Atteinte de cercles concentriques par le mouvement brownien plan

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'origine K d'axes Kx, Ky.

- Soit $\mathcal{C}_{a,b}$ une couronne de centre K de rayons a et b, $0<a<b$:

$$\mathcal{C}_{a,b} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a < \sqrt{x^2+y^2} < b \}$$ de frontière $C_a \cup C_b$

où C_a et C_b sont les cercles de centre K de rayons respectifs a et b.

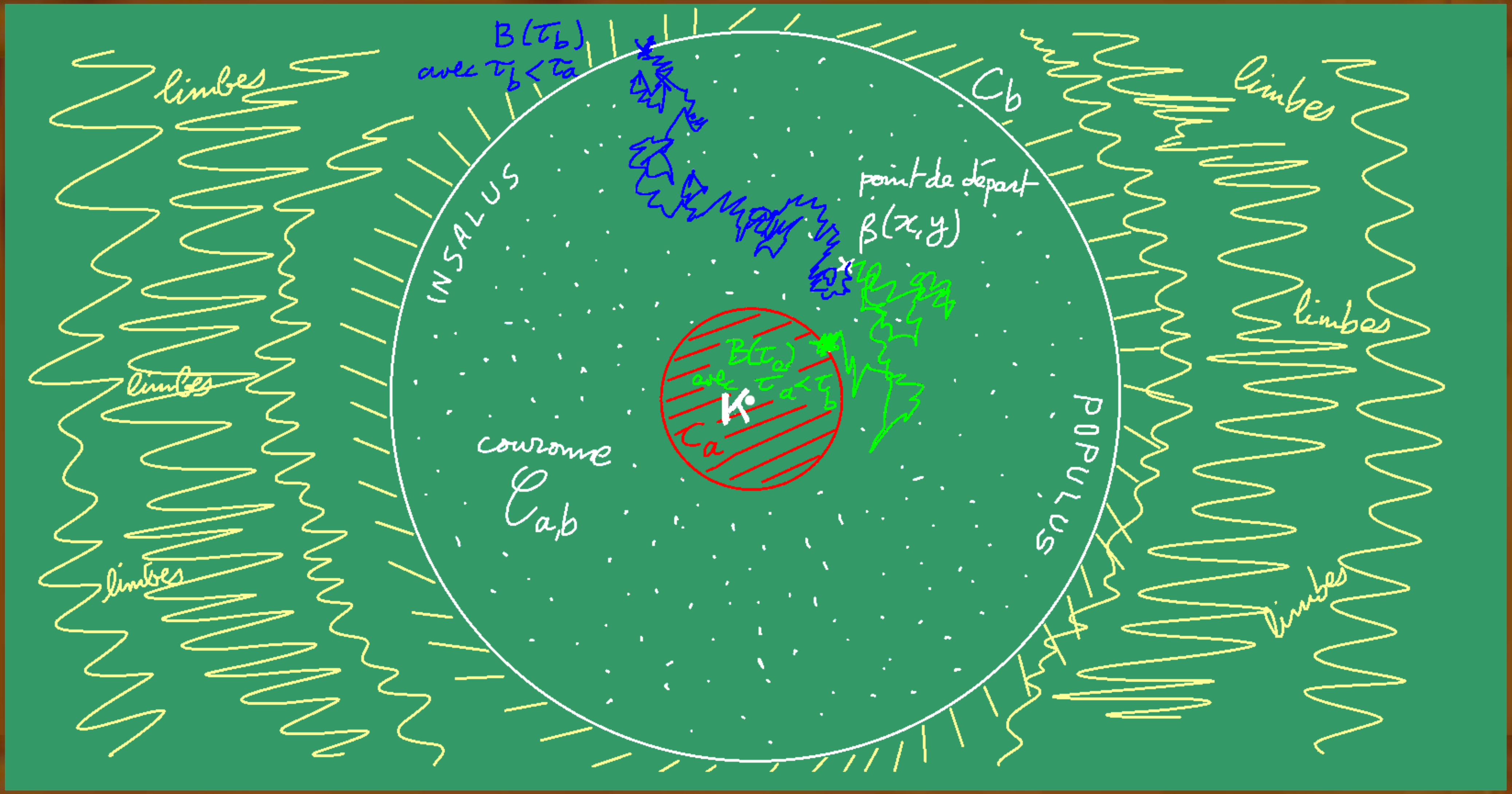
- Soit $B = (B(t))_{t \geq 0}$ un mouvement brownien plan issu d'un point $\beta(x,y) \in \mathcal{C}_{a,b}$.
- On note $\tau_{a,b}$ le premier instant de sortie de $\mathcal{C}_{a,b}$ par B :

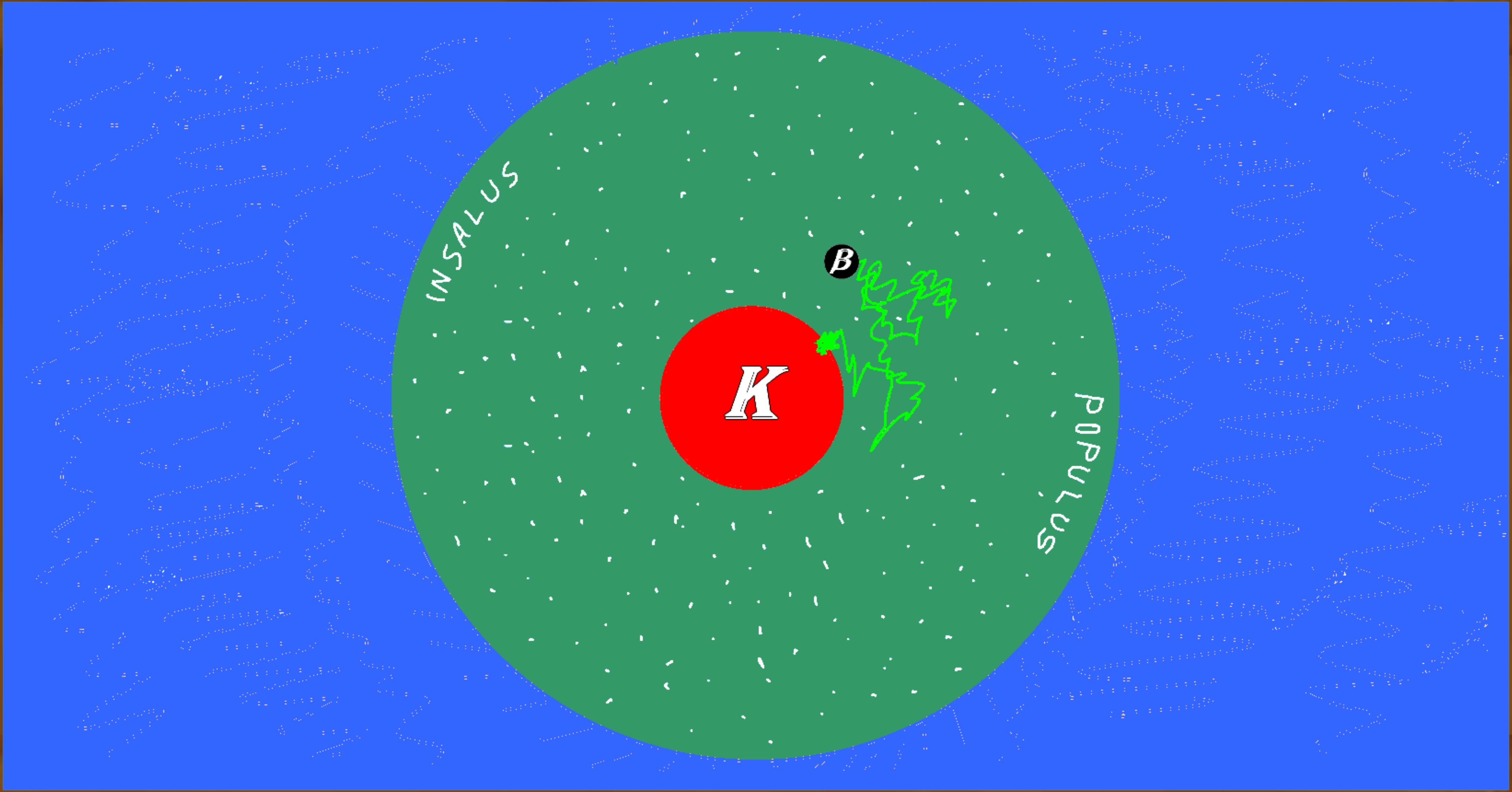
$$\tau_{a,b} = \inf \{ t \geq 0 : \ B(t) \notin \mathcal{C}_{a,b} \} = \inf \{ t \geq 0 : \ B(t) \in C_a \text{ ou } B(t) \in C_b \}$$

On introduit également les premiers instants d'atteinte des cercles C_a et C_b :

$$\tau_a = \inf \{ t \geq 0 : \ B(t) \in C_a \} \quad \text{et} \quad \tau_b = \inf \{ t \geq 0 : \ B(t) \in C_b \}$$

de façon que $\tau_{a,b} = \min(\tau_a, \tau_b)$.


limbes
B(τb)
avec τb < τa
Cb
limbes
INSALUS
point de départ
β(x,y)
limbes
B(τa)
avec τa < τb
limbes
K
Ca
couronne
Ca,b
POPULUS
limbes
limbes


INSALUS
POPULUS
K
β

Problème : calculer les probabilités :

1. $u(x,y) = \mathbb{P}_{(x,y)}\{ B(\tau_{a,b}) \in C_a \} = \mathbb{P}_{(x,y)}\{ \|B(\tau_{a,b})\| = a \} = \mathbb{P}_{(x,y)}\{ \tau_a < \tau_b \}$

(probabilité d'atteindre le cercle C_a avant le cercle C_b partant d'un point $\beta(x,y)$ de la couronne $\mathcal{C}_{a,b}$ $\Rightarrow$ problème de la ruine du joueur en dim 2)

2. $v(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}\left[e^{-p\tau_{a,b}} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, \mathbb{P}_{(x,y)}\{ \tau_{a,b} \in dt \}$, $p \geq 0$

(transformée de Laplace de la loi de τ_{ab})

Résolution du problème :

1 La fonction u vérifie le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \,, (x,y) \in \mathcal{C}_{a,b} \\ \begin{cases} u(x,y) = 1 \text{ pour } (x,y) \in C_a \\ u(x,y) = 0 \text{ pour } (x,y) \in C_b \end{cases} \end{cases}$$

$\rightarrow$ équation aux dérivées partielles de Laplace avec $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ (Laplacien)

$\rightarrow$ u est une fonction harmonique

$\rightarrow$ conditions aux limites

Le mouvement brownien étant invariant par rotation (isotropie) $u(x,y)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2}$ (fonction radiale)

$\rightarrow$ on passe en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

On cherche $u(x,y)$ sous la forme $U(r)$.

Le laplacien en coordonnées polaires s'écrit $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

d'où l'équation différentielle $U''(r) + \dfrac{1}{r}U'(r) = 0$, $r \in]a,b[$

avec conditions aux limites $U(a) = 1$ et $U(b) = 0$.

→ Solution : d'abord $U'(r) = \lambda e^{-\int \frac{dr}{r}} = \dfrac{\lambda}{r}$ puis $U(r) = \lambda \ln r + \mu$

avec λ, μ constantes telles que $\begin{cases} \lambda \ln a + \mu = 1 \\ \lambda \ln b + \mu = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\ln a - \ln b} \\ \mu = \dfrac{\ln b}{\ln b - \ln a} \end{cases}$

Enfin $U(r) = \dfrac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a}$, $r \in]a,b[$

soit $$\boxed{\mathbb{P}_{(x,y)}\{\tau_a < \tau_b\} = \dfrac{\ln b - \ln\sqrt{x^2+y^2}}{\ln b - \ln a}}$$

2 La fonction v vérifie le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta v(x,y) = p\, v(x,y) \ , (x,y) \in \mathscr{C}_{a,b} \rightarrow \text{équation aux dérivées partielles de Poisson} \\ v(x,y) = 1 \text{ pour } (x,y) \in C_a \cup C_b \rightarrow \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

Par isotropie du mouvement brownien, la fonction v est radiale :
$v(x,y)$ est de la forme $V(r)$

d'où l'équation différentielle $\quad V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) = 2pV(r) \ , \ r \in]a,b[$

avec conditions aux limites $V(a) = 1$ et $V(b) = 1$.

L'équation s'écrit $r^2 V''(r) + r V'(r) - 2p r^2 V(r) = 0$

$\rightarrow$ équation de Bessel de solutions $V(r) = \lambda I_0(\sqrt{2p}\, r) + \mu K_0(\sqrt{2p}\, r)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

où I_0 et K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^k \quad \text{et } K_0(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t^2+z^2}}\, dt$$

avec λ, μ constantes telles que $\begin{cases} \lambda I_0(\sqrt{2p}\, a) + \mu K_0(\sqrt{2p}\, a) = 1 \\ \lambda I_0(\sqrt{2p}\, b) + \mu K_0(\sqrt{2p}\, b) = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{K_0(\sqrt{2p}\, b) - K_0(\sqrt{2p}\, a)}{I_0(\sqrt{2p}\, a) K_0(\sqrt{2p}\, b) - I_0(\sqrt{2p}\, b) K_0(\sqrt{2p}\, a)} \\[2ex] \mu = \dfrac{I_0(\sqrt{2p}\, a) - I_0(\sqrt{2p}\, b)}{I_0(\sqrt{2p}\, a) K_0(\sqrt{2p}\, b) - I_0(\sqrt{2p}\, b) K_0(\sqrt{2p}\, a)} \end{cases}$$

soit
$$\boxed{\mathbb{E}_{(x,y)}\left(e^{-p\,\tau_{a,b}}\right) = \left(\left[K_0(\sqrt{2p}\,b) - K_0(\sqrt{2p}\,a)\right] I_0\left(\sqrt{2p}\sqrt{x^2+y^2}\right) + \left[I_0(\sqrt{2p}\,a) - I_0(\sqrt{2p}\,b)\right] K_0\left(\sqrt{2p}\sqrt{x^2+y^2}\right) \right) \Big/ \left[I_0(\sqrt{2p}\,a)\,K_0(\sqrt{2p}\,b) - I_0(\sqrt{2p}\,b)\,K_0(\sqrt{2p}\,a)\right]}$$

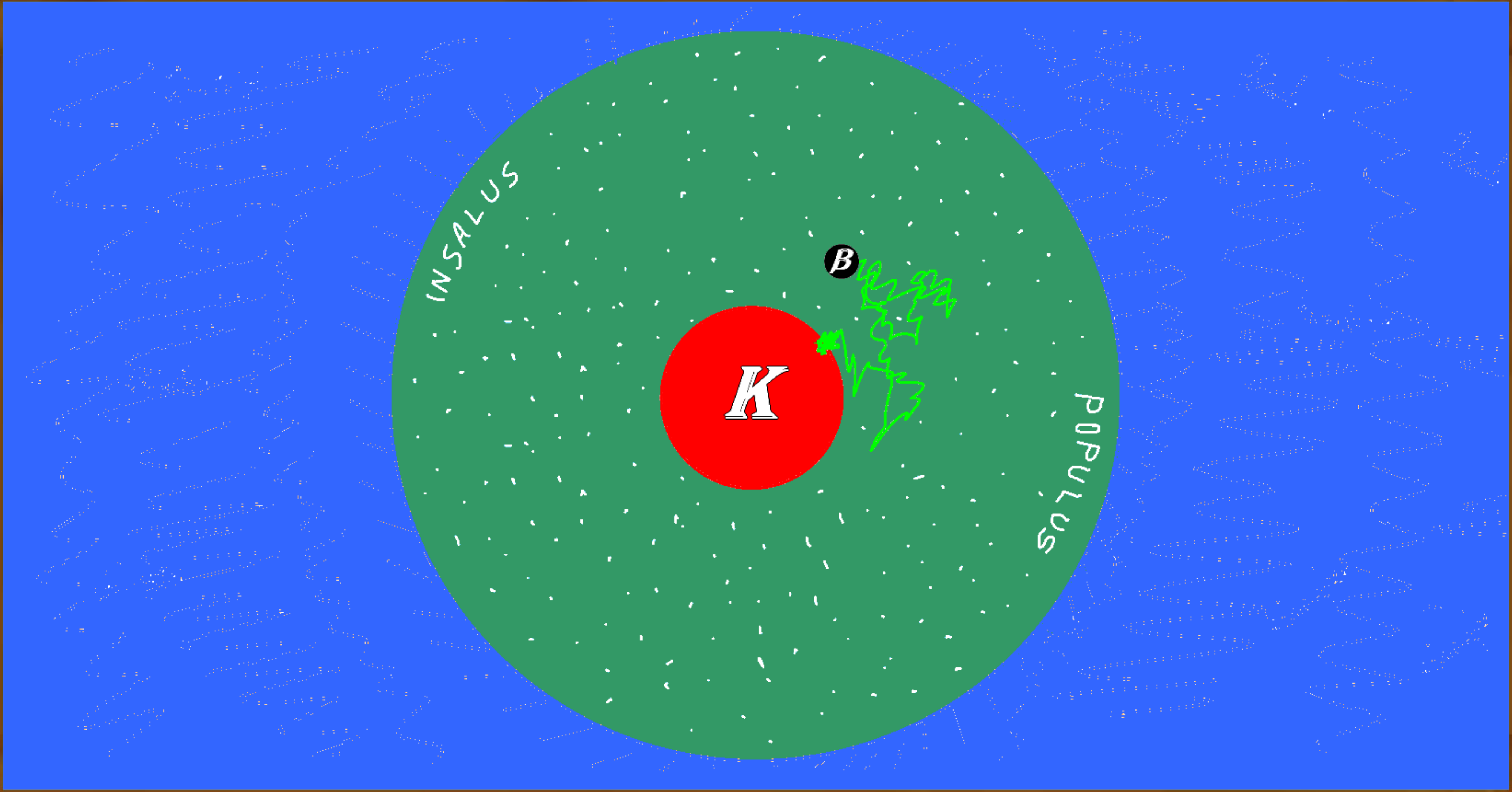
Resterait à inverser la transformée de Laplace pour obtenir la loi de $\tau_{a,b}$...

P.S. : • source : J. G. Wendel 1980

• Calculs certifiés 100 % sans arnaque !

B.T. : • β comme ...

• K comme ...


INSALUS
POPULUS
β
K