Conférence INSA de Lyon

29 Mars 2012

# MATHÉMAGIE

*Une approche didactique des mathématiques et des sciences par la Magie*


Grande École d'Ingénieurs

Pierre SCHOTT

schott@esiea.fr

La magie à la carte

magie.carte@laposte.net

Aimé LACHAL

aime.lachal@insa-lyon.fr

LYON

# Les intervenants : Pierre SCHOTT

- 1996 : Ingénieur ESME option Télécommunications aérospatiales
- 1996-1997 : Prof de Maths à l'armée
- 1997-2001 : DEA+Thèse à l'UPS (Toulouse)
- 2001-2003 : ATER à l'EPUN (Nantes)
- 2003-2004 : Chômage => Magie
- 2004-… : Prof de Physique à l'ESIEA
- Depuis 2005 : utilisation de la Magie dans l'enseignement

http://magiealacarte.free.fr/

# Les intervenants : Aimé LACHAL

- 1990-… Prof de Maths à l'INSA
  Chercheur probabiliste à l'ICJ

http://maths.insa-lyon.fr/~lachal/

# Définition des tours automatiques

Self Working Card Trick

C'est un tour qui peut être réalisé par un "débutant" en prestidigitation.

Il ne nécessite pas de connaissance de "passes magiques".

Souvent les mathématiques y sont omniprésentes.

Il suffit que le magicien suive les instructions et…

**Ça marche tout seul !**

# PLAN

I. Le spectacle de cartomagie et ses secrets

II. Etude mathématique des mélanges Faro

III. Présentation des principes de Gilbreath

IV. Les applications pédagogiques

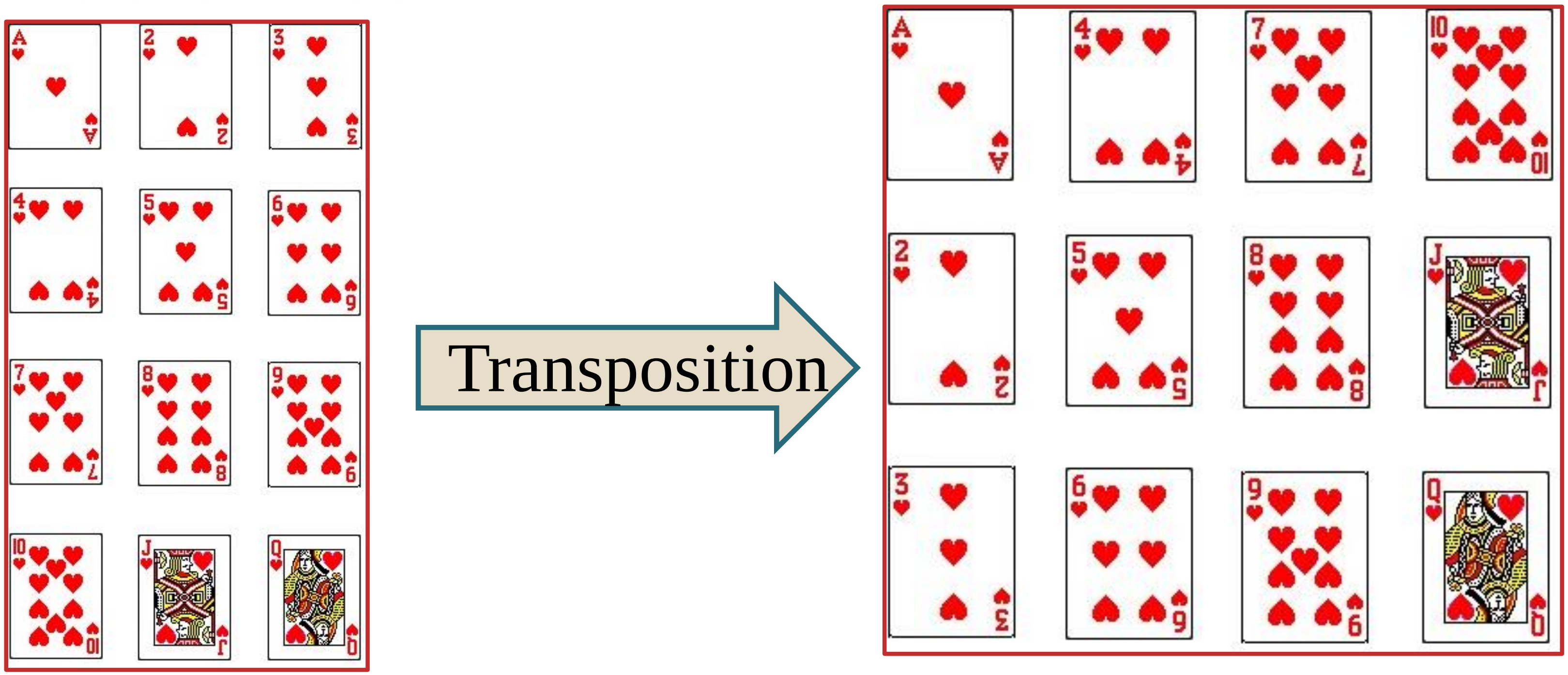
V. Conclusion et Perspectives

# Le spectacle de cartomagie

- Coupes, donnes et mélanges de cartes
- Prior Commitment d'Aronson
- Le supplice de Tantale
- Prédiction ou coïncidences v1
- Télépathie RN
- Prédiction ou coïncidences v2

# Tour I : coupes, donnes et mélanges de cartes

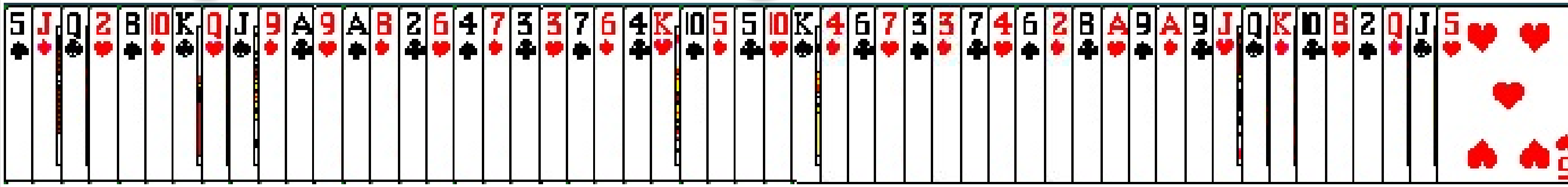
Le spectacle de cartomagie et ses secrets
Étude mathématique des mélanges Faro
Présentation des principes de Gilbreath
Les applications pédagogiques
Conclusion et Perspectives




J'ai contrôlé la place de TOUTES les cartes par des coupes, des mélanges ("français", Faro) et des donnes

=> **le jeu est monté en Chapelet.**

# Equation de degré 1



$$\text{position}: N = 4q + r$$

**Reste : r**

- 0 = Cœur
- 1 = Pique
- 2 = Carreau
- 3 = Trèfle

**Quotient : q**

- Si r=3 alors $X_3 \equiv q-1 \pmod{13}$
- Si r=2 alors $X_2 \equiv 10-X_3 \pmod{13}$
- Si r=1 alors $X_1 \equiv 3q+5 \pmod{13}$
- Si r=0 alors $X_0 \equiv 10-X_1 \pmod{13}$

***Famille : r***

***Valeur de la carte : X***

Le spectacle de cartomagie et ses secrets

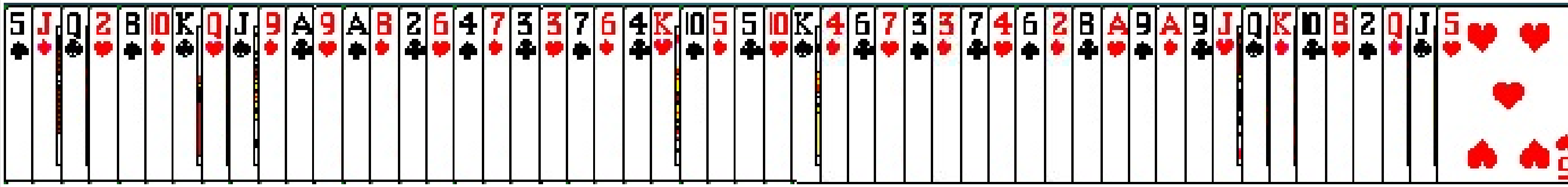
Étude mathématique des mélanges Faro

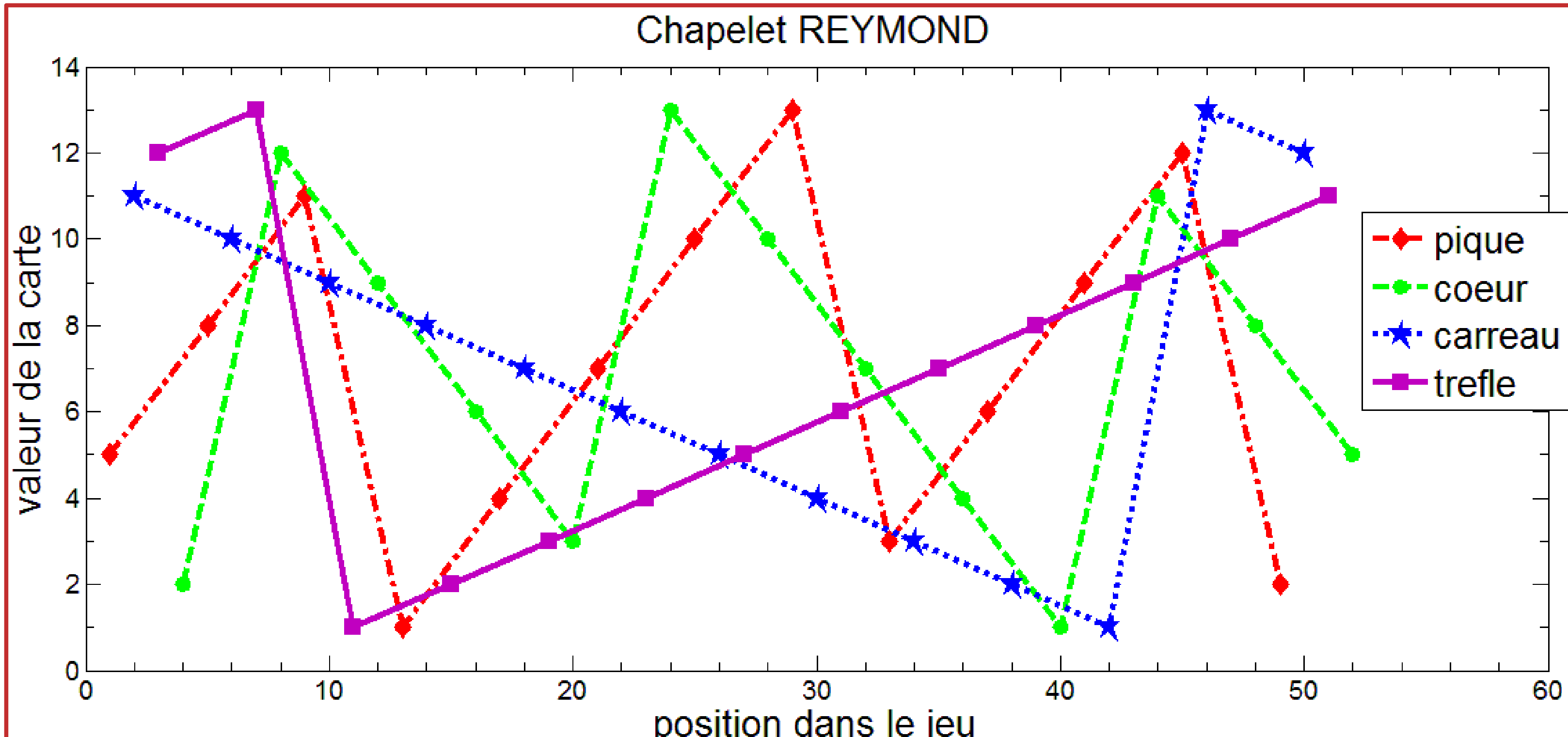
Présentation des principes de Gilbreath

Les applications pédagogiques

Conclusion et Perspectives

# Injection – Surjection – Bijection





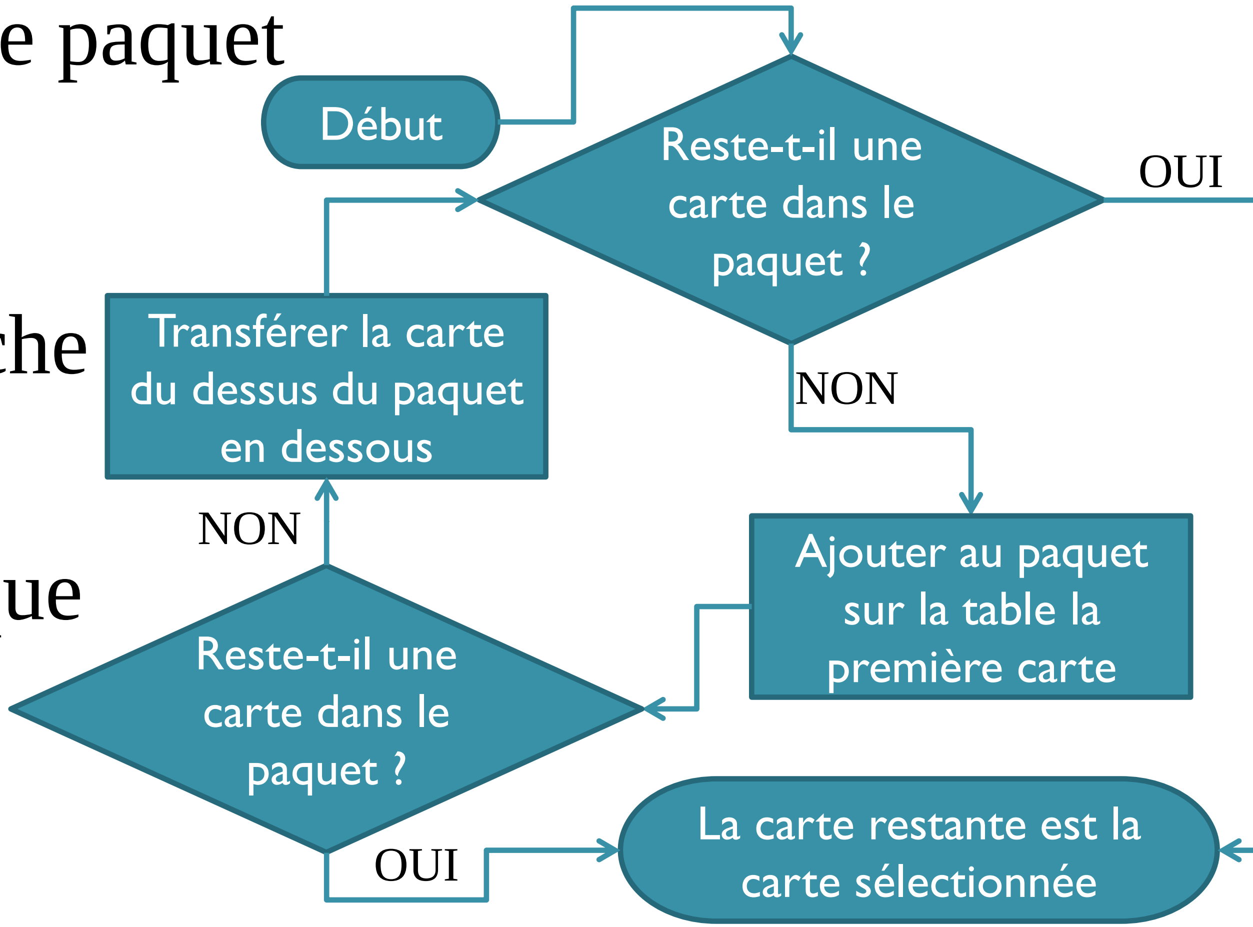
# Tour II : prior commitment de Simon Aronson



- Forçage des nombres
  - Preuve par 9
  - Utilisation de jeu palindromique (cf. le livre "Rêver" de Max MAVEN) en combinaison avec les donnes équitables et australienne
- On suit la disposition des cartes par blocs
- Après toutes les coupes, on remet le paquet à son état initial

# La donne australienne

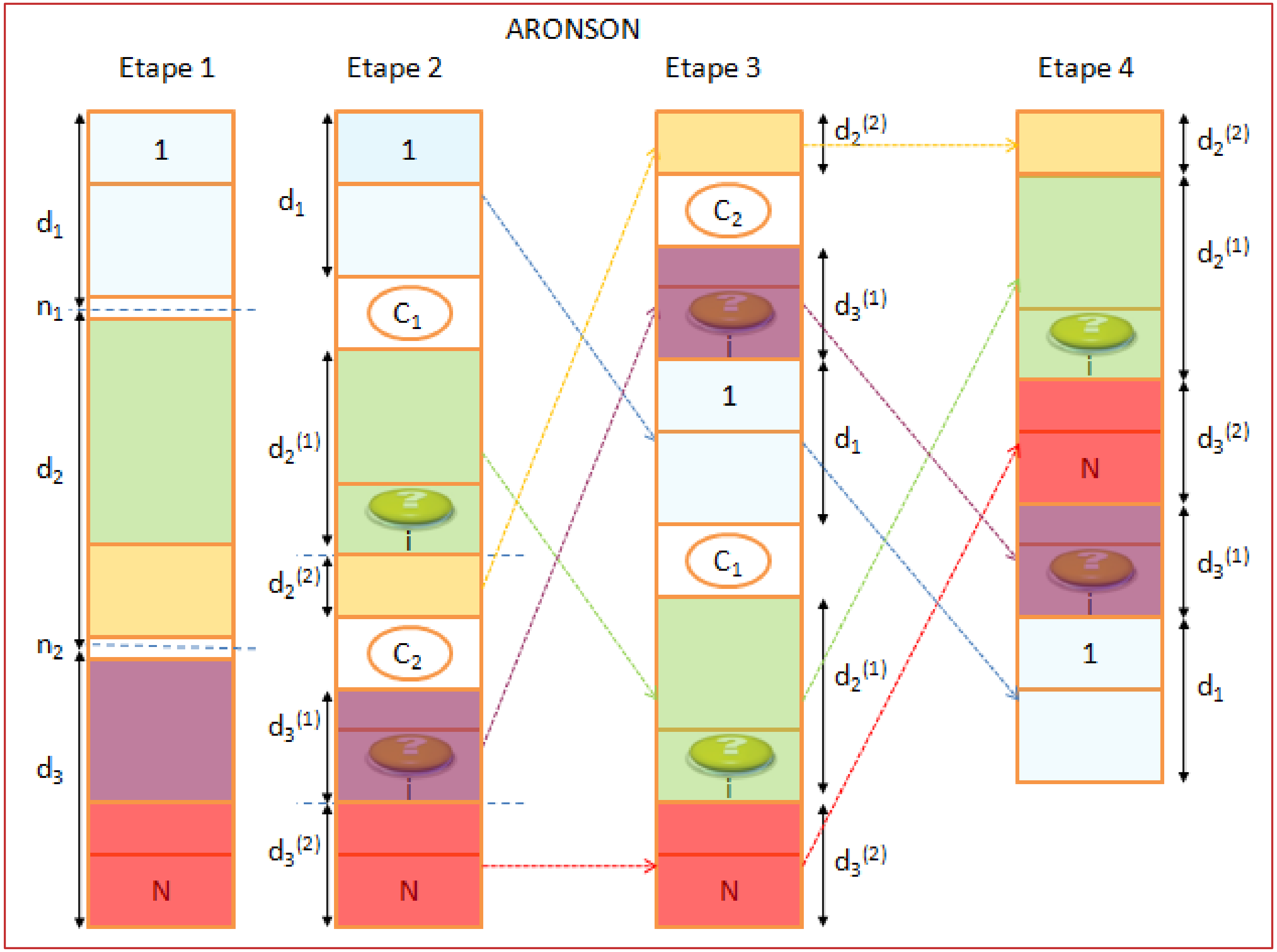
- Mettre sur la table la première carte
- Transférer la nouvelle carte du dessus sous le paquet




On ne cherche pas de fonction mathématique

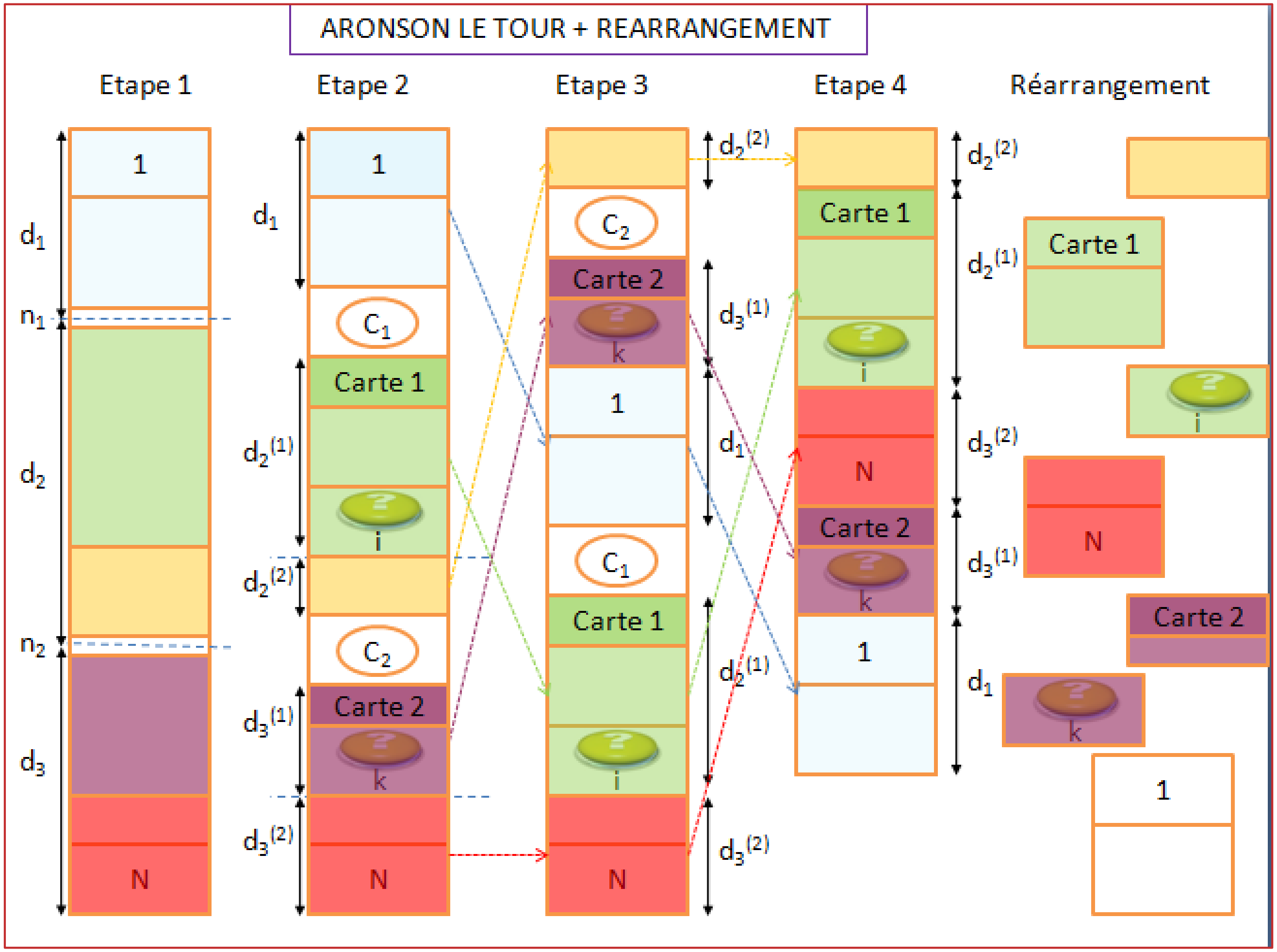
# Tour II : prior commitment (2/3)





- Le spectacle de cartomagie et ses secrets
- Étude mathématique des mélanges Faro
- Présentation des principes de Gilbreath
- Les applications pédagogiques
- Conclusion et Perspectives

# Tour II : prior commitment (3/3)

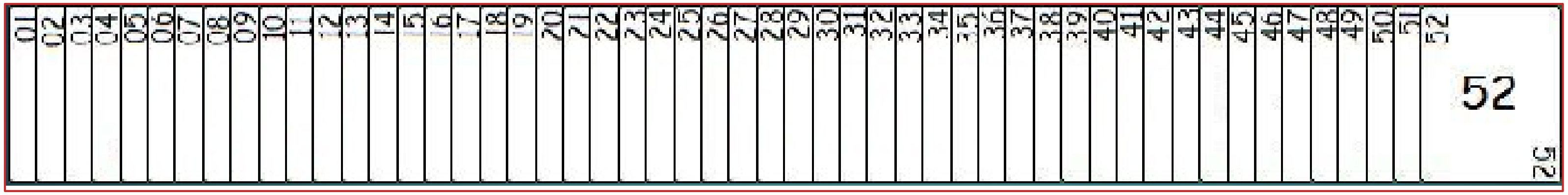


# Tour III : Supplice de Tantale (1/3)

- Donne équitable avec un jeu de 52 cartes :
  => c'est la carte en position 22 qui se retrouve automatiquement sur le jeu.

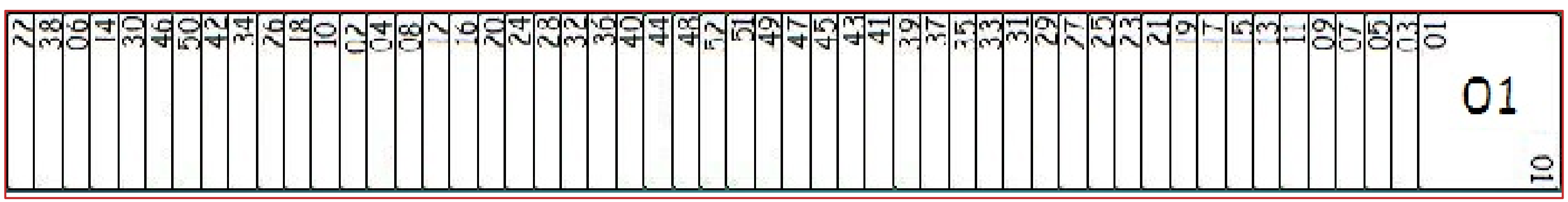
- Chapelet Reymond :
  => 1 carte rouge (resp. noire) aux positions paires (resp. impaires) ;
  => 1 carte d'une même famille toutes les 4 cartes ;
  => après les coupes, les mélanges et la donne équitable, on retrouve le jeu initial inversé (mais les propriétés intéressantes sont préservées).

# Tour III : Supplice de Tantale (2/3)




**Donne équitable**

- *1* carte pour le spectateur et *1* carte pour moi
- On recommence avec mon tas jusqu’à arriver à *1* carte




Le spectacle de cartomagie et ses secrets

Étude mathématique des mélanges Faro

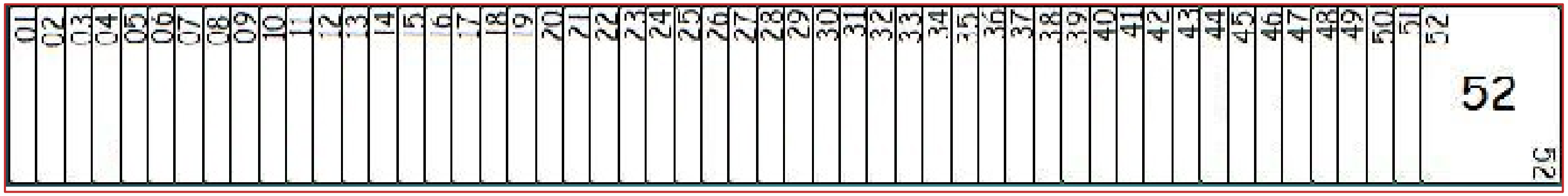
Présentation des principes de Gilbreath

Les applications pédagogiques

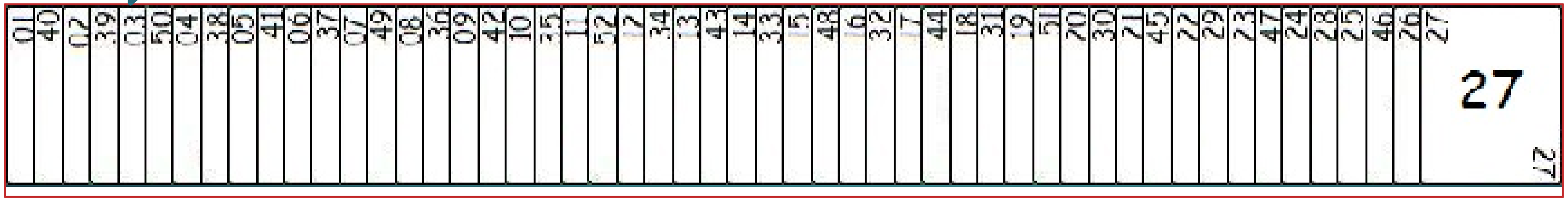
Conclusion et Perspectives

# Tour III : Supplice de Tantale (3/3)

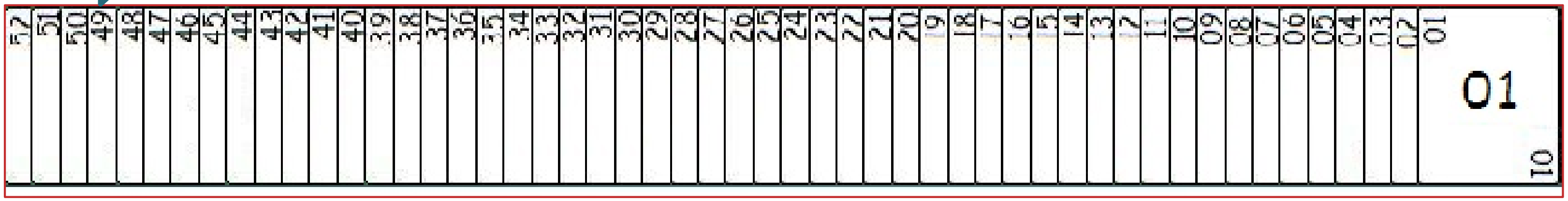





**Transfo de Denis BEHR**



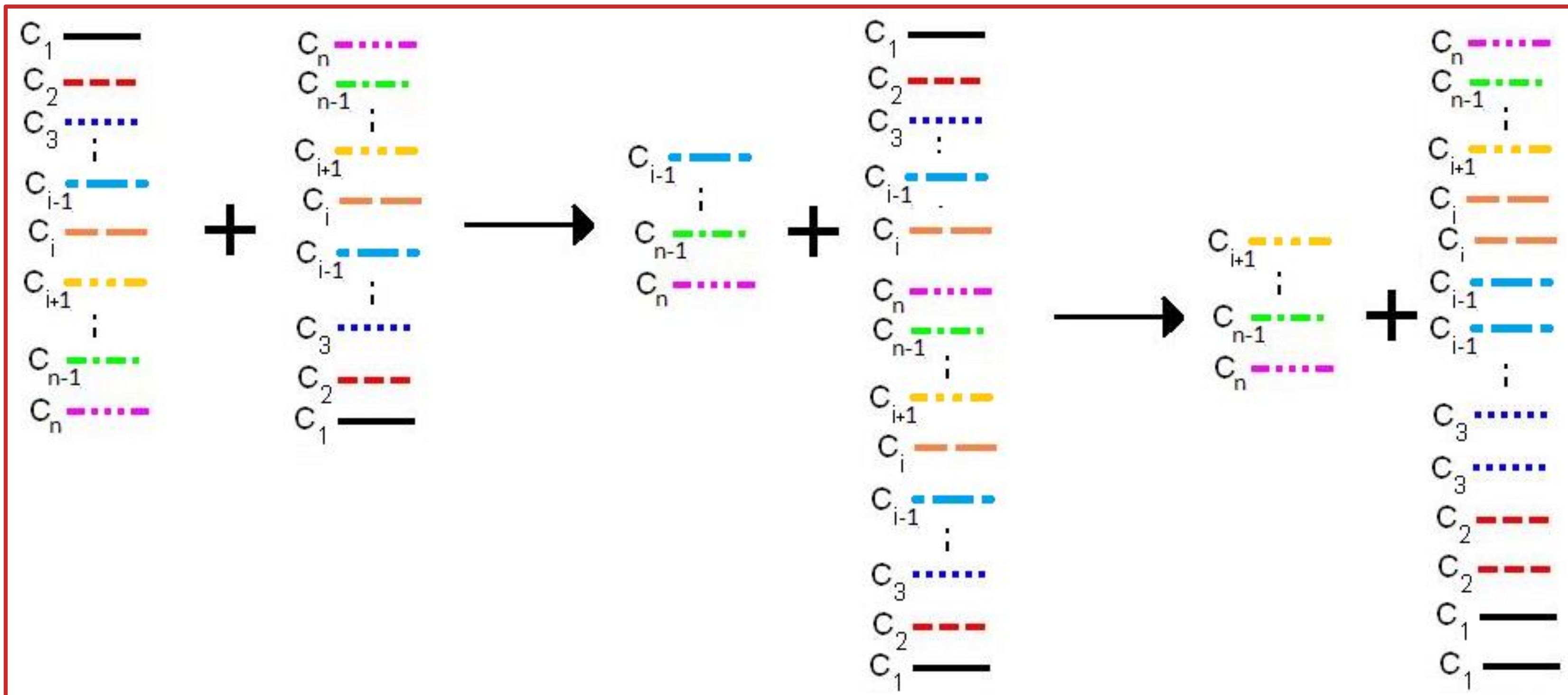

**Donne équitable**



# Tour IV : Prédiction ou coïncidence v1



2 jeux en miroir + coupe + mélange Klondike



# Tour V : Télépathie RN (Gilbreath)

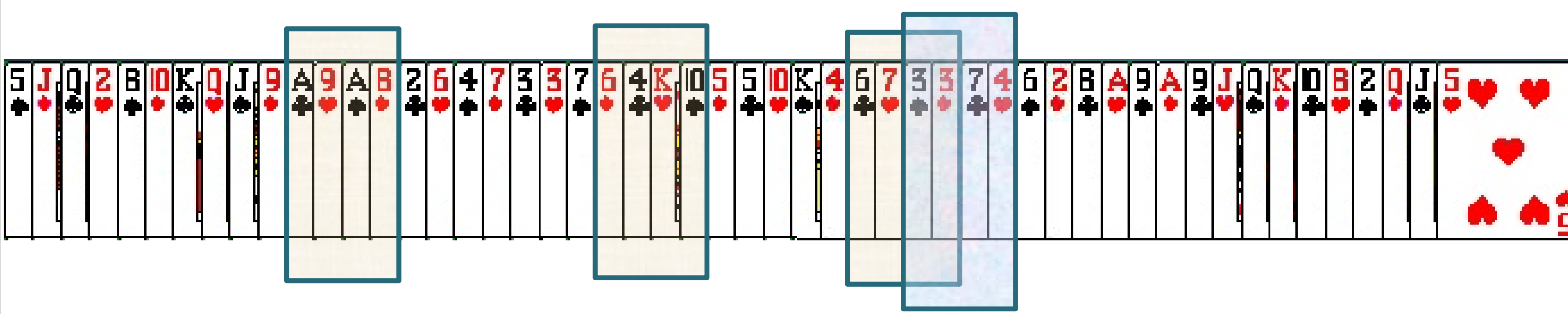


- Jeu arrangé Rouge-Noire à l’insu du spectateur.
- Mélange à l’américaine "Fair-play" par un spectateur.
- Coupe au milieu d’une paire du jeu mélangé.
- Donne équitable.
- Prise de l’information en donnant les règles du jeu.

# Tour VI : Prédiction ou coïncidence v2 (Péristance)



- Jeu arrangé en fenêtre glissante de longueur L et cyclique.
- Inversion d’une partie du jeu en posant les cartes sur la table (jeu en palindrome incomplet).
- Mélange à l’américaine "Fair-play" par un spectateur.
- Par paquet de L cartes du jeu mélangé, la propriété de la fenêtre est conservée.

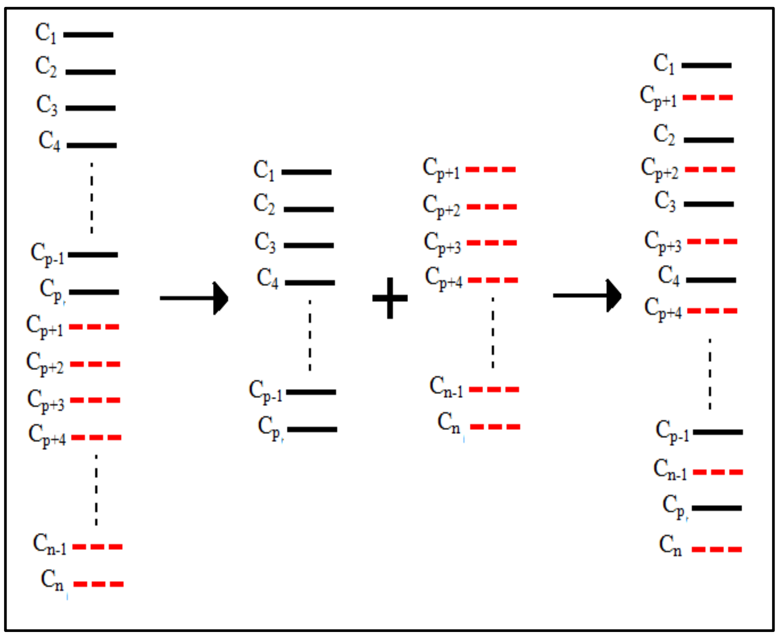


# PLAN

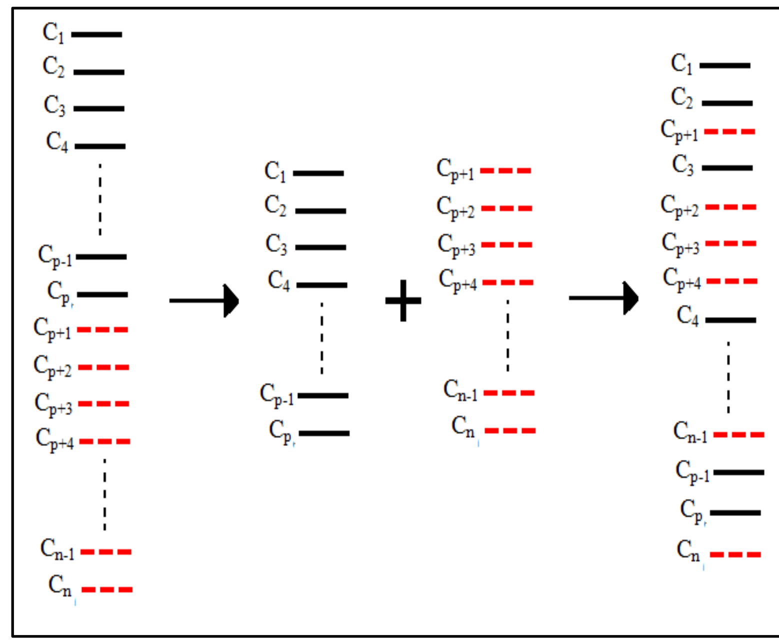
# Les coupes et mélanges donnant un chaos organisé



## Mélange Faro
## => Déterministe




## Mélange américain
## => Aléatoire



# Mélanges Faro (in/out-shuffles)

## *1. L'étape générique*

- Cartes numérotées : $\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n \quad n+1 \quad \cdots \quad 2n}$
- Coupe au milieu : $\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{matrix}}$
- Mélange :

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & & 2 & & 3 & & \cdots & & n & \\ & n+1 & & n+2 & & \cdots & & \cdots & & 2n \end{matrix}} \Rightarrow \text{OUT}$$

ou

$$\boxed{\begin{matrix} & 1 & & 2 & & \cdots & & \cdots & & n \\ n+1 & & n+2 & & n+3 & & \cdots & & 2n & \end{matrix}} \Rightarrow \text{IN}$$

- Pour l'in-shuffle :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{array}$$

| Carte | 1 | 2 | … | n | n+1 | n+2 | … | 2n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Position** | 2 | 4 | … | 2n | 1 | 3 | … | 2n-1 |

- Modélisation : une permutation

$$f : \text{carte } n^\circ i \rightarrow \begin{cases} 2i & \text{si} \quad 1 \leq i \leq n \\ 2i - 2n - 1 & \text{si} \quad n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

$$\boxed{f(i) \equiv 2i \pmod{2n+1}}$$

- Réciproquement :

$$\begin{pmatrix} & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n & \end{pmatrix}$$

| **Position** | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 2n-2 | 2n-1 | 2n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Carte** | n+1 | 1 | n+2 | 2 | … | n-1 | 2n | n |

- Modélisation : permutation réciproque

$$\boxed{f^{-1} : \text{position } n^\circ j \rightarrow \begin{cases} \dfrac{j}{2} & \text{si } j \text{ est pair} \\ n + \dfrac{j+1}{2} & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}}$$

# 2. Répétitions

- Après k mélanges : $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$

$$\boxed{f^k(i) \equiv 2^k i \pmod{2n+1}}$$

- Retour à la configuration initiale

=> ensemble des étapes successives :

$$I = \left\{ Id, f, f^2, \cdots, f^k, \cdots \right\}$$

I est un sous-ensemble de permutations de 1,2, … , 2n, il est donc fini. Il y a au moins un mélange invariant autre que Id :

$$\exists r > 1 / f^r = Id$$

*Ainsi, r mélanges successifs d'in-shuffles conduisent au jeu initial.*

*Théorème.* Le nombre minimal de mélanges successifs d'in-shuffles d'un jeu de 2n cartes conduisant au jeu initial est le plus petit nombre $r>1$ tel que $2^r \equiv 1 \pmod{2n+1}$.

C'est la période de l'in-shuffle.

*Exemple.* 10 in-shuffles d'un jeu de 32 cartes conduisent à la configuration initiale ($32=2^5$).

# Orbite d'une carte
# Animations sous Maple

- Orbite 52 cartes
- Caustique
- Orbite 78 cartes

# 3. Approche binaire

- Cartes renumérotées :

$$\boxed{0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n-1 \quad n \quad \cdots \quad 2n-1}$$

- Décomposition binaire de i :

$$i = \overline{i_{p-1}\, i_{p-2} \ldots i_0} = i_{p-1}\, 2^{p-1} + i_{p-2}\, 2^{p-2} + \ldots + i_0$$

$$\text{Bits : } i_0 , \ldots , i_{p-2} , i_{p-1} \in \{0,1\}$$

- Nouvelle modélisation :

$$g(i) = \overline{i_{p-2} \ldots i_0\, (1 - i_{p-1})}$$

cas pour l'in-shuffle :
g décale les bits vers la gauche
et inverse le dernier bit

$$h(i) = \overline{i_{p-2} \ldots i_0\, i_{p-1}}$$

cas pour l'out-shuffle :
h décale les bits vers la gauche

# Application au problème d'Elmsley (1957) :

## Déplacement d'une carte donnée vers une position prédéterminée

*Exemple*. Jeu de 32 cartes : $\boxed{0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad 30 \quad 31}$

Comment déplacer la carte n° **19** à la place n° **7** ?

# *Astuce* : construction d'un objet binaire

1) on construit les écritures binaires de **19** et **7** :

$$19=\overline{10011} \text{ et } 7=\overline{00111}$$

2) on compare les bits superposés : s'ils coïncident, on écrit O, sinon on écrit I

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | *0* | *0* | *1* | *1* |
| *0* | *0* | *1* | *1* | *1* |
| I | O | I | O | O |

3) on construit l'objet constitué de I et de O correspondant : IOIOO

=> on effectue *1* in-shuffle, *1* out-shuffle, *1* in-shuffle, *2* out-shuffles

*Remarque*. Algorithme systématique, symétrique, pas nécessairement optimal.
*Référence*. Persi Diaconis (1983, 2007) => recherche.

# PLAN

I. Le spectacle de cartomagie et ses secrets

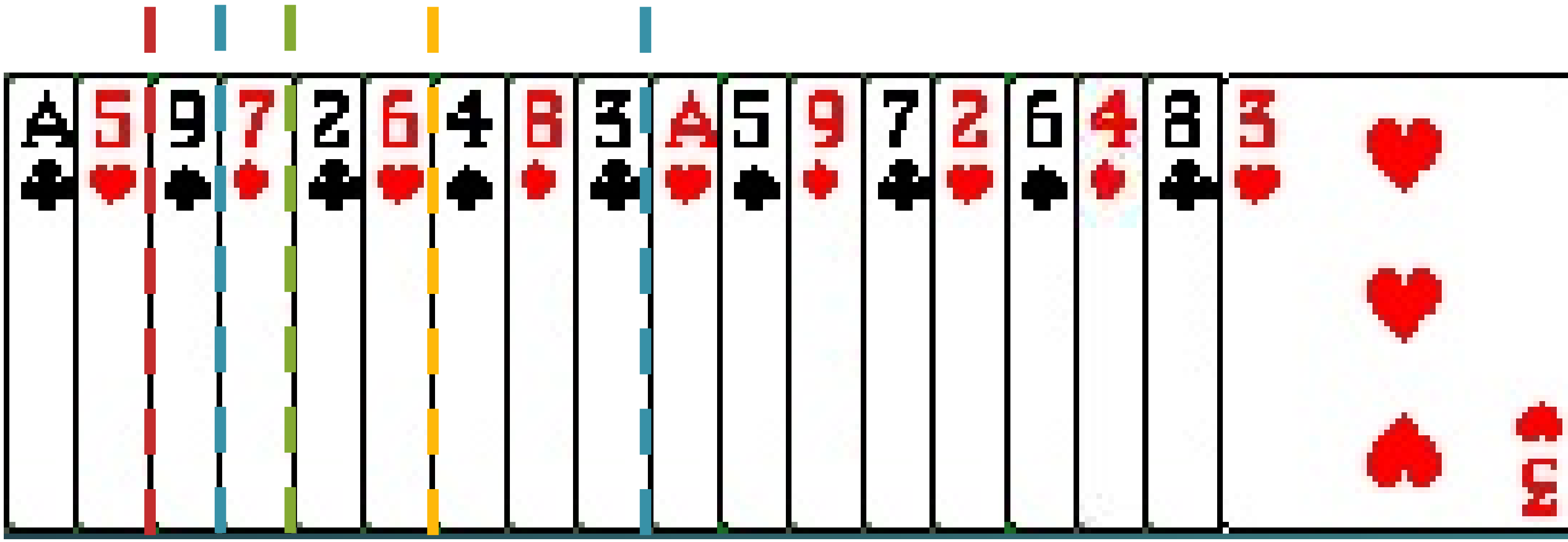
II. Etude mathématique des mélanges Faro

III. Présentation des principes de Gilbreath

IV. Les applications pédagogiques

V. Conclusion et Perspectives

# Les principes de Gilbreath jeu arrangé + mélange américain




R-N

Mult. *3*

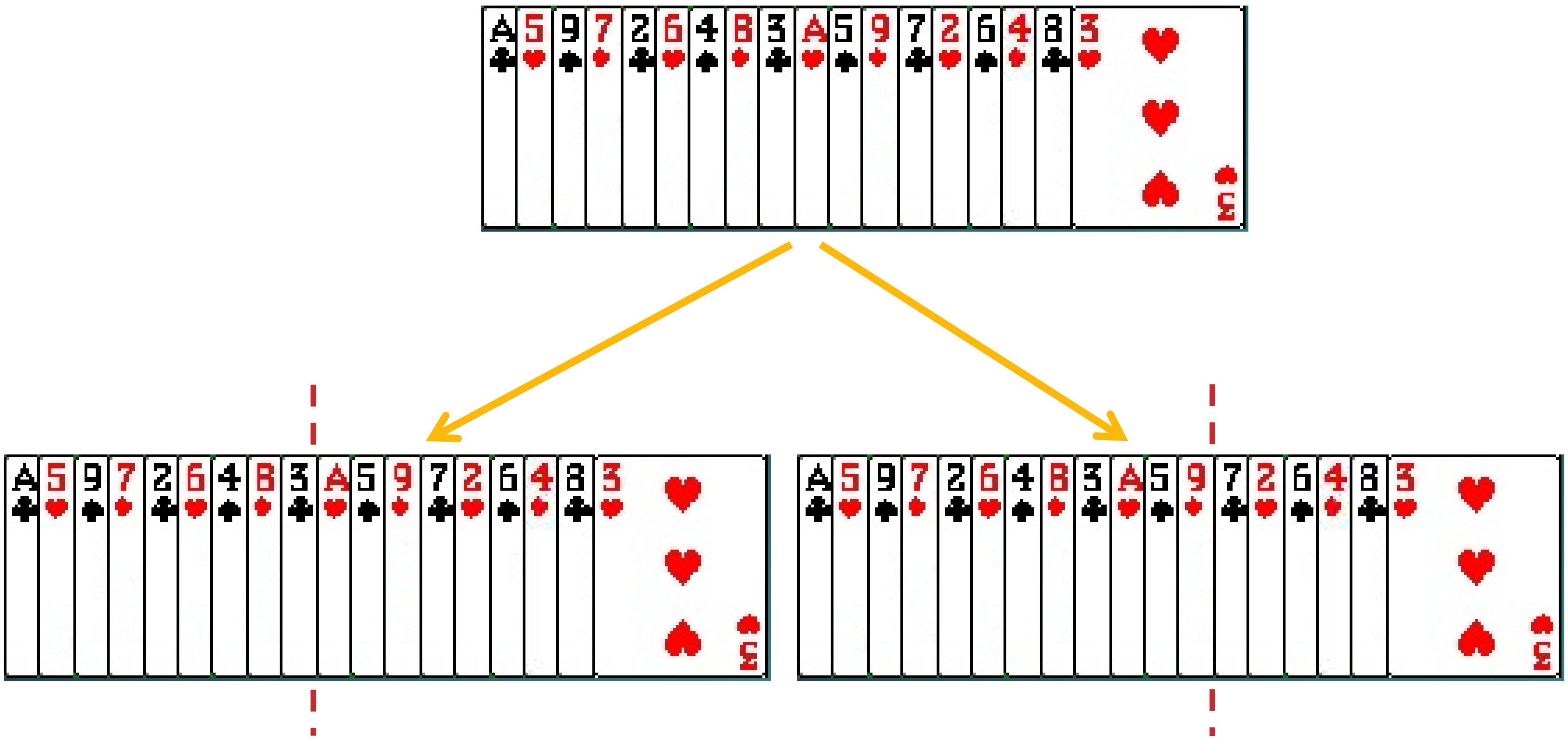
*4* familles

*3*R-*3*N

*1* cycle et si inversé on obtient un jeu palindromique

# Les principes de Gilbreath premier principe

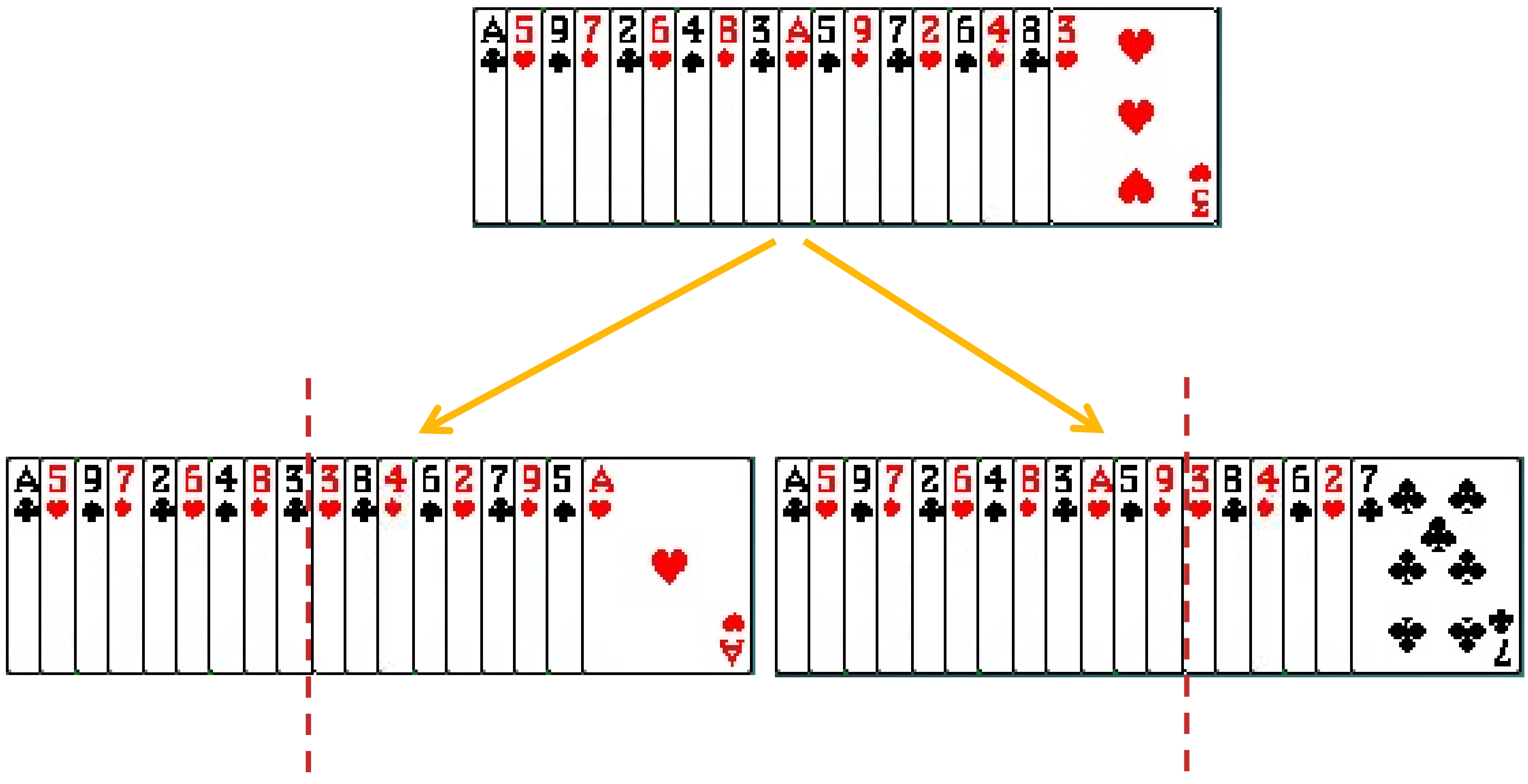




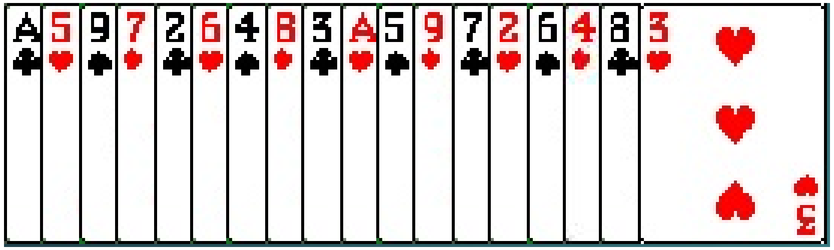
+ Coupe après le mélange

# Les principes de Gilbreath deuxième principe





# Les principes de Gilbreath troisième principe : la péristance



- Inversion d'un certain nombre de cartes
- Mélange à l'américaine
- Distribution des tas de $k$ cartes

Chaque tas aura la propriété de la fenêtre glissante du nombre de cartes composant le paquet

Démonstration des principes à paraître dans la revue QUADRATURE

# PLAN

# Autres applications



- L'optique : création de moyennes illusions à base d'optique (L3)

- Projet de Formation Humaine : projet de documentation et de réflexion sur le thème « à la recherche de la Magie » (L1)

La magie à la carte

# Autres applications : électronique numérique

## Le tour :

- Prendre les 6 cartes et placer les cartes faces en haut pour former un nombre, soit 142857.
- Prendre une carte entre 1 et 6.
- Faire la multiplication des 2 nombres.

## Propriétés :

- 142857*2=285714
- 142857*3=428571
- 142857*4=571428
- 142857*5=714285
- 142857*6=857142

application nombre cyclique

Comment est obtenu le nombre ? $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

# Autres applications : informatique

- Création de tour de magie sous smartphone
- Dénombrement et composition de tous les mélanges américains
- Générateur d'arrangement de cartes

- Toutes les études et figures montrées proviennent d'un code Matlab et Maple

La magie à la carte

# PLAN

I. Le spectacle de cartomagie et ses secrets

II. Etude mathématique des mélanges Faro

III. Présentation des principes de Gilbreath

IV. Les applications pédagogiques

V. Conclusion et Perspectives

# Les notions abordées par la Cartomathémagie

- Bijection, fonction réciproque
- Travail dans Z/nZ (arithmétique, orbites…)
- La preuve par 9 (en base 10)
- Le binaire
- Les matrices
- Notions associées aux principes de Gilbreath

- Et nous n'avons pas tout montré !

# Mathémagie : bien plus que de la Cartomathémagie



- Les carrés magiques
- Les puzzles
- Les calendriers
- Les propriétés des suites (Fibonacci,…)
- La topologie (ruban de Moëbius, nœuds,…)

# Conclusion

**Se faire plaisir...**

**Prendre un sujet et construire**

- Un sujet d'exercice, d'examen, de projet…
- Une partie de cours sur cet exemple
- De la pédagogie par projet
- La recherche !

**En utilisant la Magie ou d’autres arts…**

# Références : publications des auteurs


- A. Lachal. Mélanges parfaits de cartes (I) --- In-shuffles et out-shuffles. Quadrature 76 (2010), 13--25.
- A. Lachal. Mélanges parfaits de cartes (II) --- Mélanges de Monge. Quadrature 77 (2010), 23--29.

- P. Schott. The use of magic in mathematics : from primary school to higher education. Procedings of ICERI2009 Conférence, Madrid (2009), 58--70.
- P. Schott. How to introduce the cyclic group and its properties representation with Matlab? Thanks to magic using the perfect Faro shuffle. Creative Education 2(1) (2011), 27--40.

- A. Lachal, P. Schott. Cartomagie : principes de Gilbreath (I) -- Dénombrement de mélanges américains. Quadrature 85 (2012).
- A. Lachal, P. Schott. Cartomagie : principes de Gilbreath (II) -- Démonstrations et applications. Quadrature 86 (2012).

# Merci de votre attention !

aime.lachal@insa-lyon.fr schott@esiea.fr

magie.carte@laposte.net



# COMPLÉMENTS

# Injection – Surjection – Bijection

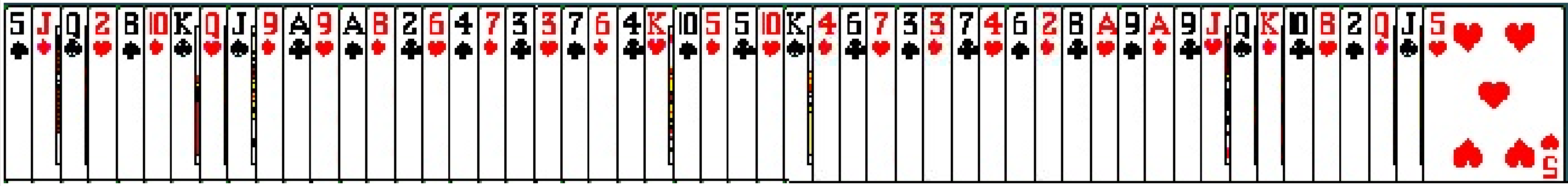
Le spectacle de cartomagie et ses secrets

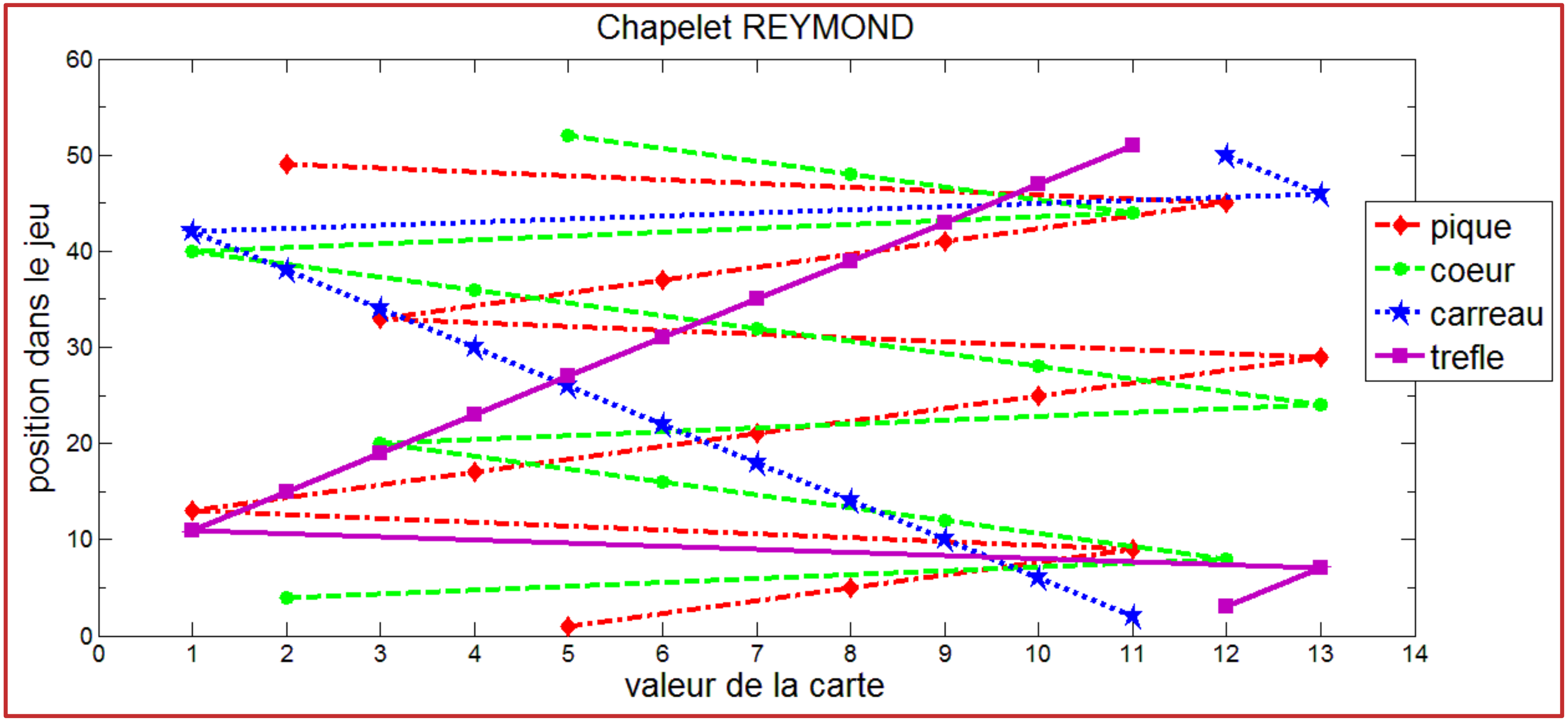
Étude mathématique des mélanges Faro

Présentation des principes de Gilbreath

Les applications pédagogiques

Conclusion et Perspectives





# Preuve par 9…



La somme des digits d'un multiple de 9 vaut 9

$$n = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k 10^k \Rightarrow n \equiv \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \beta_k \Leftrightarrow n \equiv \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

$$\forall k,\ \beta_k = 10^k \equiv 1 \pmod 9$$

- Choix d'un nombre entier positif ***inconnu*** : soit x
- Multiplication par 6 puis ajout de 12 : A=6x+12
- Ajout d'un nombre y entier positif ***connu*** : A=6x+12+ y
- Multiplication par 3 : A=18x+36+3y=9(2x+4)+3y
- Somme des digits de A = Somme des digits de 3y

# …et les autres



## Preuve par 7

$$n = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k 10^k$$

$$n \equiv \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \beta_k$$

$$\beta_0 = 10^0 = 1 \equiv 1 \pmod 7$$

$$\beta_1 = 10^1 = 10 \equiv 3 \pmod 7$$

$$\beta_2 = 10^2 = 100 \equiv 2 \pmod 7$$

$$\beta_3 = 10^3 \equiv 6 \pmod 7$$

$$\beta_4 = 10^4 \equiv 4 \pmod 7$$

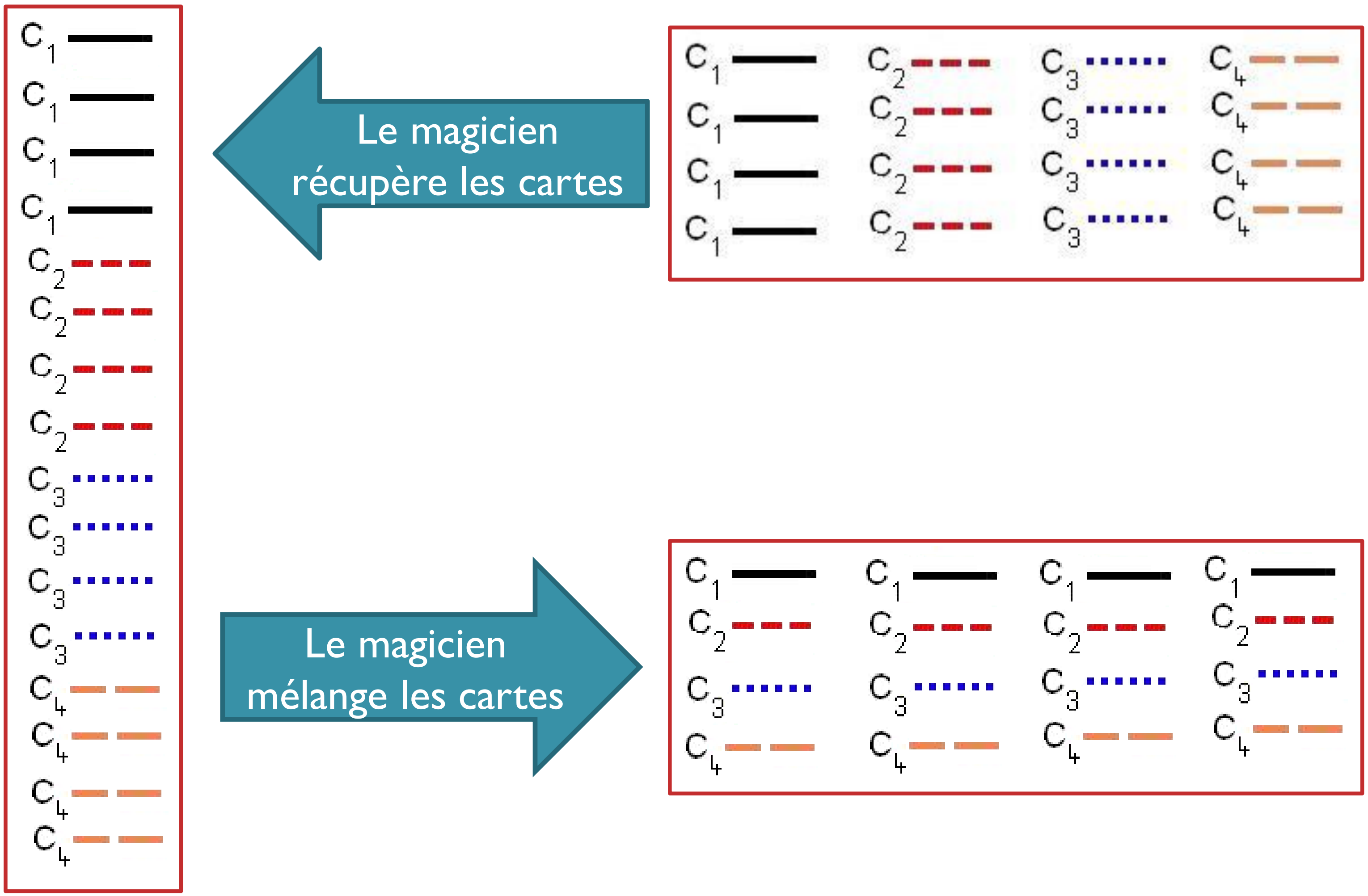
$$\beta_5 = 10^5 \equiv 5 \pmod 7$$

$$n \equiv \sum_{k=0}^{5} \alpha_k \beta_k + \cdots$$

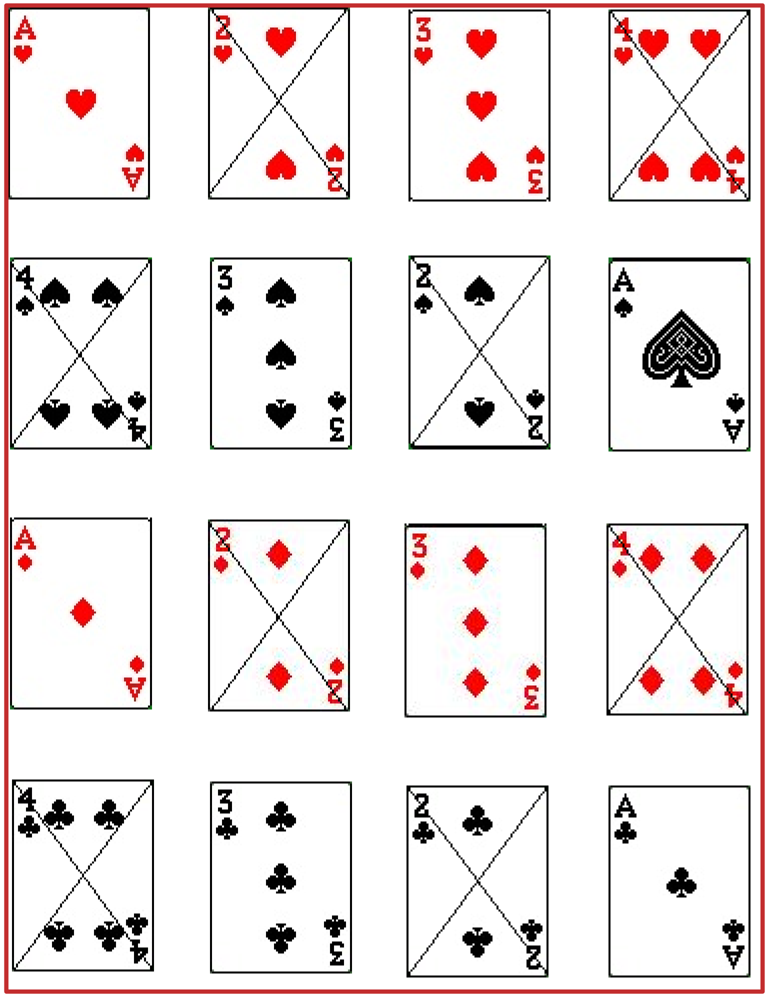
# Tour V : La tapisserie magique

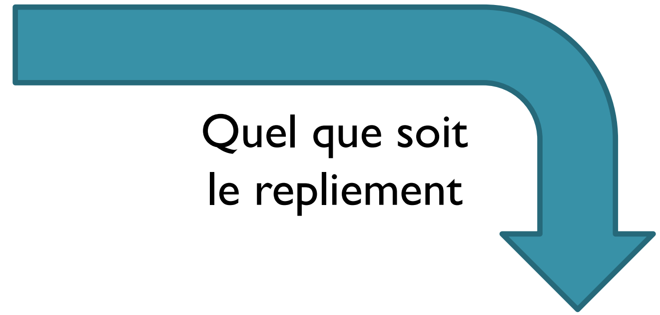
- Donner 4 cartes au hasard à 4 spectateurs différents.
- Chaque spectateur sélectionne une carte parmi les siennes puis les mélange.
- Le magicien récupère les cartes, les mélange et reforme des paquets de 4 cartes.
- Sans regarder les paquets, le magicien montre les cartes de chaque paquet aux spectateurs qui lui indique s'ils voient leur carte.
- Une fois les 4 paquets montrés, le magicien dispose les 16 cartes certaines faces en haut, certaines faces en bas.

# Les matrices



# Le repliement de la matrice

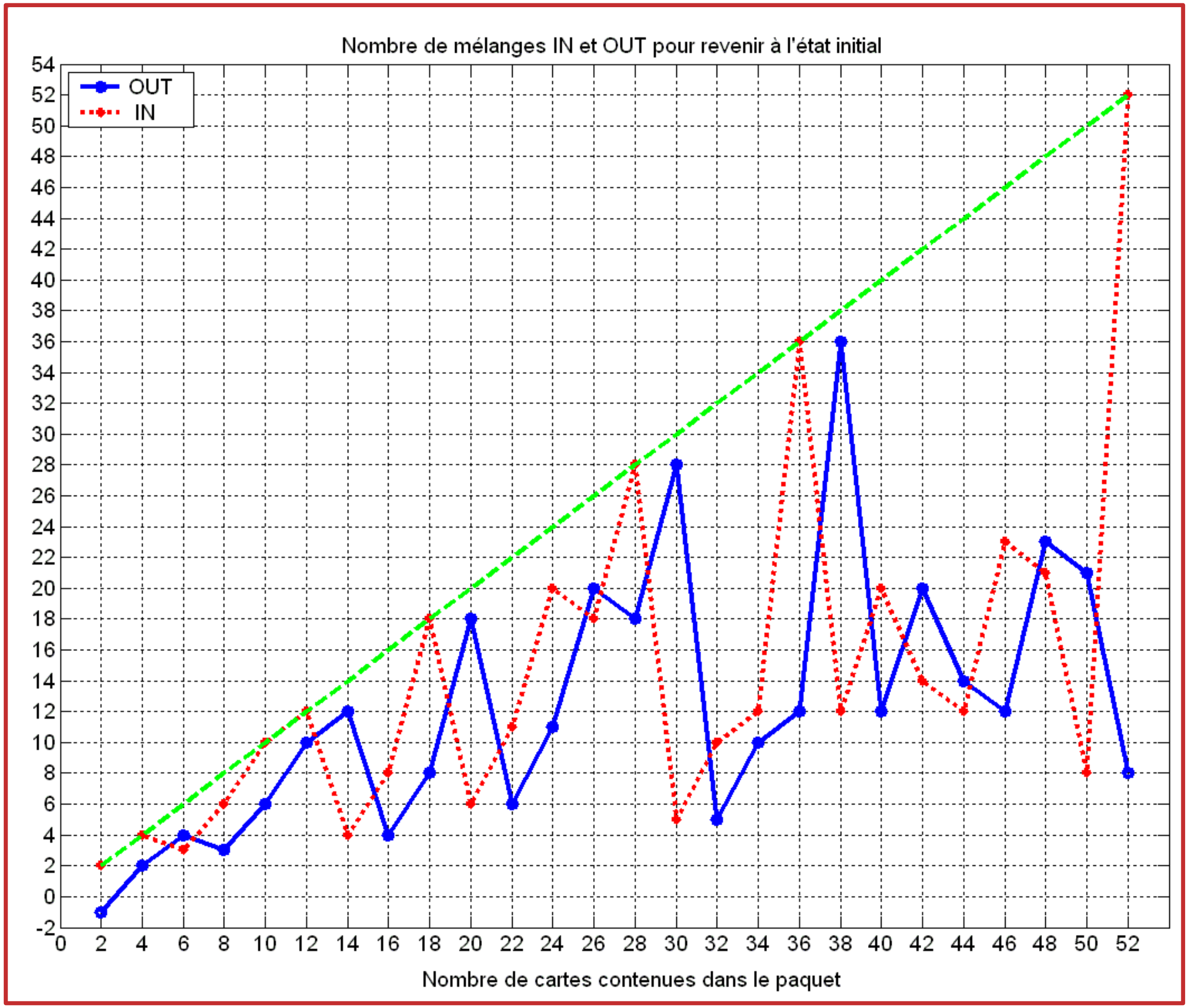




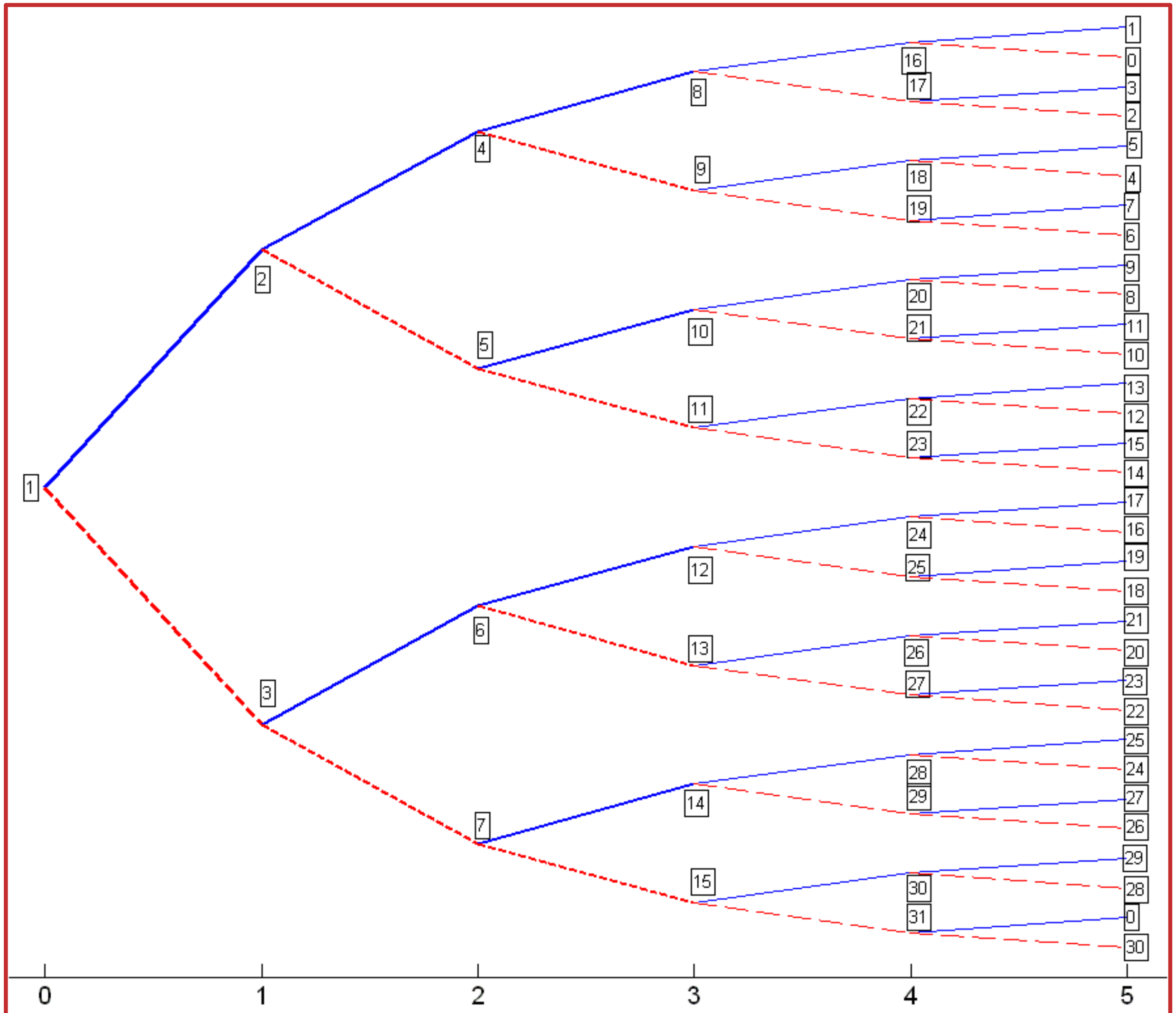

Toutes les cartes seront dans le même sens.

Pour faire apparaître les cartes voulues, on les met dans le sens inverse du sens "normal".

# Nombre de mélanges FARO pour que le paquet revienne à son état initial




# Arbre des positions successives prises par la carte de position initiale *1* par des out-shuffles (en bleu, modulo 31) et des in-shuffles (en rouge, modulo 33) pour un paquet de 32 cartes.



# Les carrés magiques : Costello's tic-tac-toe

- Le magicien donne un paquet de cartes à un spectateur qui est invité à le mélanger à l'américaine..
- Le magicien prend le paquet et sort toutes les cartes d'une même famille comme elle viennent.
- Le jeu est coupé en deux et le magicien prend la première carte du second paquet et la pose où il veut faces en bas dans l'une des 9 cases d'une matrice 3x3
- Le jeu est rassemblé et le spectateur prend la première carte du dessus du paquet et la pose où il le désire face visible.
- Le magicien fait la même chose (en prenant le soin de poser sa carte fac en bas).
- Et ainsi de suite jusqu'à que 3 cartes faces en bas (resp. haut) soient alignées où que toutes les cartes ont été posées.
- …
- Si toutes les cartes ont été posées, alors le magicien met toutes les cartes faces visibles et… cela forme un carré magique !

# Les carrés magiques : Costello's tic-tac-toe (le secret)



- 9 cartes d'une même famille sont montées dans la première moitié du jeu dans l'ordre suivant de la première à la neuvième carte face en bas : 1,8,2,7,3,4,5,6,9
- Le spectateur coupe le jeu à peu près au milieu et mélange les cartes à l'américaine
- Le magicien commence le jeu et le tour est basé sur le fait que le spectateur ne veut pas perdre à ce jeu… Ainsi toutes les positions 'libres' pour placer les cartes sont en fait imposées par le magicien (et les règles du jeu !)
- …

# La suite de Fibonacci

- Le magicien a le dos tourné tout au long du tour… enfin presque !
- Un spectateur écrit un premier nombre puis en dessous un second sur un tableau (par exemple).
- Le magicien lui propose d'additionner les deux nombres pour arriver au troisième.
- Le spectateur continue cette procédure jusqu'à avoir calculé 10 nombres.
- Finalement le spectateur additionne les 10 nombres.
- Le spectateur invite le magicien à se retourner pendant qu'il met hors de vue le tableau.
- …
- Le magicien retrouve la somme !

# La suite de Fibonacci : le secret



La somme vaut 11*le 7ème nombre !

$$\sum_{k=1}^{10} u_k = 11 u_7$$

# Les calendriers : Stover's prediction

- Prenez un calendrier, donnez-le à un spectateur qui choisit un mois au hasard.
- Puis le spectateur encadre une matrice 4x4 de dates pendant que le magicien tourne le dos.
- Le spectateur entoure alors un nombre et élimine tous les nombres sur la même ligne et même colonne.
- Le spectateur réitère trois fois le processus ce qui donne 4 dates entourées.
- Le spectateur additionne ces 4 valeurs et retourne face en bas la page de calendrier puis invite le magicien à se retourner.
- …
- Le magicien retrouve la somme !

# Les calendriers : Stover's prediction (le secret)



Ajoutez les chiffres extrêmes sur une diagonale puis multipliez-le par 2 : c'est la somme recherchée

# Références externes relatif à l’exposé (1/3)


- La preuve par neuf :
  - H. Lorayne. Math & Magie. Magix unlimited, 2007.
  - M. Gardner. Mathematics, magic and mystery. Dover Publication, 1958.
- Les chapelets :
  - P. Reymond . Chapelet idéal. Le grimoire magique n°1 - pp34-36 .
  - M. Joyal. L’apparence du Hasard. C.C. Editions, 2010.
- Le tour d’Aronson :
  - R. Vollmer. The very best of Simon Aronson. Magix Unlimited, Strasbourg, 2002.

# Références externes relatif à l'exposé (2/3)

- Les mélanges de cartes :
  - P. Diaconis, R. Graham. Magical mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks. Princeton University Press, 2011.
  - P. Diaconis, R. L. Graham, W. M. Kantor. The mathematics of perfect shuffles. Advances in applied mathematics~4 (1983), 175--196.
- Le jeu palindromique :
  - M. Maven. Rêver. Marchands de truc éditions, Rennes, 2010 (titre original : Redivider, 2002).
  - R. Vollmer. Le jeu miroir. Magix unlimited.

Le spectacle de cartomagie et ses secrets

Étude mathématique des mélanges Faro

Présentation des principes de Gilbreath

Les applications pédagogiques

Conclusion et Perspectives

# Références externes relatif à l'exposé (3/3)


- Le supplice de Tantale :
  - D. Behr. Sur le bout des doigts. Marchands de truc éditions, Rennes, 2010 (titre original : Handcrafted card magic , 2007)
  - J. Hugard, F. Braue. The Royal Road to Card Magic. Dover, New-York.
- Les principes de Gilbreath :
  - N. L. Gilbreath. Magnetic colors. The Linking Ring 38(5) (1958), 60.
  - N. L. Gilbreath. Second Gilbreath principle. The Linking Ring, June 1966.
  - D. Péris. La péristance (généralisation du second principe de Gilbreath). La boutique de l'illusion, Paris, 2006.

# Ce que peut contenir un livre de Mathémagie…



- W. Simon. Mathematical Magic. Dover, 1964
  - La suite de Fibonacci (pp20-25)
  - Le nombre cyclique (pp31-32)
  - Le ruban de Moëbius (pp37-46)
  - Les calendriers (pp60-80)
  - Les carrés magiques (pp106-134)

# Références externes relatif à la mathémagie


- D. Aldous, P. Diaconis. Shuffling cards and stopping times, Amer. Math. Monthly 93(5) (1986), 333--348.
- P. Diaconis, R. Graham. Magical mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks. Princeton University Press, 2011.
- Hiéronymus. Tours extraordinaires de Mathémagique. Ellipses, Paris, 2005.
- M. Gardner. Martin Gardner's mathematical games : the entire collection of his scientific American columns. The Mathematical Association of America, 2005 (CD).
- J. Tamariz. Mnemonica. Editions Georges Proust, 2004.