Les sucres du Grand Khong

Aimé Lachal

15 août 2008

1 Prologue

1.1 Le problème (source : http ://www.enigmyster.com)

Tjiuuuuu trrrrrr kluk... Vous voici sur un étrange balkhong recouvert de flokhongs. Un Gaskhong au teint rubikhong avec un faukhong sur l'épaule boit goulûment à même un flakhong de cristal. Puis il vous tend un document abskhong...

Tous les matins, le Grand Khong mettait exactement sept sucres et demi dans son café au lait. Ce n'est pourtant pas qu'il eût un goût particulier pour le sucre. Son médecin lui avait d'ailleurs formellement déconseillé le sucre, qui était mauvais pour son diabète. Il lui avait également déconseillé le café, qui faisait monter sa tension, le lait, qui lui donnait du cholestérol (en fait le médecin n'avait pas vraiment dit « diabète » ni « cholestérol », mais là, on vous fait une version doublée et colorisée), et des tas d'autres choses sous les prétextes les plus divers, si bien que le Grand Khong l'avait fait exécuter. Cela l'avait d'ailleurs beaucoup amusé (le Grand Khong, pas le médecin), et cela tombait bien vu qu'il (le médecin) lui avait recommandé de rire souvent (au Grand Khong), car c'était bon pour son cœur et arrêtez de m'interrompre tout le temps !

Mais en ces temps reculés et en ces lieux incertains, le sucre était une denrée rare et chère, considérée comme un attribut de pouvoir et une preuve de noblesse. Le Grand Khong se devait de tenir son rang et avait donc décoré sa salle à manger avec 666 boîtes de sucre, que des serviteurs étaient chargés de maintenir pleines en permanence. Histoire de leur compliquer un peu la vie, il tirait au sort chaque matin (avec un dé à 666 faces) le numéro de la boîte où il prenait ses sucres. Si elle ne contenait que des sucres entiers, il en cassait un en deux et remettait la moitié restante dans la boîte ; si elle contenait déjà un demi-sucre, il le prenait. Quand ils remplissaient la boîte, les serviteurs avaient pour instruction de laisser le demi-sucre, s'il y en avait un dans la boîte, sur le dessus. Le Grand Khomptable avait pour mission de superviser le travail des serviteurs, afin d'éviter qu'ils ne dérobassent un demi-sucre, voire un morceau entier, on ne peut vraiment faire confiance à personne !

Un jour, il fit remarquer au Grand Khong : « Tiens, c'est amusant, il y a exactement 111 demi-sucres dans les boîtes. » Le Grand Khong le gratifia d'un regard vitreux : il ne voyait pas ce que cela pouvait avoir d'amusant. Sauf que « amusant » lui rappelait son médecin, et que justement cela lui donnait des idées pour le Grand Khomptable.

Interprétant sans doute mal la lueur d'intérêt qui illumina alors le visage du Grand Khong, le Grand Khomptable continua : « Oui, parce qu'au début, il n'y avait pas de demi-sucre. Le soir du premier jour, il y en avait un c'est sûr. Le soir du deuxième jour, il pouvait y en avoir deux, le troisième jour jusqu'à trois, etc. D'ailleurs c'est un problème particulièrement amusant. Par exemple, le soir du 123 456 789ᵉ jour, la probabilité pour qu'il y ait exactement 333 demi-sucres sera de... ». Là, le Grand Khomptable s'arrêta net. La répétition du mot « amusant » avait définitivement sorti le Grand Khong de sa torpeur, et le sourire cruel qu'il arborait à présent laissait peu de place au doute quant à ses intentions... « Bon ce n'est pas le tout, j'ai un tas de blé dans la cour... » lâcha le Grand Khomptable alors qu'il refermait déjà la porte derrière lui. C'est bien connu, la prudence est une des premières qualités de tout Khomptable.

Quelle est la probabilité pour qu'au soir du 123 456 789^e jour, les 666 boîtes du Grand Khong contiennent un nombre de demi-sucres (déjà coupés, donc) valant exactement 333 ? Et le soir du 1 234 567 890^e jour ?

1.2 Discussion

Le problème des sucres du Grand Khong peut est décrit de manière alternative selon une allégorie mystico-sibylline du ploutocrate sortant d'un pandémonium de sybarites dévoyés où il a croisé quelque échanson dionysiaque, et qui cherche à rejoindre bon an mal an son gynécée. Modélisation :

point A = pandémonium, point B = gynécée, distance de A à B = 666 m.

À chaque mètre parcouru, le ploutocrate se pose le problème cornélien suivant : doit-il faire un mètre en avant ou un mètre en arrière ? Le choix est fait au hasard. La question posée est la suivante : en lui imposant la règle de rebrousser chemin dès que l'un des deux points A et B est atteint (il oscille donc entre A et B), quelle est la probabilité que le ploutocrate se trouve à 333 m de A (ou de B) au bout de 123456789 pas (d'un mètre) ? au bout de 1234567890 pas ? (NDLR : la réponse à la deuxième question est triviale ! En revanche, celle de la première l'est nettement moins...)

C'est la célèbre marche aléatoire du dipsomane impénitent (i.e. ivrogne) ou du périssodactyle capricant (i.e. bourrin), ou encore du sphéniscidé claudiquant (i.e. manchot)... Dans le cas de la marche aléatoire classique, les probabilités d'aller en avant ou en arrière sont constantes au cours du temps. Dans notre problème, elles dépendent de la position du ploutocrate au k^e pas :
- probabilité de se mouvoir en avant : k/N ;
- probabilité de se mouvoir en arrière : $1 - k/N$.

Il s'agit du modèle d'urnes d'Ehrenfest (utilisé en thermodynamique pour étudier les échanges thermiques), c'est une chaîne de Markov célèbre.

2 Le problème du Grand Khong

Le Grand Khong choisit une boîte au hasard, puis :
- s'il y a un demi-sucre dans cette boîte, il le prend et il y en a un de moins dans la totalité des boîtes ;
- s'il n'y a pas de demi-sucre dans cette boîte, il casse un sucre entier, prend un des deux demi-sucre et laisse l'autre. Il reste un demi-sucre dans la totalité des boîtes.

Ainsi, si le soir du n^e jour, il y a k demi-sucres dans la totalité des boîtes, le soir du $(n+1)^e$ jour, il y a soit $k+1$ demi-sucres soit $k-1$ demi-sucres. Il reste donc
- $k-1$ demi-sucres avec la probabilité d'avoir choisi une bonne boîte (il y a k telles boîtes parmi les N), probabilité $= k/N$;
- $k+1$ demi-sucres avec la probabilité d'avoir choisi une mauvaise boîte (il y en a $N-k$ parmi les N), probabilité $= (N-k)/N = 1 - k/N$.

Cas particuliers : le raisonnement précédent est valable pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$.
- Pour $k = 0$, il n'y a pas de demi-sucre, donc quelle que soit la boîte choisie, le Grand Khong doit casser un sucre entier, il reste donc ensuite un demi-sucre dans la totalité des boîtes (et ce avec la probabilité 1).
- Pour $k = N$, toutes les boîtes contiennent un demi-sucre, le Grand Khong n'a pas à casser de sucre, il prend le demi-sucre présent dans la boîte choisie et il reste $N-1$ demi-sucres dans la totalité des boîtes (et ce avec la probabilité 1).

La table 1 ci-dessous résume la discussion précédente.

jour	n^{e}	$(n+1)^{e}$	probabilité
	0	1	1
nombre de demi-sucres	k $(1\leqslant k\leqslant N-1)$	$\nearrow k-1$	k/N
		$\searrow k+1$	$1-k/N$
	N	$N-1$	1

TABLE 1 – Partant du n^{e} jour

Notons $p_{k,n} = \text{Prob}(\text{le soir du } n^{e} \text{ jeu, il y a } k \text{ demi-sucres})$.

Remarque :

- au démarrage du processus (soir du $n = 0^{e}$ jour), il n'y a pas de demi-sucre ;
- au soir du $n = 1^{er}$ jour, il y a un demi-sucre ;
- au soir du $n = 2^{e}$ jour, il y a 0 ou 2 demi-sucres ;
- au soir du $n = 3^{e}$ jour, il y a 1 ou 3 demi-sucres ;
- au soir du $n = 4^{e}$ jour, il y a 0, 2 ou 4 demi-sucres, etc.

On voit de proche en proche que le numéro n du jour et le nombre k de demi-sucres ont la même parité. Ainsi, lorsque n et k n'ont pas la même parité, $p_{k,n} = 0$. On peut ainsi répondre d'ores et déjà à la question correspondant au cas $n = 1234567890$: $k = 333$ et n n'ont pas la même parité, donc $p_{333,n} = 0$, la probabilité demandée est nulle !

Examinons la situation le soir du $(n+1)^{e}$ jour : il y a k demi-sucres. À l'aide de la table 1, on voit qu'il y avait donc la veille $k-1$ demi-sucres (avec probabilité $1-(k-1)/N$) ou $k+1$ demi-sucres (avec probabilité $(k+1)/N$). Voir table 2.

jour	n^{e}	$(n+1)^{e}$	probabilité
	1	0	1/N
nombre de demi-sucres	$k-1$	$\searrow$	$(k+1)/N$
	$k+1$	$\nearrow k$	$1-(k-1)/N$
	$N-1$	N	1/N

TABLE 2 – Partant du $(n+1)^{e}$ jour

Cette discussion nous permet d'exprimer $p_{k,n+1}$ en fonction de $p_{k-1,n}$ et $p_{k+1,n}$:

$$\begin{aligned}
p_{k,n+1} &= \text{Prob}(\text{le soir du } (n+1)^{e} \text{ jour, il y a } k \text{ demi-sucres})\\
&= \text{Prob}(\text{le soir du } n^{e} \text{ jour, il y a } k+1 \text{ demi-sucres et Khong a choisi une bonne boîte})\\
&\quad + \text{Prob}(\text{le soir du } n^{e} \text{ jour, il y a } k-1 \text{ demi-sucres et Khong a choisi une mauvaise boîte})\\
&= \frac{k+1}{N}\,\text{Prob}(\text{le soir du } n^{e} \text{ jour, il y a } k+1 \text{ demi-sucres})\\
&\quad + \left(1-\frac{k-1}{N}\right)\text{Prob}(\text{le soir du } n^{e} \text{ jour, il y a } k-1 \text{ demi-sucres})
\end{aligned}$$

d'où la récurrence, pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$:

$$p_{k,n+1} = \frac{k+1}{N}\,p_{k+1,n} + \left(1-\frac{k-1}{N}\right)p_{k-1,n}.$$

Pour $k = 0$ et $k = N$, on a les relations

$$p_{0,n+1} = \frac{1}{N}\,p_{1,N} \quad \text{et} \quad p_{N,n+1} = \frac{1}{N}\,p_{N-1,N}.$$

3 Résolution du problème

Les données du problème sont les suivantes : $N = 666$, $k = 333$ et $n = 123456789$. Comme n est grand, on pourrait considérer que $p_{k,n}$ et $p_{k,n+1}$ sont sensiblement identiques : grave erreur ! car nous avons remarqué que les parités de k et de n jouaient un rôle important. En fait, on peut considérer que $p_{k,n}$ et $p_{k,n+2}$ sont sensiblement identiques. Formalisons ceci en distinguant les n pairs et les n impairs : on pose

$$q_k = \lim_{n\to\infty,\, n \text{ pair}} p_{k,n} \quad \text{et} \quad r_k = \lim_{n\to\infty,\, n \text{ impair}} p_{k,n}.$$

La remarque faite sur la parité montre que $q_k = 0$ pour les k impairs et que $r_k = 0$ pour les k pairs. D'autre part, comme les $p_{k,n}, 0 \leqslant k \leqslant N$, constituent une loi de probabilité, on a la relation $\sum_{k=0}^{N} p_{k,n} = 1$ et donc

$$\sum_{k=0}^{N} q_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N} r_k = 1.$$

La relation de récurrence de la section précédente donne, à la limite, le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_k & = & \dfrac{k+1}{N}\, q_{k+1} + \left(1 - \dfrac{k-1}{N}\right) q_{k-1} \\ q_k & = & \dfrac{k+1}{N}\, r_{k+1} + \left(1 - \dfrac{k-1}{N}\right) r_{k-1} \end{array}\right.$$

avec les conditions

$$r_0 = \frac{1}{N}\, q_1 \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{1}{N}\, r_1.$$

Introduisons ensuite $u_k = q_k + r_k$. On a

$$u_k = \left\{\begin{array}{ll} q_k & \text{si } k \text{ est pair,} \\ r_k & \text{si } k \text{ est impair.} \end{array}\right.$$

En ajoutant les deux équations du système précédent, on obtient

$$u_k = \frac{k+1}{N}\, u_{k+1} + \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) u_{k-1}$$

avec $u_0 = \frac{1}{N} u_1$ et $\sum_{k=0}^{N} u_k = 2$. Invoquons à présent une petite astuce d'initié : on écrit le coefficient 1 devant u_k sous la forme $1 = \frac{k}{N} + (1 - \frac{k}{N})$, ce qui conduit à

$$\frac{k+1}{N}\, u_{k+1} - \left(1 - \frac{k}{N}\right) u_k = \frac{k}{N}\, u_k - \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) u_{k-1}.$$

On voit ainsi que la suite de terme général $u'_k = \frac{k+1}{N}\, u_{k+1} - (1 - \frac{k}{N}) u_k$ est constante puisque $u'_k = u'_{k-1}$ pour tout k, constante de valeur $u'_1 = \frac{1}{N}\, u_1 - u_0 = 0$. Ainsi, pour tout k, $u'_k = 0$, puis $\frac{k+1}{N}\, u_{k+1} - (1 - \frac{k}{N}) u_k = 0$, soit

$$u_k = \frac{N-k+1}{k}\, u_{k-1}$$

qui donne, en extrapolant,

$$\begin{array}{lcl} u_k & = & \dfrac{N+1-k}{k}\, u_{k-1} = \dfrac{(N-k+2)(N-k+1)}{k(k-1)}\, u_{k-2} \\ & = & \cdots = \dfrac{N(N-1)\cdots(N-k+2)(N-k+1)}{k(k-1)\cdots 2.1}\, u_0 = \dbinom{N}{k} u_0. \end{array}$$

Enfin, la condition $\sum_{k=0}^{N} u_k = 2$ et l'identité $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$ donnent $u_0 = 2/2^N$ puis

$$u_k = \frac{\binom{N}{k}}{2^{N-1}}.$$

Ainsi, puisque $u_k = q_k$ lorsque k pair et $u_k = r_k$ lorsque k impair, on obtient l'approximation pour n grand de même parité que k :

$$\boxed{p_{k,n} \approx \frac{\binom{N}{k}}{2^{N-1}}.}$$

Lorsque k et n n'ont pas la même parité, on a tout simplement $p_{k,n} = 0$.

Réponse au problème posé : pour $k = 333$, $N = 666$ et $n = 123456789$, k et n ont la même parité et on peut considérer que n est grand (!), donc

$$p_{k,n} \approx \frac{\binom{666}{333}}{2^{665}} = \frac{666!}{333!^2 \times 2^{665}} \approx 0,06181159056 \approx 61812 \times 10^{-6}.$$

Pour $n = 1234567890$, comme nous l'avions anoncé, la réponse est triviale : $p_{k,n} = 0$!

Les probabilités recherchées sont donc respectivement 061812 millionièmes et 0.