a - 4.}$$

2 Courbe représentative de f :

Cas où $a = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 4x - 6 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 8x - 14 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 6x - 8 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = 3|x-1| + 2|x-2| - |x-3| + 2x - 4}$$



Exercice 4 (Racines cubiques et p^e complexes de 1 – Énoncé)

1. On définit le nombre complexe $\jmath = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$.
   - a. Calculer $\jmath^3$, puis plus généralement $\jmath^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - b. Comparer $\jmath^2$ et $\bar{\jmath}$. En déduire $1 + \jmath + \jmath^2$ et $1 + \jmath^2 + \jmath^4$.
   - c. Représenter les trois points d'affixes 1, $\jmath$ et $\bar{\jmath}$ dans le plan complexe et interpréter algébriquement et géométriquement les résultats obtenus.

2.
   - a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'inconnues u, v, w et de paramètres complexes a, b, c suivant :

$$(S_{a,b,c}) : \quad \begin{cases} u + v + w = a \\ u + \jmath\, v + \jmath^2\, w = b \\ u + \jmath^2\, v + \jmath\, w = c \end{cases}$$

     On pourra effectuer des combinaisons ad hoc des équations précédentes.
   - b. Comment faut-il choisir les paramètres a, b, c pour que u, v, w soient des nombres réels ?

Exercice 4 (Racines cubiques et p^{e} complexes de 1 – Énoncé)

3. **Application :** soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On définit les sommes

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{E[n/3]} \binom{n}{3k} \quad \Sigma_2 = \sum_{k=0}^{E[(n-1)/3]} \binom{n}{3k+1} \quad \Sigma_3 = \sum_{k=0}^{E[(n-2)/3]} \binom{n}{3k+2}$$

où $E[x]$ désigne la partie entière du réel x.

a. On rappelle la formule du binôme : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

   Déterminer les nombres a, b, c pour que $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ satisfassent au système $(S_{a,b,c})$.

b. En déduire la valeur des sommes $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Exercice 4 (Racines cubiques et p^e complexes de 1 – Énoncé)

4 a **Généralisation :** soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\,2\pi/p}$.

- Calculer ω^p. En déduire $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{p-1}$, et plus généralement $1 + \omega^n + \omega^{2n} + \omega^{3n} + \cdots + \omega^{(p-1)n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'inconnues $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$ et de paramètres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$ suivant :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_p = a_1 \\ u_1 + \omega\, u_2 + \omega^2\, u_3 + \cdots + \omega^{p-1}\, u_p = a_2 \\ u_1 + \omega^2\, u_2 + \omega^4\, u_3 + \cdots + \omega^{2(p-1)}\, u_p = a_3 \\ \qquad \vdots \\ u_1 + \omega^{p-1}\, u_2 + \omega^{2(p-1)}\, u_3 + \cdots + \omega^{(p-1)^2}\, u_p = a_p \end{cases}$$

Exercice 4 (Racines cubiques et p^e complexes de 1 – Énoncé)

4 b **Application :** soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Calculer les sommes

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{k=0}^{E[n/p]} \binom{n}{kp} \\
\Sigma_2 &= \sum_{k=0}^{E[(n-1)/p]} \binom{n}{kp+1} \\
\Sigma_3 &= \sum_{k=0}^{E[(n-2)/p]} \binom{n}{kp+2} \\
&\vdots \\
\Sigma_p &= \sum_{k=0}^{E[(n-p+1)/p]} \binom{n}{kp+p-1}
\end{aligned}$$

1. a. On a $\jmath^3 = \left(e^{i\,2\pi/3}\right)^3 = e^{i\,2\pi} = 1$, puis pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \jmath^{3p} &= (\jmath^3)^p = 1 \\ \jmath^{3p+1} &= \jmath^{3p} \times \jmath = \jmath \\ \jmath^{3p+2} &= \jmath^{3p} \times \jmath^2 = \jmath^2 \end{aligned}$$

En résumé : $$\jmath^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3} \\ \jmath & \text{si } n \text{ est un multiple de 3 plus 1} \\ \jmath^2 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3 plus 2} \end{cases}$$

b. On a $$\jmath^2 = e^{i\,4\pi/3} = e^{-i\,2\pi/3} = \bar{\jmath}.$$

On en tire, avec $\Re e(\jmath) = -\frac{1}{2}$:

$$1 + \jmath + \jmath^2 = 1 + \jmath + \bar{\jmath} = 1 + 2\,\Re e(\jmath) = 0$$

ou encore, avec $\jmath^3 = 1$: $1 + \jmath + \jmath^2 = \dfrac{\jmath^3 - 1}{\jmath - 1} = 0$

puis $$1 + \jmath^2 + \jmath^4 = 1 + \jmath + \jmath^2 = 0.$$

1 c *Interprétation algébrique :*

On a $\jmath^3 = 1$ et $(\jmath^2)^3 = (\jmath^3)^2 = 1$
donc $\jmath$ et $\jmath^2$ sont des **racines cubiques** de 1.

De plus 1 est naturellement une **racine cubique** de 1.

On a donc trouvé **3 racines distinctes** du polynôme du 3e degré $z^3 - 1$.
On a ainsi obtenu **toutes** les racines de ce polynôme **dans $\mathbb{C}$.**

En conclusion, 1 admet :

- ⋆ **une unique racine cubique dans $\mathbb{R}$** qui est 1 ;
- ⋆ **trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$** qui sont 1, $\jmath$ et $\jmath^2 = \bar{\jmath}$.

On a alors la factorisation sur $\mathbb{C}$ suivante :

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z - \jmath)(z - \jmath^2)$$

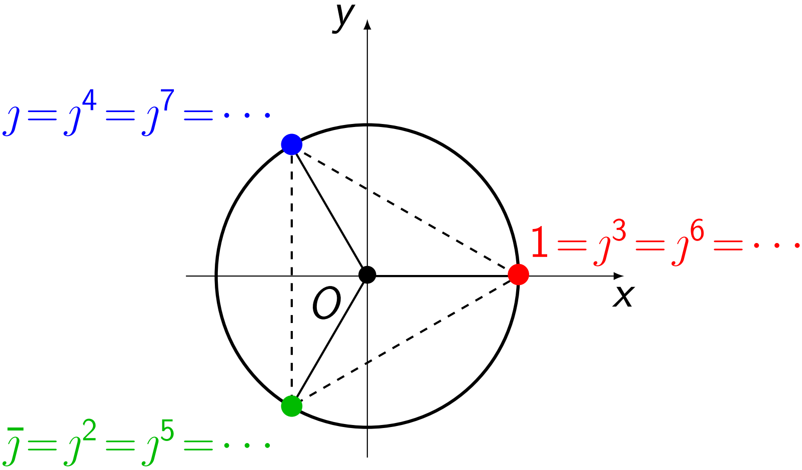
Remarque : en développant ce produit, on obtient :

$$(z - 1)(z - \jmath)(z - \jmath^2) = z^3 - (1 + \jmath + \jmath^2)z^2 + (\jmath + \jmath^2 + \jmath^3)z + \jmath^3$$

puis, par identification, on retrouve la relation $1 + \jmath + \jmath^2 = 0$.

Exercice n° 4

1 c ***Interprétation géométrique :***



Les points d'affixes $1, \jmath, \jmath^2$ forment un **triangle équilatéral de centre de gravité** $\boldsymbol{O}$.

Exercice nº 4

2.

$$(S_{a,b,c}) : \quad \begin{cases} u + \, v + \, w = a \\ u + \jmath\, v + \jmath^2\, w = b \\ u + \jmath^2\, v + \jmath\, w = c \end{cases} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right.$$

---

a. Effectuons les combinaisons linéaires des équations E_1, E_2, E_3 suivantes :

- la combinaison $E_1 + E_2 + E_3$ donne $u = \frac{1}{3}(a + b + c)$;
- la combinaison $E_1 + \jmath^2\, E_2 + \jmath\, E_3$ donne $v = \frac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c)$;
- la combinaison $E_1 + \jmath\, E_2 + \jmath^2\, E_3$ donne $w = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c)$.

Le système (S) admet donc une **unique** solution donnée par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\tfrac{1}{3}(a + b + c), \tfrac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c), \tfrac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c)\right)\right\}.}$$

Exercice nº 4

2

$$(S_{a,b,c}) : \quad \begin{cases} u + v + w = a & E_1 \\ u + \jmath\, v + \jmath^2\, w = b & E_2 \\ u + \jmath^2\, v + \jmath\, w = c & E_3 \end{cases}$$

b) Cherchons une condition **nécessaire** et **suffisante** pour que les nombres u, v, w soient **réels**.

Condition nécessaire. Supposons u, v, w **réels**. Alors :

- l'équation E_1 indique que le nombre a doit être **réel** ;
- puisque $\jmath$ et $\jmath^2$ sont conjugués, les nombres complexes $u + \jmath\, v + \jmath^2\, w$ et $u + \jmath^2\, v + \jmath\, w$ sont conjugués. Les équations E_2 et E_3 indiquent donc que les nombres b et c doivent être des complexes **conjugués**.

Condition suffisante. Supposons a **réel** et b, c **conjugués**. Alors :

- $u = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\Re\mathrm{e}(b)\big) \in \mathbb{R}$
- $v = \frac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c) = \frac{1}{3}(a + \bar{\jmath}\, b + \jmath\, c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\Re\mathrm{e}(\bar{\jmath}\, b)\big) \in \mathbb{R}$
- $w = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c) = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \bar{\jmath}\, c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\Re\mathrm{e}(\jmath\, b)\big) \in \mathbb{R}$

D'où l'équivalence : u, v, w **réels** $\Longleftrightarrow$ (a **réel** et b, c **conjugués**).

Exercice n° 4

3 a

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = \sum_{k=0}^{E[n/3]} \binom{n}{3k} + \sum_{k=0}^{E[(n-1)/3]} \binom{n}{3k+1} + \sum_{k=0}^{E[(n-2)/3]} \binom{n}{3k+2}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$$
$$+ \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$$
$$+ \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5}$$
$$+ \binom{n}{6} + \binom{n}{7} + \binom{n}{8} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Exercice nº 4

3 a

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 + \jmath\Sigma_2 + \jmath^2\Sigma_3 &= \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots \\
&\quad + \jmath\binom{n}{1} + \jmath\binom{n}{4} + \jmath\binom{n}{7} + \cdots \\
&\quad + \jmath^2\binom{n}{2} + \jmath^2\binom{n}{5} + \jmath^2\binom{n}{8} + \cdots \\
&= \binom{n}{0} + \jmath^3\binom{n}{3} + \jmath^6\binom{n}{6} + \cdots \\
&\quad + \jmath\binom{n}{1} + \jmath^4\binom{n}{4} + \jmath^7\binom{n}{7} + \cdots \\
&\quad + \jmath^2\binom{n}{2} + \jmath^5\binom{n}{5} + \jmath^8\binom{n}{8} + \cdots \\
&= \binom{n}{0} + \jmath\binom{n}{1} + \jmath^2\binom{n}{2} + \jmath^3\binom{n}{3} + \jmath^4\binom{n}{4} + \jmath^5\binom{n}{5} \\
&\quad + \jmath^6\binom{n}{6} + \jmath^7\binom{n}{7} + \jmath^8\binom{n}{8} + \cdots + \jmath^n\binom{n}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \jmath^k = (1+\jmath)^n = e^{i\, n\pi/3}
\end{aligned}
$$

Exercice n° 4

3. a. Ainsi, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ vérifient le système $(S_{a,b,c})$ avec

$$a = 2^n \qquad b = e^{i\, n\pi/3} \qquad c = \bar{b} = e^{-i\, n\pi/3}$$

b. D'où leur valeur :

$$\Sigma_1 = \frac{1}{3}[a + 2\,\Re e(b))] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left(n\,\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{3}[a + 2\,\Re e(\bar{\jmath}\, b)] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left((n-2)\,\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{3}[a + 2\,\Re e(\jmath\, b)] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left((n+2)\,\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Exercice nº 4

4 a

- On a $\omega^p = \left(e^{i\,2\pi/p}\right)^p = e^{i\,2\pi} = 1$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \omega^{np} &= (\omega^p)^n = 1 \\ \omega^{np+1} &= \omega^{np} \times \omega = \omega \\ \omega^{np+2} &= \omega^{np} \times \omega^2 = \omega^2 \\ &\vdots \\ \omega^{np+p-1} &= \omega^{np} \times \omega^{p-1} = \omega^{p-1} \end{aligned}$$

En résumé : $\omega^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } p \\ \omega & \text{si } n \text{ est un multiple de } p \text{ plus } 1 \\ \omega^2 & \text{si } n \text{ est un multiple de } p \text{ plus } 2 \\ \vdots & \\ \omega^{p-1} & \text{si } n \text{ est un multiple de } p \text{ plus } p-1 \end{cases}$

- On a $\quad 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{p-1} = \dfrac{\omega^p - 1}{\omega - 1} = 0$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \omega^n + \omega^{2n} + \omega^{3n} + \cdots + \omega^{(p-1)n} = \frac{\omega^{np} - 1}{\omega - 1} = 0$$

4 a • ***Interprétation algébrique :***

Pour tout entier k : $(\omega^k)^p = (\omega^p)^k = 1$
donc les ω^k, $k \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, sont des **racines *p*e** de 1.

On a trouvé ***p* racines distinctes** du polynôme du pe degré $z^p - 1$.
On a ainsi obtenu **toutes** les racines de ce polynôme **dans $\mathbb{C}$.**

En conclusion, 1 admet exactement ***p* racines *p*e dans $\mathbb{C}$** qui sont

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}$$

On a alors la factorisation sur $\mathbb{C}$ suivante :

$$z^p - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\dots(z-\omega^{p-1})$$

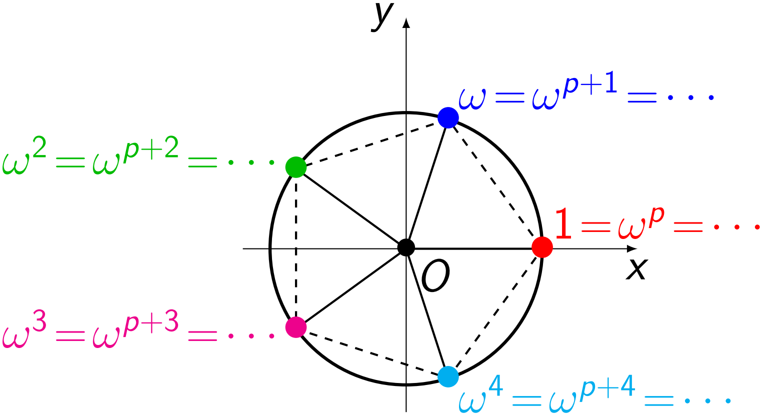
Remarque : en développant le début de ce produit, on obtient :

$$(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\dots(z-\omega^{p-1})$$
$$= z^p - (1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{p-1})z^{p-1} + \dots - 1$$

puis, par identification avec $z^p - 1$, on retrouve la relation

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{p-1} = 0$$

4 a • ***Interprétation géométrique :***



Les points d'affixes $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \dots, \omega^{p-1}$ forment un **polygone régulier à p côtés de centre de gravité O.**

Exercice n° 4

4

$$(S) : \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_p = a_1 & E_1 \\ u_1 + \omega\, u_2 + \omega^2\, u_3 + \cdots + \omega^{p-1}\, u_p = a_2 & E_2 \\ u_1 + \omega^2\, u_2 + \omega^4\, u_3 + \cdots + \omega^{2(p-1)}\, u_p = a_3 & E_3 \\ \vdots & \\ u_1 + \omega^{p-1}\, u_2 + \omega^{2(p-1)}\, u_3 + \cdots + \omega^{(p-1)^2}\, u_p = a_p & E_p \end{cases}$$

a

- la combinaison $E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_p$ fournit la relation

$$\lambda_{11} u_1 + \lambda_{12} u_2 + \lambda_{13} u_3 + \cdots + \lambda_{1p} u_p = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_{11} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = p \\ \lambda_{12} = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{(p-1)} = 0 \\ \lambda_{13} = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \cdots + \omega^{2(p-1)} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{1p} = 1 + \omega^{p-1} + \omega^{2(p-1)} + \cdots + \omega^{(p-1)^2} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$u_1 = \frac{1}{p}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p)$$

Exercice n° 4

4

$$(S) : \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_p = a_1 & E_1 \\ u_1 + \omega\, u_2 + \omega^2\, u_3 + \cdots + \omega^{p-1}\, u_p = a_2 & E_2 \\ u_1 + \omega^2\, u_2 + \omega^4\, u_3 + \cdots + \omega^{2(p-1)}\, u_p = a_3 & E_3 \\ \vdots & \\ u_1 + \omega^{p-1}\, u_2 + \omega^{2(p-1)}\, u_3 + \cdots + \omega^{(p-1)^2}\, u_p = a_p & E_p \end{cases}$$

---

a
- la combinaison $E_1 + \frac{1}{\omega}\, E_2 + \frac{1}{\omega^2}\, E_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{p-1}}\, E_p$ fournit la relation $\lambda_{21} u_1 + \lambda_{22} u_2 + \lambda_{23} u_3 + \cdots + \lambda_{2p} u_p = a_1 + \frac{1}{\omega}\, a_2 + \frac{1}{\omega^2}\, a_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{p-1}}\, a_p$

avec
$$\begin{cases} \lambda_{21} = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^{p-1}} = 0 \\ \lambda_{22} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = p \\ \lambda_{23} = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{p-1} = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_{2p} = 1 + \omega^{p-2} + \omega^{2(p-2)} + \cdots + \omega^{(p-1)(p-2)} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne
$$u_2 = \frac{1}{p}\left(a_1 + \frac{1}{\omega}\, a_2 + \frac{1}{\omega^2}\, a_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{p-1}}\, a_p\right)$$

4

$$(S) : \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_p = a_1 & E_1 \\ u_1 + \omega\, u_2 + \omega^2\, u_3 + \cdots + \omega^{p-1}\, u_p = a_2 & E_2 \\ u_1 + \omega^2\, u_2 + \omega^4\, u_3 + \cdots + \omega^{2(p-1)}\, u_p = a_3 & E_3 \\ \vdots & \\ u_1 + \omega^{p-1}\, u_2 + \omega^{2(p-1)}\, u_3 + \cdots + \omega^{(p-1)^2}\, u_p = a_p & E_p \end{cases}$$

---

a

- la combinaison $E_1 + \frac{1}{\omega^2}\, E_2 + \frac{1}{\omega^4}\, E_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{2(p-1)}}\, E_p$ fournit la relation

$$\lambda_{31} u_1 + \lambda_{32} u_2 + \lambda_{33} u_3 + \cdots + \lambda_{3p} u_p = a_1 + \frac{1}{\omega^2}\, a_2 + \frac{1}{\omega^4}\, a_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{2(p-1)}}\, a_p$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_{31} = 1 + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^4} + \cdots + \frac{1}{\omega^{2(p-1)}} = 0 \\ \lambda_{32} = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^{p-1}} = 0 \\ \lambda_{33} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = p \\ \vdots \\ \lambda_{3p} = 1 + \omega^{p-3} + \omega^{2(p-3)} + \cdots + \omega^{(p-1)(p-3)} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$u_3 = \frac{1}{p}\left(a_1 + \frac{1}{\omega^2}\, a_2 + \frac{1}{\omega^4}\, a_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{2(p-1)}}\, a_p\right)$$

Exercice nº 4

4

$$(S) : \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_p = a_1 & E_1 \\ u_1 + \omega\, u_2 + \omega^2\, u_3 + \cdots + \omega^{p-1}\, u_p = a_2 & E_2 \\ u_1 + \omega^2\, u_2 + \omega^4\, u_3 + \cdots + \omega^{2(p-1)}\, u_p = a_3 & E_3 \\ \vdots & \\ u_1 + \omega^{p-1}\, u_2 + \omega^{2(p-1)}\, u_3 + \cdots + \omega^{(p-1)^2}\, u_p = a_p & E_p \end{cases}$$

---

a

- la combinaison $E_1 + \frac{E_2}{\omega^{p-1}} + \frac{E_3}{\omega^{2(p-1)}} + \cdots + \frac{E_p}{\omega^{(p-1)^2}}$ fournit la relation

$$\lambda_{p1} u_1 + \lambda_{p2} u_2 + \lambda_{p3} u_3 + \cdots + \lambda_{pp} u_p = a_1 + \frac{a_2}{\omega^{p-1}} + \frac{a_3}{\omega^{2(p-1)}} + \cdots + \frac{a_p}{\omega^{(p-1)^2}}$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_{p1} = 1 + \frac{1}{\omega^{p-1}} + \frac{1}{\omega^{2(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)^2}} = 0 \\ \lambda_{p2} = 1 + \frac{1}{\omega^{p-2}} + \frac{1}{\omega^{2(p-2)}} + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)(p-2)}} = 0 \\ \lambda_{p3} = 1 + \frac{1}{\omega^{p-3}} + \frac{1}{\omega^{2(p-3)}} + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)(p-3)}} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{pp} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = p \end{cases}$$

ce qui donne

$$u_p = \frac{1}{p}\left(a_1 + \frac{1}{\omega^{p-1}}\, a_2 + \frac{1}{\omega^{2(p-1)}}\, a_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)^2}}\, a_p\right)$$

Calcul général : soit $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$.
La combinaison $E_1 + \frac{E_2}{\omega^{k-1}} + \frac{E_3}{\omega^{2(k-1)}} + \cdots + \frac{E_p}{\omega^{(p-1)(k-1)}}$ fournit la relation
$\lambda_{k1} u_1 + \lambda_{k2} u_2 + \lambda_{k3} u_3 + \cdots + \lambda_{kp} u_p = a_1 + \frac{a_2}{\omega^{k-1}} + \frac{a_3}{\omega^{2(k-1)}} + \cdots + \frac{a_p}{\omega^{(p-1)(k-1)}}$

avec
$$\left\{\begin{array}{rcl}
\lambda_{k1} & = & 1 + \frac{1}{\omega^{k-1}} + \frac{1}{\omega^{2(k-1)}} + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)(k-1)}} = 0 \\
\lambda_{k2} & = & 1 + \frac{1}{\omega^{k-2}} + \frac{1}{\omega^{2(k-2)}} + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)(k-2)}} = 0 \\
\lambda_{k3} & = & 1 + \frac{1}{\omega^{k-3}} + \frac{1}{\omega^{2(k-3)}} + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)(k-3)}} = 0 \\
 & \vdots & \\
\lambda_{k\,k-1} & = & 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^{2k}} + \cdots + \frac{1}{\omega^{(p-1)k}} = 0 \\
\lambda_{kk} & = & 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = p \\
\lambda_{k\,k+1} & = & 1 + \omega + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(p-1)k} = 0 \\
 & \vdots & \\
\lambda_{kp} & = & 1 + \omega^{p-k} + \omega^{2(p-k)} + \cdots + \omega^{(p-1)(p-k)} = 0
\end{array}\right.$$

ce qui donne
$$u_k = \frac{1}{p}\left(a_1 + \frac{1}{\omega^{k-1}}\, a_2 + \frac{1}{\omega^{2(k-1)}}\, a_3 + \cdots + \frac{1}{\omega^{(k-1)(p-1)}}\, a_p\right)$$

4 b $\Sigma_1 + \omega^{\ell}\Sigma_2 + \omega^{2\ell}\Sigma_3 + \cdots + \omega^{(p-1)\ell}\Sigma_p$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{p} + \binom{n}{2p} + \cdots \\
&\quad + \omega^{\ell}\binom{n}{1} + \omega^{\ell}\binom{n}{p+1} + \omega^{\ell}\binom{n}{2p+1} + \cdots \\
&\quad\quad + \omega^{2\ell}\binom{n}{2} + \omega^{2\ell}\binom{n}{p+2} + \omega^{2\ell}\binom{n}{2p+2} + \cdots \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad\quad + \omega^{(p-1)\ell}\binom{n}{p-1} + \omega^{(p-1)\ell}\binom{n}{2p-1} + \omega^{(p-1)\ell}\binom{n}{3p-1} + \cdots \\
&= \binom{n}{0} + \omega^{p\ell}\binom{n}{p} + \omega^{2p\ell}\binom{n}{2p} + \cdots \\
&\quad + \omega^{\ell}\binom{n}{1} + \omega^{(p+1)\ell}\binom{n}{p+1} + \omega^{(2p+1)\ell}\binom{n}{2p+1} + \cdots \\
&\quad\quad + \omega^{2\ell}\binom{n}{2} + \omega^{(p+2)\ell}\binom{n}{p+2} + \omega^{(2p+2)\ell}\binom{n}{2p+2} + \cdots \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad\quad + \omega^{(p-1)\ell}\binom{n}{p-1} + \omega^{(2p-1)\ell}\binom{n}{2p-1} + \omega^{(3p-1)\ell}\binom{n}{3p-1} + \cdots
\end{aligned}
$$

Exercice nº 4

4 b $\Sigma_1+\omega^{\ell}\Sigma_2+\omega^{2\ell}\Sigma_3+\cdots+\omega^{(p-1)\ell}\Sigma_p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega^{k\ell} = (1+\omega^{\ell})^n$

$$= 2^n\cos^n\left(\frac{\ell\pi}{p}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\ell n\pi/p}$$

Donc les sommes Σ_k vérifient le système (S) avec seconds membres $a_\ell = 2^n\cos^n\Big(\frac{(\ell-1)\pi}{p}\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\ell-1)n\pi/p}$, $1\leqslant \ell\leqslant p$. D'où leur valeur :

$$\begin{aligned}\Sigma_k &= \frac{1}{p}\sum_{\ell=0}^{p-1}2^n\cos^n\left(\frac{\ell\pi}{p}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\ell n\pi/p}}{\omega^{(k-1)\ell}}\\ &= \frac{2^n}{p}\left(1+\sum_{\ell=1}^{p-1}\cos^n\left(\frac{\ell\pi}{p}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\ell\big(n-2(k-1)\big)\pi/p}\right)\end{aligned}$$

Notant que la somme Σ_k est réelle, il suffit de prendre la partie réelle dans l'expression précédente :

$$\Sigma_k = \frac{2^n}{p}\left[1+\sum_{\ell=1}^{p-1}\cos^n\left(\frac{\ell\pi}{p}\right)\cos\left((n-2(k-1))\frac{\ell\pi}{p}\right)\right]$$

4 b Enfin, notons la symétrie des termes relatifs aux indices ℓ et $p-\ell$ de la somme précédente :

$$\cos^n\left(\frac{(p-\ell)\pi}{p}\right)\cos\left((n-2(k-1))\frac{(p-\ell)\pi}{p}\right) = \cos^n\left(\frac{\ell\pi}{p}\right)\cos\left((n-2(k-1))\frac{\ell\pi}{p}\right)$$

De plus, la somme contient $p-1$ termes. Lorsque p est impair, ce nombre est pair ; lorsque p est pair, ce nombre est impair et le terme du milieu associé à l'indice $p/2$ est nul. On arrive ainsi à l'expression

$$\Sigma_k = \frac{2^n}{p}\left[1 + 2\sum_{\ell=1}^{E[(p-1)/2]} \cos^n\left(\frac{\ell\pi}{p}\right)\cos\left((n-2(k-1))\frac{\ell\pi}{p}\right)\right]$$