# Les grains de blé du Grand Khong

*Aimé Lachal*

15 août 2008

## 1 Prologue

### 1.1 Le problème (source : http ://www.enigmyster.com)

Pour les nouveaux : les Khongs vivent sur une île au milieu de nulle part (de toute façon on se demande bien qui pourrait avoir envie d'y aller). C'est une tribu particulièrement sanguinaire, qui passe son temps à décréter des lois iniques et à prononcer des condamnations arbitraires, juste pour rigoler. Et aussi un peu pour le plaisir des chercheurs d'énigmes. Encore que...

Cette année-là, le Grand Khong eut une idée géniale. Enfin c'est lui qui décréta qu'elle était géniale et personne ne s'aventura à le contredire. Un jour, il y a bien longtemps, les anciens affirment que quelqu'un s'était aventuré à contredire le Grand Khong, et le soir, à la veillée, on raconte encore aux petits Khongs pour les endormir, comment il fut décapité avec une hache émoussée...

Le Grand Khong avait décidé de lever un impôt sur le blé. Pour cela, il fit rassembler dans la cour du palais toutes les récoltes, et mandata son Grand Khomptable pour effectuer le recensement des grains de blés. Il faut dire que le Grand Khong ne portait pas particulièrement le Khomptable dans son cœur, et cela n'était pas neutre dans la méthode de prélèvement qu'il avait imaginée : il fallait compter les grains un par un, et chaque fois que le numéro du grain contenait le nombre "666" (qui comme chacun le sait est le nombre du Grand Khong) alors ce grain-là devait être prélevé pour le trésor royal. Le Grand Khomptable commença donc à compter : 1, 2, 3... Arrivé à 666, il préleva le grain et le mit dans un sac, puis continua : 667, 668... préleva le 1666, puis le 2666... Cela prit évidemment un certain temps, et même un temps certain...

Pendant ce temps, le peuple Khong maudissait ces idiots de chiffres six, qui, dès qu'ils apparaissaient dans le numéro du grain, déclenchaient son prélèvement pour l'impôt. On ne l'appela bientôt plus que l'impôt sur les sots six y étaient.

Enfin un jour, le Grand Khomptable présenta au Grand Khong le résultat de son labeur. Il avait prélevé ainsi 123 456 789 grains de blé. Le Grand Khong souligna que c'était son deuxième nombre fétiche, et appela à y voir une preuve, s'il en était besoin, que cet impôt était juste et légitime. Le Grand Khomptable présenta aussi sa note d'honoraires, et il apparut que l'impôt prélevé suffisait à peine à en couvrir le montant. Le Grand Khong se dit que finalement l'idée n'était peut-être pas si bonne. Heureusement qu'il lui restait la satisfaction d'avoir obligé le Khomptable à compter tous les grains de blé un par un, et cette idée à elle seule suffisait à le ragaillardir.

L'année prochaine, il recommencerait, cette fois avec les grains de farine. Au fait, combien de grains de blé y avait-il dans la cour du palais (sachant qu'un Grand Khomptable ne se trompe jamais dans ses khomptes...) ?

## 2 Modélisation du problème

Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $N_k$ le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à $k$ contenant 666. On définit ainsi une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante en escaliers présentant des sauts d'une unité. L'application $k \in \mathbb{N} \longmapsto N_k \in \mathbb{N}$ est donc surjective. On a pour les premières valeurs de $k$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $N_k = 0$ | pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, 665\}$ | $N_k = 10$ | pour $k = 6663$ |
| $N_k = 1$ | pour $k \in \{666, \dots, 1665\}$ | $N_k = 11$ | pour $k = 6664$ |
| $N_k = 2$ | pour $k \in \{1666, \dots, 2665\}$ | $N_k = 12$ | pour $k = 6665$ |
| $N_k = 3$ | pour $k \in \{2666, \dots, 3665\}$ | $N_k = 13$ | pour $k = 6666$ |
| $N_k = 4$ | pour $k \in \{3666, \dots, 4665\}$ | $N_k = 14$ | pour $k = 6667$ |
| $N_k = 5$ | pour $k \in \{4666, \dots, 5665\}$ | $N_k = 15$ | pour $k = 6668$ |
| $N_k = 6$ | pour $k \in \{5666, \dots, 6659\}$ | $N_k = 16$ | pour $k \in \{6669, \dots, 7665\}$ |
| $N_k = 7$ | pour $k = 6660$ | $N_k = 17$ | pour $k \in \{7666, \dots, 8665\}$ |
| $N_k = 8$ | pour $k = 6661$ | $N_k = 18$ | pour $k \in \{8666, \dots, 9665\}$ |
| $N_k = 9$ | pour $k = 6662$ | $N_k = 19$ | pour $k \in \{9666, \dots, 10665\}$ |

Le problème du Grand Khong est donc de déterminer le premier entier, disons $k^*$, tel que $N_{k^*} = 123\,456\,789$.

Dans un premier temps, on considère un problème auxiliaire : pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on détermine combien de nombres à $n$ chiffres contiennent 666. On adopte la convention d'inclure parmi les nombres à $n$ chiffres tous ceux qui admettent des zéros en démarrant de la gauche. On considère par exemple que 000...001 (avec $(n-1)$ zéros) est un nombre de $n$ chiffres. On démarre de 0. On en a donc $10^n$ (de 0 à $10^n - 1$). Les nombres admettant une représentation à $n$ chiffres admettent également une représentation à $m$ chiffres pour tout $m \geqslant n$ (en rajoutant $m - n$ zéros devant). En revanche, un nombre admettant une représentation à $n$ chiffres admet une représentation à moins de chiffres si et seulement si son premier chiffre (i.e. celui de gauche) dans sa représentation à $n$ chiffres est 0.

Par ce biais, on va donc déterminer le nombre de chiffres de $k^*$.

On répartit les nombres à $n$ chiffres en 4 catégories :

- les $u_n$ nombres qui contiennent 666 ;
- les $v_n$ nombres qui finissent par 66 (et qui ne contiennent pas 666) ;
- les $w_n$ nombres qui finissent par 6 (mais pas par 66 et qui ne contiennent pas 666) ;
- les $x_n$ autres nombres.

On construit ainsi quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a évidemment $u_n = N_{10^n-1}$ et $u_n + v_n + w_n + x_n = 10^n$.

D'après le tableau ci-dessus, on observe qu'il n'y a aucun nombre de 1 ou 2 chiffres contenant 666, un seul nombre de 3 chiffres contenant 666 (666 lui-même !), dix-neuf nombres de 4 chiffres contenant 666

$$0666, 1666, 2666, 3666, 4666, 5666, 6660, 6661, 6662, 6663,$$
$$6664, 6665, 6666, 6667, 6668, 6669, 7666, 8666, 9666$$

Ainsi les toutes premières valeurs de $u_n$ valent

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = 19, \dots$$

L'objectif est de déterminer explicitement $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, on va écrire une relation de récurrence entre $u_n, v_n, w_n, x_n$ et $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, x_{n+1}$. Passer de $n$ à $(n+1)$ chiffres revient à ajouter un chiffre (0 à 9) à un nombre de $n$ chiffres. On a alors :

- $u_{n+1} = 10\,u_n + v_n$ (on rajoute n'importe quel chiffre à un nombre qui contient déjà 666 ou 6 à un nombre qui finit par 66) ;
- $v_{n+1} = w_n$ (on rajoute 6 à un nombre qui se termine par 6) ;
- $w_{n+1} = x_n$ (on rajoute 6 à un nombre autre que les précédents) ;
- $x_{n+1} = 9(x_n + v_n + w_n)$ (on rajoute n'importe que chiffre sauf 6 à un nombre qui ne contient pas déjà 666).

Pour les chiffres ($n = 1$), on a bien sûr $u_1 = v_1 = 0$, $w_1 = 1$ et $x_1 = 9$. On vient d'obtenir le système de récurrences

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 10\,u_n + v_n \\ v_{n+1} &= w_n \\ w_{n+1} &= x_n \\ x_{n+1} &= 9(v_n + w_n + x_n) \end{cases}.$$

Du fait de la contrainte $u_n + v_n + w_n + x_n = 10^n$, une fois connu $u_n, v_n, w_n$, l'inconnue $x_n$ s'en déduit automatiquement. On peut donc retirer la 4ᵉ équation et reporter $x_n = 10^n - u_n - v_n - w_n$ dans la 3ᵉ. Cela conduit au système plus simple :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 10\,u_n + v_n \\ v_{n+1} &= w_n \\ w_{n+1} &= 10^n - u_n - v_n - w_n \end{cases}.$$

On peut réécrire ces relations de récurrence en une récurrence matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En introduisant le matrice-colonne (de type $3 \times 1$) $U_n$ et la matrice carrée (de type $3 \times 3$) $A$

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = AU_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $\tilde{u}_n = u_n - 10^n$ et $\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient la relation plus simple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tilde{U}_{n+1} = A\tilde{U}_n \quad \text{avec} \quad \tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une suite matricielle (ou vectorielle si on assimile une matrice-colonne à un vecteur) géométrique dont l'expression explicite est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tilde{U}_n = A^{n-1}\tilde{U}_1.$$

Une remarque simplificatrice : en posant $\tilde{U}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on constate que $\tilde{U}_1 = A\tilde{U}_0$, et de fait

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \tilde{U}_n = A^n\tilde{U}_0.$$

On est donc amener à calculer les puissances de $A$. Pour cela, on diagonalise la matrice $A$.

## 3 Résolution du problème auxiliaire

On cherche à décomposer la matrice $A$ sous la forme $A = PDP^{-1}$ où $D$ est une matrice diagonale (dont la diagonale est composée des valeurs propres de $A$) et $P$ une matrice inversible (dont les colonnes sont les coordonnées de vecteurs propres de $A$). Sous cette forme, il est facile de calculer les puissances de $A$ selon

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

puis d'en tirer $\tilde{U}_n$ :

$$\tilde{U}_n = A^n\tilde{U}_0 = PD^nP^{-1}\tilde{U}_0.$$

Comme nous avons besoin seulement de $u_n$, il suffit de déterminer la première ligne de $\tilde{U}_n$, ce qui s'obtient facilement en multipliant $\tilde{U}_n$ à gauche par la matrice-ligne $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. On aura ainsi

$$\boxed{\tilde{u}_n = (L_0P)D^n(P^{-1}\tilde{U}_0).}$$

Remarquons finalement que $L_0P$ représente la première ligne de $P$ et que $P^{-1}\tilde{U}_0$ représente la première colonne de $-P^{-1}$.

### 3.1 Valeurs propres de $A$

Le polynôme caractéristique de $A$ se calcule, $I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ désignant la matrice unité $3\times3$, selon

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda - 10 & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 1 & 1 & \lambda + 1\end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\,\lambda^2 - 9\,\lambda - 9.$$

Les valeurs propres de $A$ sont donc les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de l'équation du 3^e^ degré $\lambda^3 - 9\,\lambda^2 - 9\,\lambda - 9 = 0$ que l'on va résoudre en faisant appel à la méthode de Cardan. Pour cela, on commence par écrire

$$\lambda^3 - 9\,\lambda^2 - 9\,\lambda - 9 = (\lambda - 3)^3 - 36(\lambda - 3) - 90.$$

On se ramène ainsi à une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 4p^3 + 27q^2$. Ici, on a $\Delta = 4 \times (-36)^3 + 27 \times (-90)^2 = 32076 = 11 \times 54^2$. Puisque $\Delta > 0$, notre équation admet 1 racine réelle et 2 racines complexes non réelles conjuguées. Les racines de l'équation générique $z^3 + pz + q = 0$ dans ce cas s'expriment, en introduisant le nombre complexe classique $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, selon

$$\begin{aligned}
z_1 &= a + b\\
z_2 &= aj + b\bar{j} = -\frac{1}{2}(a+b) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\\
z_3 &= a\bar{j} + bj = -\frac{1}{2}(a+b) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\Delta}{3}}}$ et $b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\Delta}{3}}}$

Ces formules fournissent dans le cas de l'équation $\lambda^3 - 9\,\lambda^2 - 9\,\lambda - 9 = 0$ les racines

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= a + b + 3\\
\lambda_2 &= aj + b\bar{j} + 3 = -\frac{1}{2}(a+b) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) + 3\\
\lambda_3 &= a\bar{j} + bj + 3 = -\frac{1}{2}(a+b) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) + 3
\end{aligned}$$

avec $a = \sqrt[3]{45+3\sqrt{33}}$ et $b = \sqrt[3]{45-3\sqrt{33}}$.

Ainsi les valeurs propres de la matrice $A$ s'écrivent explicitement

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt[3]{45+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{45-3\sqrt{33}} + 3 \\
\lambda_2 &= -\frac{1}{2}\Big(\sqrt[3]{45+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{45-3\sqrt{33}}\Big) + 3 + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\sqrt[3]{45+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{45-3\sqrt{33}}\Big) \\
\lambda_3 &= -\frac{1}{2}\Big(\sqrt[3]{45+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{45-3\sqrt{33}}\Big) + 3 - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\sqrt[3]{45+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{45-3\sqrt{33}}\Big)
\end{aligned}$$

Numériquement :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\approx 9.99097559... \\
\lambda_2 &\approx -0.49548779 + 0.80950897...i \\
\lambda_3 &\approx -0.49548779 - 0.80950897...i
\end{aligned}$$

## 3.2 Vecteurs propres de $A$

Déterminons ensuite les vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de $A$ : cela revient à chercher les $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ solutions de l'équation $(\lambda I - A)U = O$ soit :

$$\begin{cases} (\lambda-10)u - v = 0 \\ \lambda v - w = 0 \\ u + v - (\lambda+1)w = 0 \end{cases}$$

ou encore, en notant que la 3^e équation est automatiquement satisfaite puisque $\lambda$ est une valeur propre :

$$\begin{cases} u = u \\ v = (\lambda-10)u \\ w = \lambda v = \lambda(\lambda-10)u \end{cases}$$

On obtient ainsi une matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 - 10 & \lambda_2 - 10 & \lambda_3 - 10 \\ \lambda_1(\lambda_1-10) & \lambda_2(\lambda_2-10) & \lambda_3(\lambda_3-10) \end{pmatrix}.$$

## 3.3 Diagonalisation de $A$

On obtient alors la forme « diagonalisée » $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Quelques calculs élémentaires fournissent

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_2-10)(\lambda_3-10)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} & -\frac{\lambda_2+\lambda_3-10}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} & \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} \\ \frac{(\lambda_1-10)(\lambda_3-10)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} & -\frac{\lambda_1+\lambda_3-10}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} & \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} \\ \frac{(\lambda_1-10)(\lambda_2-10)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & -\frac{\lambda_1+\lambda_2-10}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} & \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{pmatrix}$$

Ensuite

$$\tilde{u}_n = (L_0 P) D^n (P^{-1}\tilde{U}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{(\lambda_2-10)(\lambda_3-10)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} \\ -\frac{(\lambda_1-10)(\lambda_3-10)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} \\ -\frac{(\lambda_1-10)(\lambda_2-10)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{pmatrix}.$$

Posons, pour alléger les notations,

$$\alpha_1 = \frac{(\lambda_2-10)(\lambda_3-10)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{(\lambda_1-10)(\lambda_3-10)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}, \quad \alpha_3 = \frac{(\lambda_1-10)(\lambda_2-10)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

On réécrit

$$\tilde{u}_n = -\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = -\alpha_1\lambda_1^n - \alpha_2\lambda_2^n - \alpha_3\lambda_3^n$$

et enfin

$$u_n = 10^n - \alpha_1\lambda_1^n - \alpha_2\lambda_2^n - \alpha_3\lambda_3^n.$$

Il reste à calculer les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. En remarquant que $a^3 - b^3 = 6\sqrt{33}$,

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3) &= [a(1-j)+b(1-\bar{j})][a(1-\bar{j})+b(1-j)][a(j-\bar{j})+b(j-\bar{j})] \\ &= 3i\sqrt{3}\,(a^3-b^3) = 54i\sqrt{11},\end{aligned}$$

ce qui permet de simplifier les dénominateurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-10)(\lambda_3-10)}{54i\sqrt{11}} \\ \alpha_2 &= \frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-10)(\lambda_3-10)}{54i\sqrt{11}} \\ \alpha_3 &= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-10)(\lambda_2-10)}{54i\sqrt{11}}\end{aligned}$$

En utilisant $a^3 - b^3 = 6\sqrt{33}$, $ab = 12$, $j^2 = \bar{j}$, $\bar{j}^2 = j$, $j + \bar{j} = -1$, on trouve

$$\begin{aligned}(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-10)(\lambda_3-10) &= [a(j-\bar{j})+b(j-\bar{j})][aj+b\bar{j}-7][a\bar{j}+bj-7)] \\ &= i\sqrt{3}\,(a-b)[a^2-ab+b^2+7(a+b)+49] \\ &= i\sqrt{3}\,[a^3-b^3-2ab(a-b)+7(a^2-b^2)+49(a-b)] \\ &= i\sqrt{3}\,[6\sqrt{33}+7(a^2-b^2)+25(a-b)]\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-10)(\lambda_2-10) &= [a(1-j)+b(1-\bar{j})][a+b-7][aj+b\bar{j}-7] \\ &= (j-j^2)a^3 - 2(1-j)a^2b - 2(1-\bar{j})ab^2 + (\bar{j}-\bar{j}^2)b^3 \\ &\quad - 7(1-j^2)a^2 - 7(1-\bar{j}^2)b^2 + 49(j-1)a + 49(\bar{j}-1)b \\ &= (j-\bar{j})(45+3\sqrt{33}) + (\bar{j}-j)(45-3\sqrt{33}) \\ &\quad - 7(1-\bar{j})a^2 - 7(1-j)b^2 + 25(1-j)a + 25(1-\bar{j})b \\ &= 18\,i\sqrt{11} - 7(1-\bar{j})a^2 - 7(1-j)b^2 + 25(1-j)a + 25(1-\bar{j})b\end{aligned}$$

et par conjugaison, puisque $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$,

$$(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-10)(\lambda_3-10) = -18\,i\sqrt{11} - 7(1-j)a^2 - 7(1-\bar{j})b^2 + 25(1-\bar{j})a + 25(1-j)b$$

Maple fournit les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha_1 \approx 1.001711695...$$
$$\alpha_2 \approx -0.000855847... + i\,0.005512731...$$
$$\alpha_3 \approx -0.000855847... - i\,0.005512731...$$

puis les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = 19, \quad u_5 = 280, \quad u_6 = 3\,700, \quad u_7 = 45\,991,$$
$$u_8 = 549\,739, \quad u_9 = 6\,394\,870, \quad u_{10} = 72\,915\,400, \quad u_{11} = 818\,740\,081, \quad u_{12} = 9\,082\,453\,159, \ldots$$

## 4 Épilogue

Au vu des premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on observe que 123 456 789 est compris entre $u_{10}$ et $u_{11}$. Donc $k^*$ est un nombre à 11 chiffres (et pas 10, donc le premier chiffre n'est pas 0).

Déterminons son premier chiffre.

- De 00 000 000 000 à 09 999 999 999 on a $u_{10} = 72\,915\,400$ nombres qui contiennent 666. Il reste à en trouver $123\,456\,789 - 72\,915\,400 = 59\,541\,389$.
- De 10 000 000 000 à 19 999 999 999 on a également $u_{10} = 72\,915\,400$ nombres qui contiennent 666 : c'est trop, le premier chiffre de $k^*$ est 1.
- de 10 000 000 000 à 15 999 999 999, on a $6\,u_9$ nombres contenant 666 : il reste à trouver $59\,541\,389 - 6 \times 6\,394\,870 = 21\,172\,169$ nombres ;
- de 16 000 000 000 à 16 599 999 999, on a $6\,u_8$ nombres contenant 666 : il reste à trouver $21\,172\,169 - 6 \times 549\,739 = 17\,873\,735$ nombres ;
- de 16 600 000 000 à 16 659 999 999, on a $6\,u_7$ nombres contenant 666 : il reste à trouver $17\,873\,735 - 6 \times 45\,991 = 8\,597\,789$ nombres.

À cette étape, on atteint 16 660 000 000 à partir duquel les 10 000 000 nombres suivants contiennent 666. Comme il n'en faut plus que 8 597 789, notre nombre $k^*$ se trouve parmi cette succession. Le premier étant 16 660 000 000, le dernier sera 16 668 597 788, qui est le nombre recherché.

$$\boxed{k^* = 16\,668\,597\,788}$$

## 5 Un petit algorithme

À partir du système de récurrences

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 10\,u_n + v_n \\ v_{n+1} &= w_n \\ w_{n+1} &= x_n \\ x_{n+1} &= 9(v_n + w_n + x_n) \end{cases}$$

on peut monter un tableau simple $u - v - w - x$ :

1re ligne : $0 - 0 - 1 - 9$ (nombres à 1 chiffre : 1 nombre finissant par 6, et les 9 autres) ;

2e ligne : $0 - 1 - 9 - 90$ (nombres à 2 chiffres : 1 nombre finissant par 66, 9 nombres finissant par 6, et les 90 autres) ;

3e ligne : $1 - 9 - 90 - 900$ (nombres à 3 chiffres : 1 nombre finissant par 666, 9 nombres finissant par 66, 90 nombres finissant par 6 et les 900 autres).

On remplit le tableau de proche en proche : le premier terme ($u$) s'obtient au prix d'une multiplication par 10 et une addition, les termes $v$ et $w$ sont de simples reports des valeurs $w$ et $x$ de la ligne précédente, $x$ s'obtient soit en additionnant les $v$, $w$ et $x$ de la ligne précédente et en les multipliant par 9, soit en retranchant de $10^n$ les $u$, $v$ et $w$ déjà écrits sur la ligne. On continue jusqu'à dépasser 123 456 789 pour $u$ :

| $n$ | $u$ | $v$ | $w$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| 2 | 0 | 1 | 9 | 90 |
| 3 | 1 | 9 | 90 | 900 |
| 4 | 19 | 90 | 900 | 8 991 |
| 5 | 280 | 900 | 8 991 | 89 829 |
| 6 | 3 700 | 8 991 | 89 829 | 897 480 |
| 7 | 45 991 | 89 829 | 897 480 | 8 966 700 |
| 8 | 549 739 | 897 480 | 8 966 700 | 89586 081 |
| 9 | 6 394 870 | 8 966 700 | 89 586 081 | 895 342 059 |
| 10 | 72 915 400 | 89 586 081 | 895 342 059 | 8 942 156 460 |
| 11 | 818 740 081 | 895 342 059 | 8 942 156 460 | 89 343 761 400 |

On calcule ainsi progressivement les termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## 6 Lien avec les suites de Fibonacci

Appliquons la fonction polynôme $\lambda \longmapsto \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda - 9$ à la matrice $A$ : les trois premières puissances de $A$ s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 999 & 99 & 9 \\ -9 & 0 & 0 \\ -90 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $A^3 - 9\,A^2 - 9\,A - 9\,I = O$. En fait, c'est le théorème de Cayley-Hamilton ! On en déduit que

$$U_{n+3} - 9\,U_{n+2} - 9\,U_{n+1} - 9\,U_n = (A^3 - 9\,A^2 - 9\,A - 9\,I)U_n = O$$

et l'on obtient la relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 9(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) + 10^n$$

avec conditions initiales $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0$.

**Remarque.** — On peut retrouver cette récurrence en faisant l'inventaire des nombres à $(n+1)$ chiffres contenant 666 en fonction des nombres d'entiers à $n$, $(n-1)$, $(n-2)$ chiffres :

- de $0 = \underbrace{0\ldots0}_{(n+1)\,\text{chiffres}}$ à $6.10^n - 1 = 5\,\underbrace{9\ldots9}_{n\,\text{chiffres}}$ il y a $6\,u_n$ nombres contenant 666 ;
- de $6.10^n = 6\,\underbrace{0\ldots0}_{n\,\text{chiffres}}$ à $66.10^{n-1} - 1 = 65\,\underbrace{9\ldots9}_{n-1\,\text{chiffres}}$ il y a $6\,u_{n-1}$ nombres contenant 666 ;
- de $66.10^{n-1} = 66\,\underbrace{0\ldots0}_{n-1\,\text{chiffres}}$ à $665.10^{n-2} - 1 = 665\,\underbrace{9\ldots9}_{n-2\,\text{chiffres}}$ il y a $6\,u_{n-2}$ nombres contenant 666 ;
- de $666.10^{n-2} = 666\,\underbrace{0\ldots0}_{n-2\,\text{chiffres}}$ à $667.10^{n-2} - 1 = 666\,\underbrace{9\ldots9}_{n-2\,\text{chiffres}}$ il y a $10^{n-2}$ nombres contenant 666 ;
- de $667.10^{n-2} = 667\,\underbrace{0\ldots0}_{n-2\,\text{chiffres}}$ à $67.10^{n-1} - 1 = 66\,\underbrace{9\ldots9}_{n-1\,\text{chiffres}}$ il y a $3\,u_{n-2}$ nombres contenant 666 ;
- de $67.10^{n-1} = 67\,\underbrace{0\ldots0}_{n-1\,\text{chiffres}}$ à $7.10^n - 1 = 6\,\underbrace{9\ldots9}_{n\,\text{chiffres}}$ il y a $3\,u_{n-1}$ nombres contenant 666 ;
- de $7.10^n = 7\,\underbrace{0\ldots0}_{n\,\text{chiffres}}$ à $10^{n+1} - 1 = 9\,\underbrace{9\ldots9}_{n+1\,\text{chiffres}}$ il y a $3\,u_n$ nombres contenant 666.

La comptabilisation de cet inventaire donne

$$u_{n+1} = 9\,u_n + 9\,u_{n-1} + 9\,u_{n-2} + 10^{n-2}$$

qui n'est autre que la relation de récurrence obtenue par l'approche matricielle.

Plus simplement, la suite $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\tilde{u}_n = u_n - 10^n$ vérifie la récurrence de type Fibonacci à 4 indices :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \tilde{u}_{n+3} = 9(\tilde{u}_{n+2} + \tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_n).$$

avec conditions initiales $\tilde{u}_0 = -1, \tilde{u}_1 = -10, \tilde{u}_2 = -100$. L'équation caractéristique associée à cette récurrence n'est autre que l'équation aux valeurs propres de $A$, à savoir $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda - 9 = 0$. La suite est donc une combinaison linéaire de suites géométriques de raisons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :

$$\tilde{u}_n = \tilde{\alpha}_1\lambda_1^n + \tilde{\alpha}_2\lambda_2^n + \tilde{\alpha}_3\lambda_3^n$$

où les coefficients $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ vérifient le système de Vandermonde

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 = -1 \\ \lambda_1\tilde{\alpha}_1 + \lambda_2\tilde{\alpha}_2 + \lambda_3\tilde{\alpha}_3 = -10 \\ \lambda_1^2\tilde{\alpha}_1 + \lambda_2^2\tilde{\alpha}_2 + \lambda_3^2\tilde{\alpha}_3 = -100 \end{cases}$$

La solution de ce système est donnée par

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_1 &= \frac{-\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) + 10(\lambda_3^2-\lambda_2^2) - 100(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} = \frac{-\lambda_2\lambda_3 + 10(\lambda_2+\lambda_3) - 100}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \\
\tilde{\alpha}_2 &= \frac{-\lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) + 10(\lambda_1^2-\lambda_3^2) - 100(\lambda_1-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} = \frac{\lambda_1\lambda_3 - 10(\lambda_1+\lambda_3) + 100}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \\
\tilde{\alpha}_3 &= \frac{-\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) + 10(\lambda_2^2-\lambda_1^2) - 100(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} = \frac{-\lambda_1\lambda_2 + 10(\lambda_1+\lambda_2) - 100}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}
\end{aligned}$$

On constate que $\tilde{\alpha}_1 = -\alpha_1$, $\tilde{\alpha}_2 = -\alpha_2$, $\tilde{\alpha}_2 = -\alpha_2$ et l'on retrouve

$$u_n = 10^n - \alpha_1\lambda_1^n - \alpha_2\lambda_2^n - \alpha_3\lambda_3^n.$$