MATH & MAGIE (II)

Les *MATHÉMATIQUES* au service de la *MAGIE* ?
ou
La *MAGIE* au service des *MATHÉMATIQUES* ?

Aimé Lachal & Pierre Schott

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

esiea ECOLE D'INGENIEURS DU MONDE NUMERIQUE

INSA de Lyon – 4 avril 2016

PLAN DE L'EXPOSÉ

Les Mathématiques au service de la Magie

La Magie au service des Mathématiques

Cartomagie

(résumé de la 1^{re} conférence)

30 secondes (1)
(ou calculer plus vite que l'ordinateur !)

30 secondes (2)
(ou réfléchir plus vite que l'ordinateur !)

Clôture de séance :
un problème ouvert

3 personnes – 3 couleurs
Le magicien devine !

Les carrés magiques

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

29 mars 2012

esiea ECOLE D'INGENIEURS DU MONDE NUMERIQUE

Première conférence à l'INSA

Un spectacle de CARTOMAGIE

(Résumé)

Cartomagie

Le principe

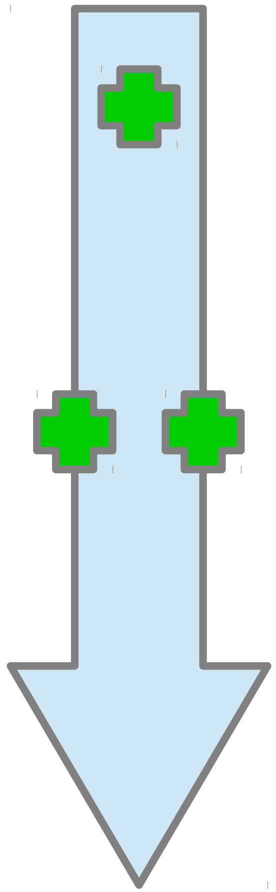
Cartomagie
(Magie des cartes)

Self-working card tricks
(Tours automatiques à base de Maths)

Prestidigitation
(Passes magiques)

Mélanges et coupes
(par le magicien)

Effet magique



Cartomagie

Le principe

Mélanges donnant un chaos

→ **Mélange *« à la française »***

→ **Mélange *« hindou »***

Mélanges donnant un chaos organisé

→ **Mélange parfait *« Faro »* (ou *« Pharaon »*)**

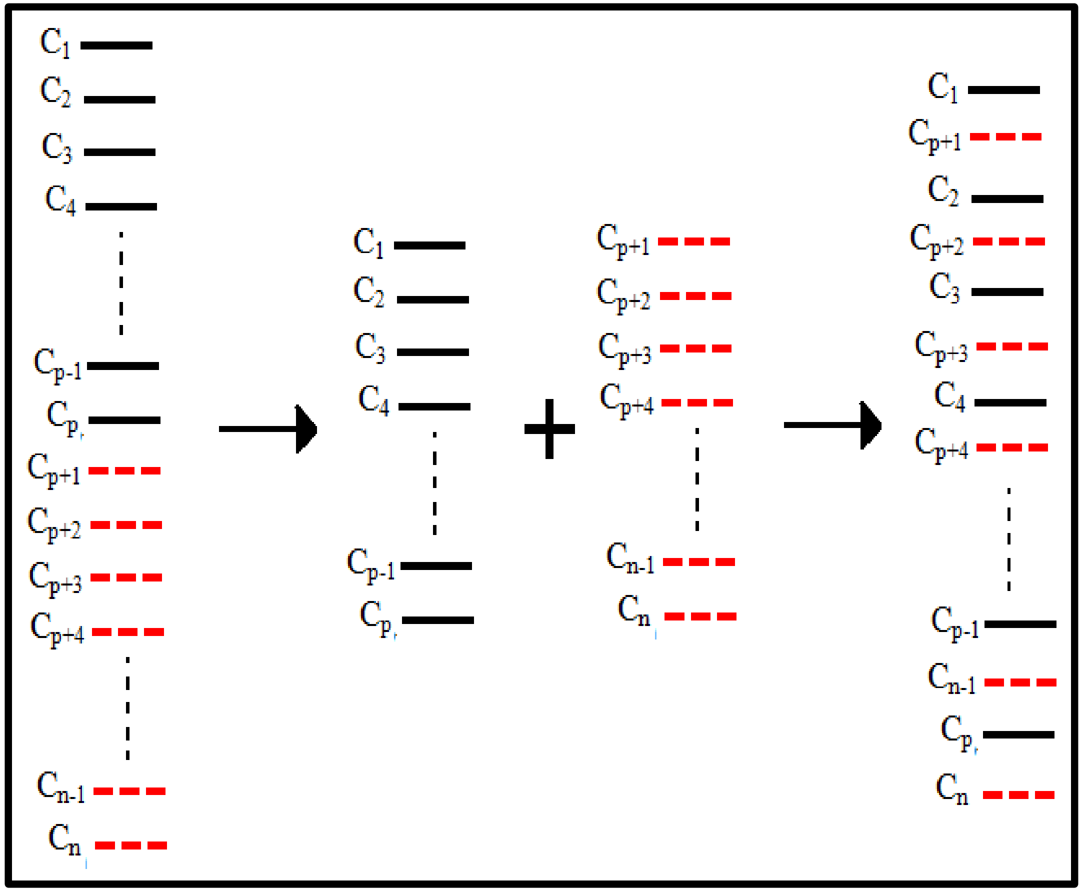
→ **Mélange *« américain »* (ou *« à la queue d'aronde »*)**

Mélanges de cartes

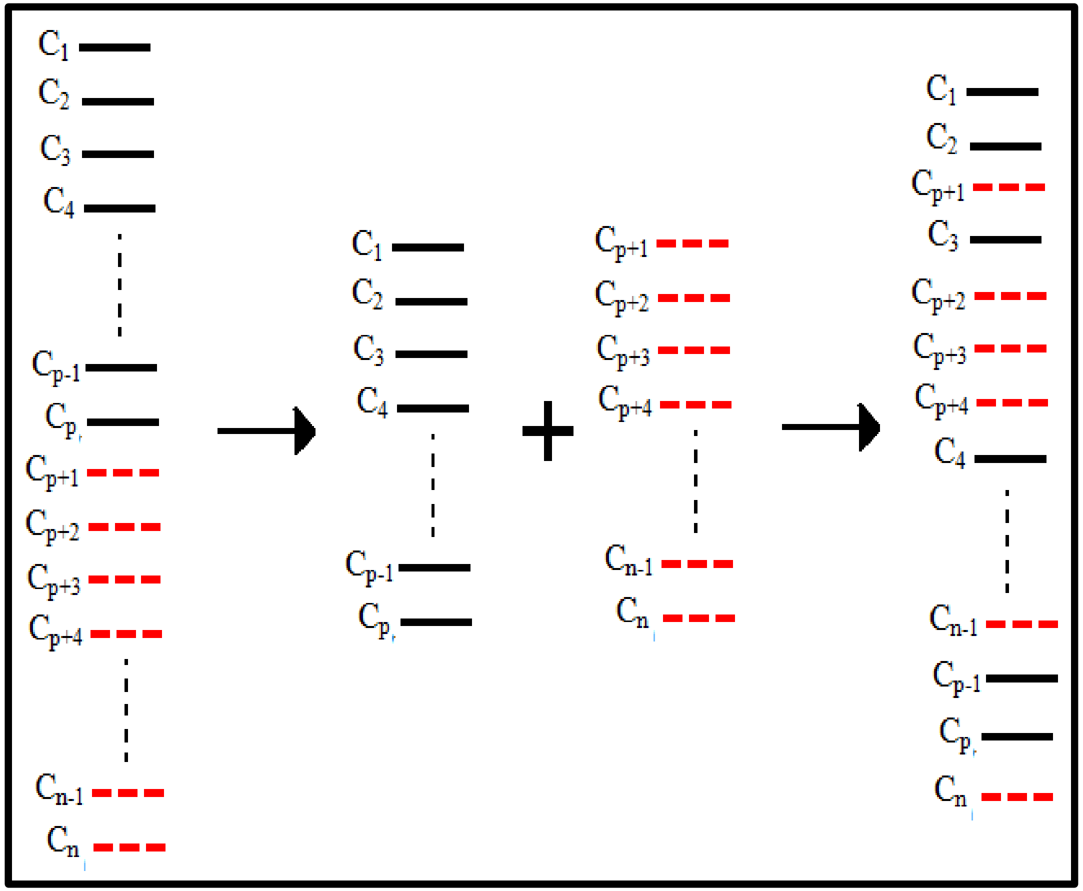
Le principe

Les coupes et mélanges donnant un chaos organisé

Mélange « *Faro* »
→ *Déterministe*

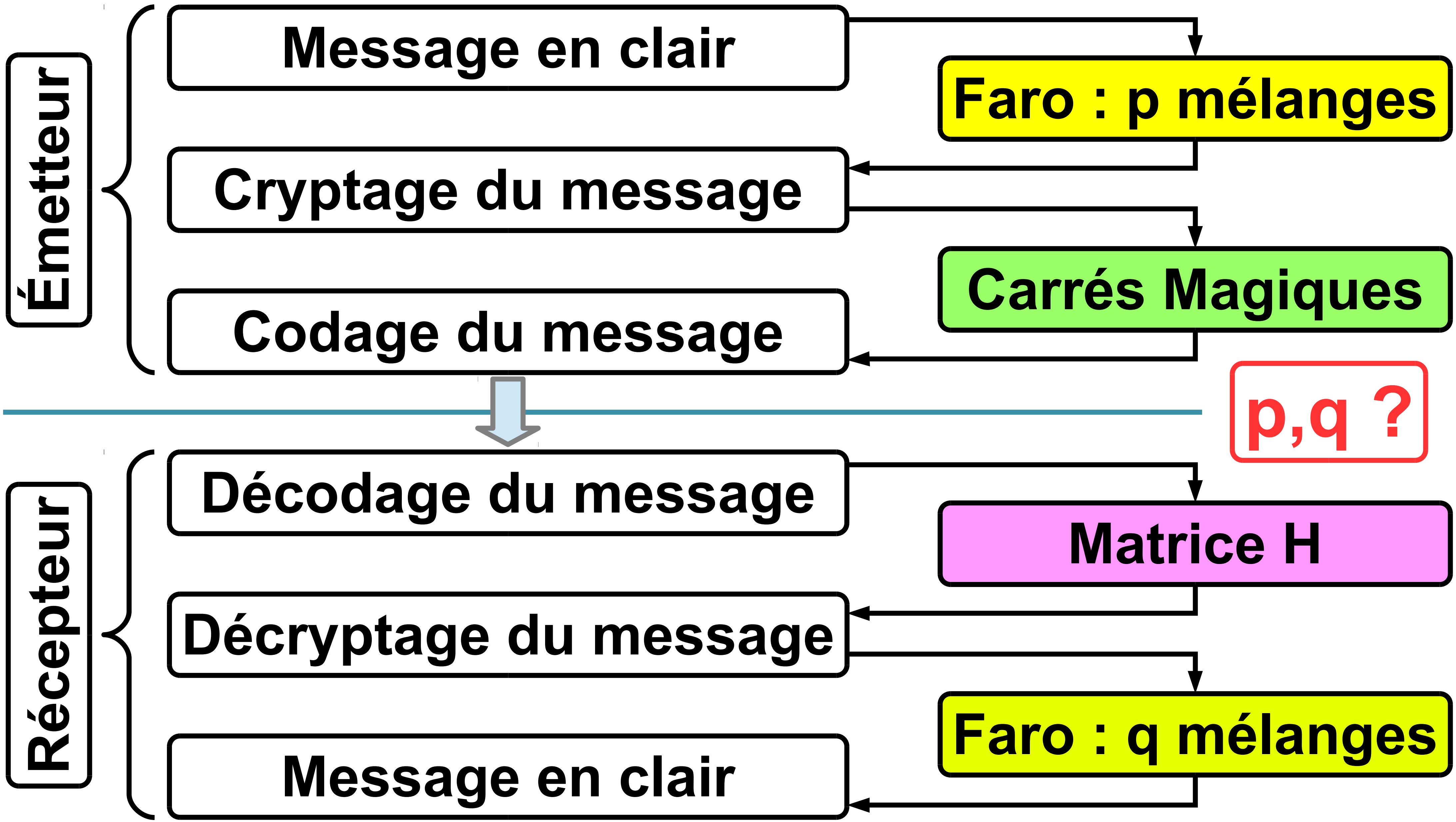


Mélange « *américain* »
→ *Aléatoire*



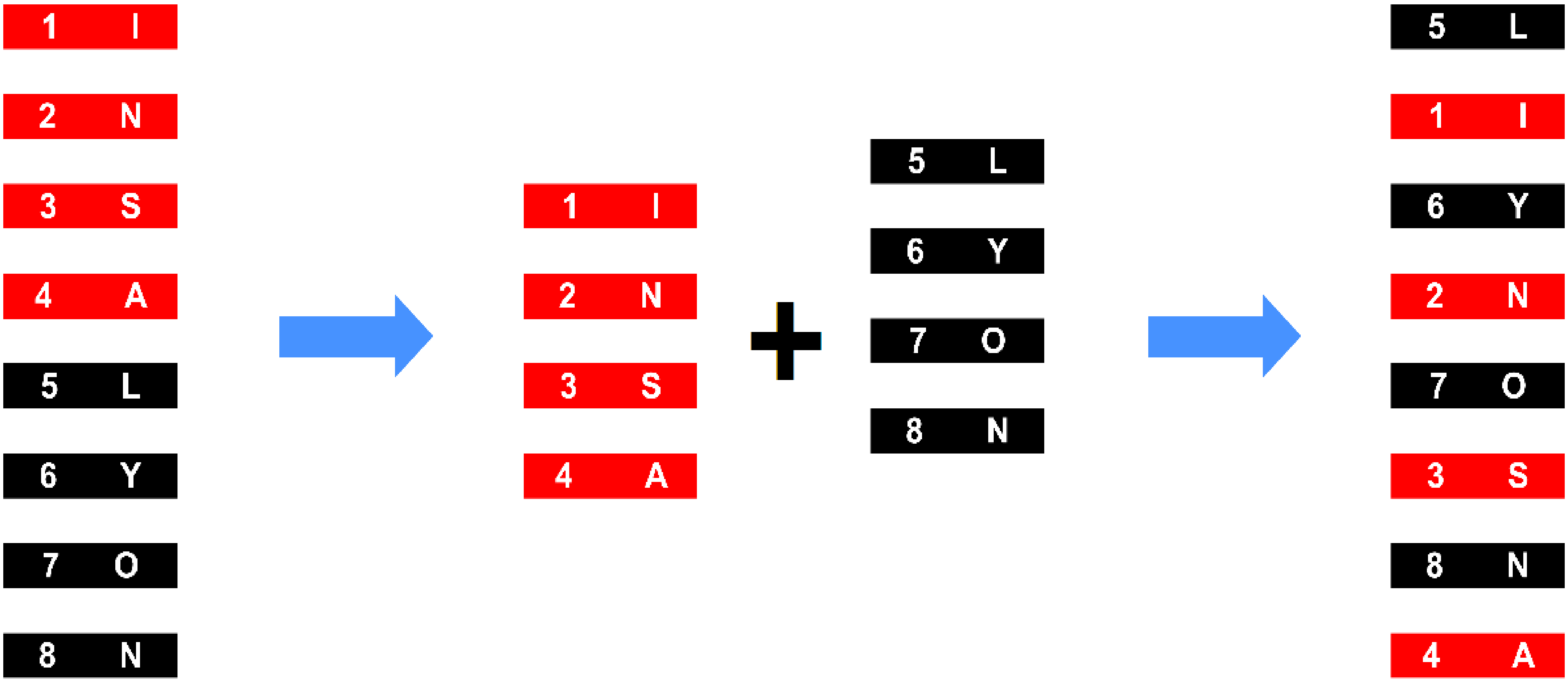
Mélanges FARO itérés

Une application : cryptographie



Mélange Faro

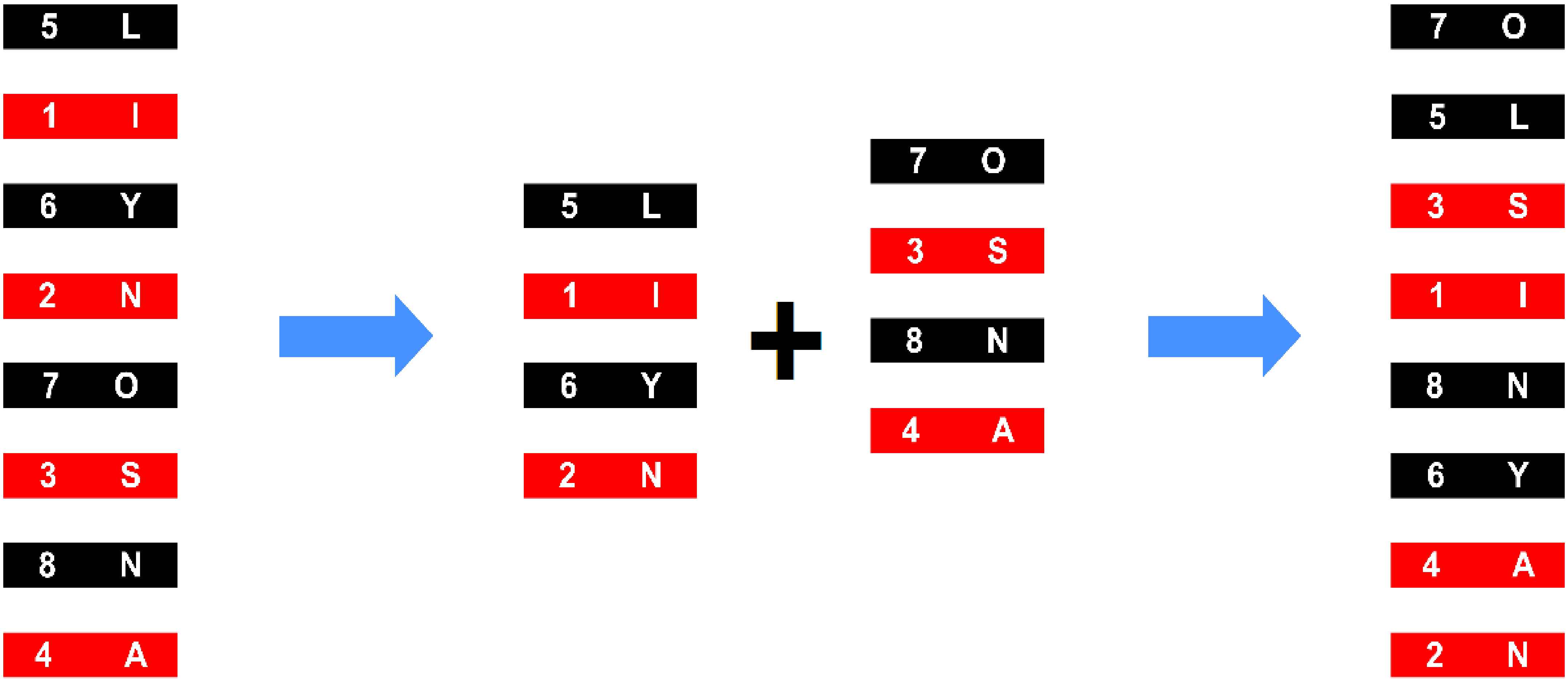
La manipulation



1er mélange : carte n° 1 → position n° 2

Mélange Faro

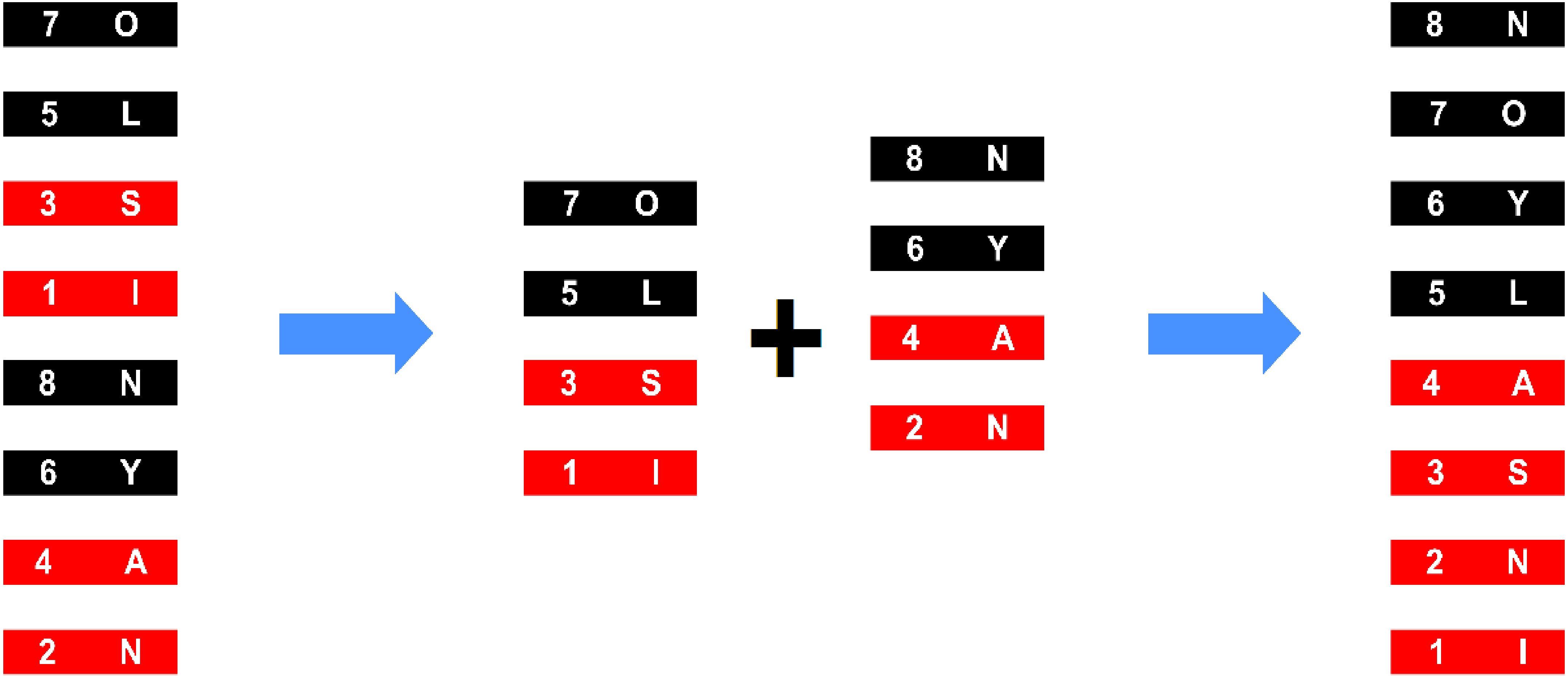
La manipulation



2^e mélange : carte n° 1 → position n° 4

Mélange Faro

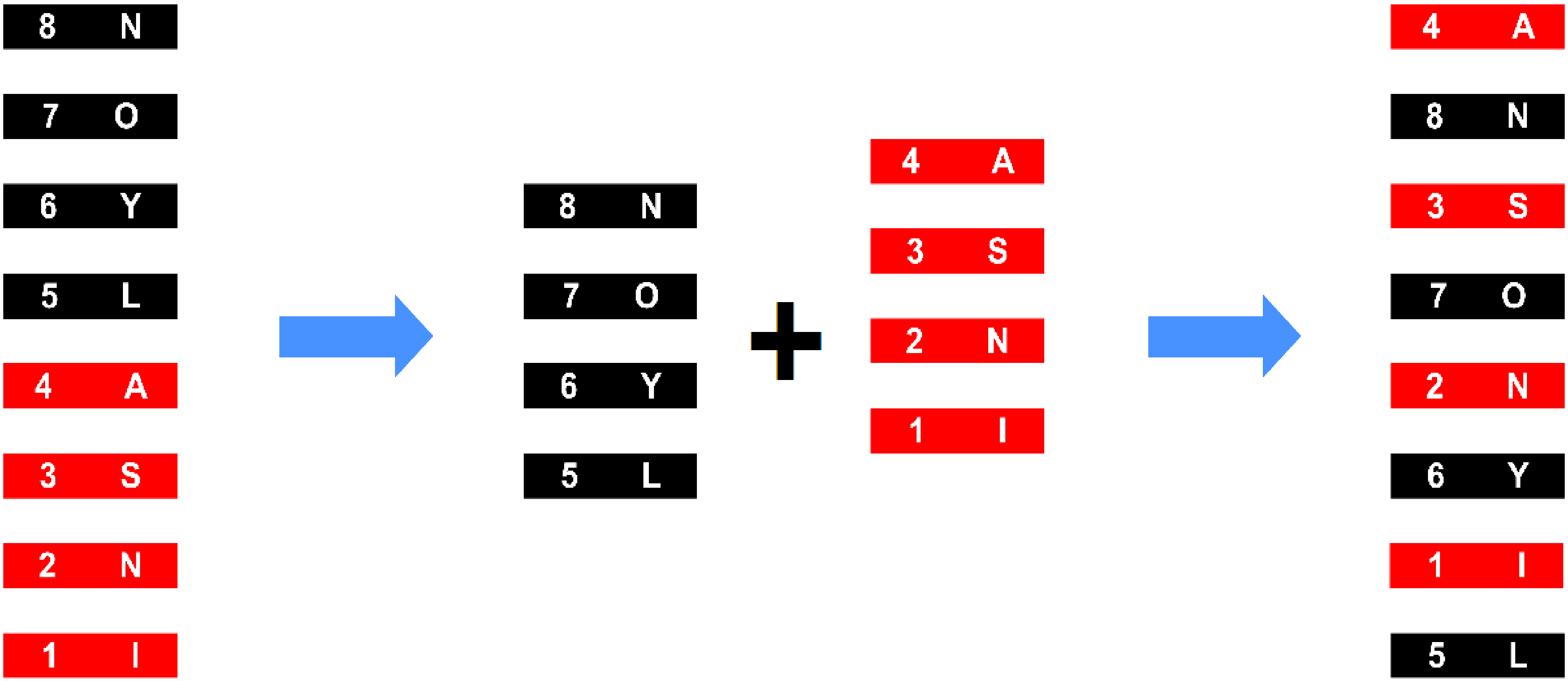
La manipulation



3e mélange : carte n° 1 → position n° 8

Mélange Faro

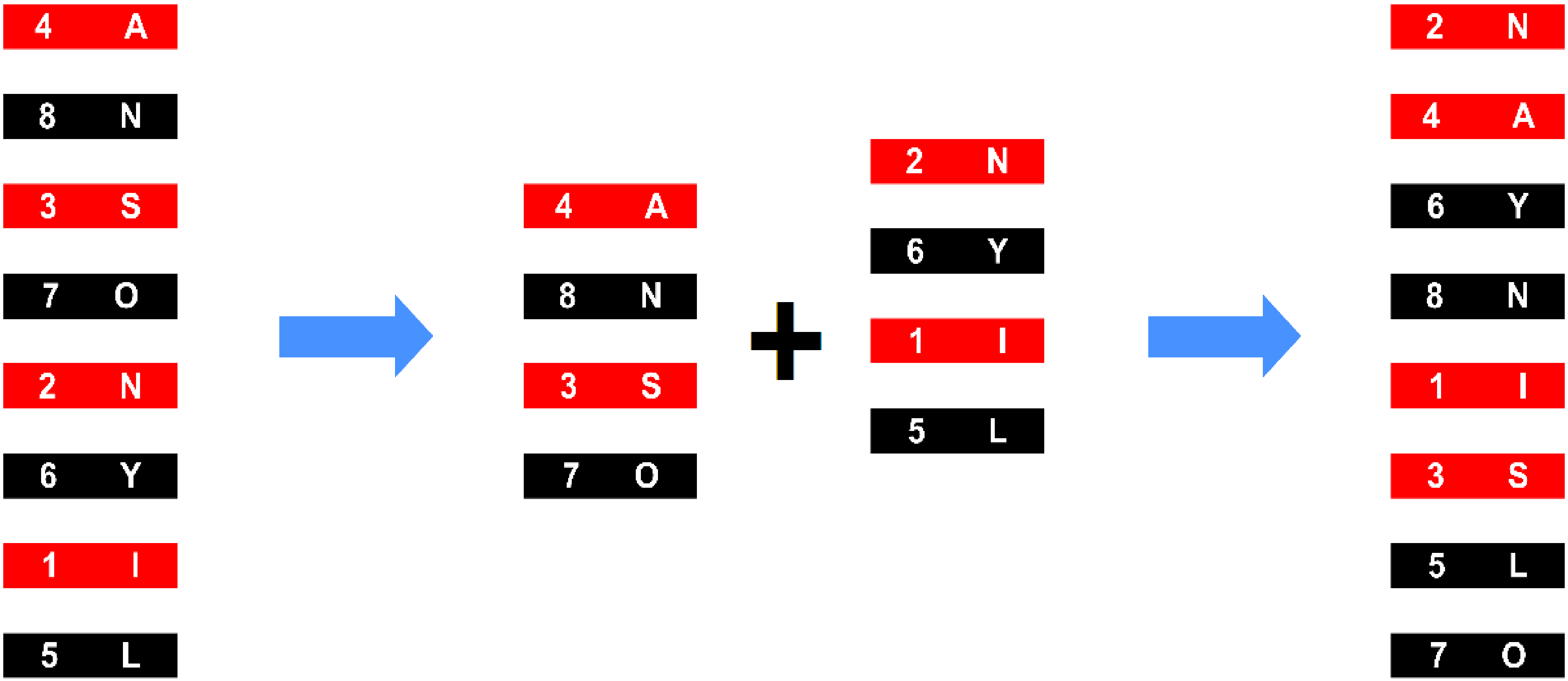
La manipulation



4^{e} mélange : carte n° 1 $\longrightarrow$ position n° 16 $\equiv 7$ [mod 9]

Mélange Faro

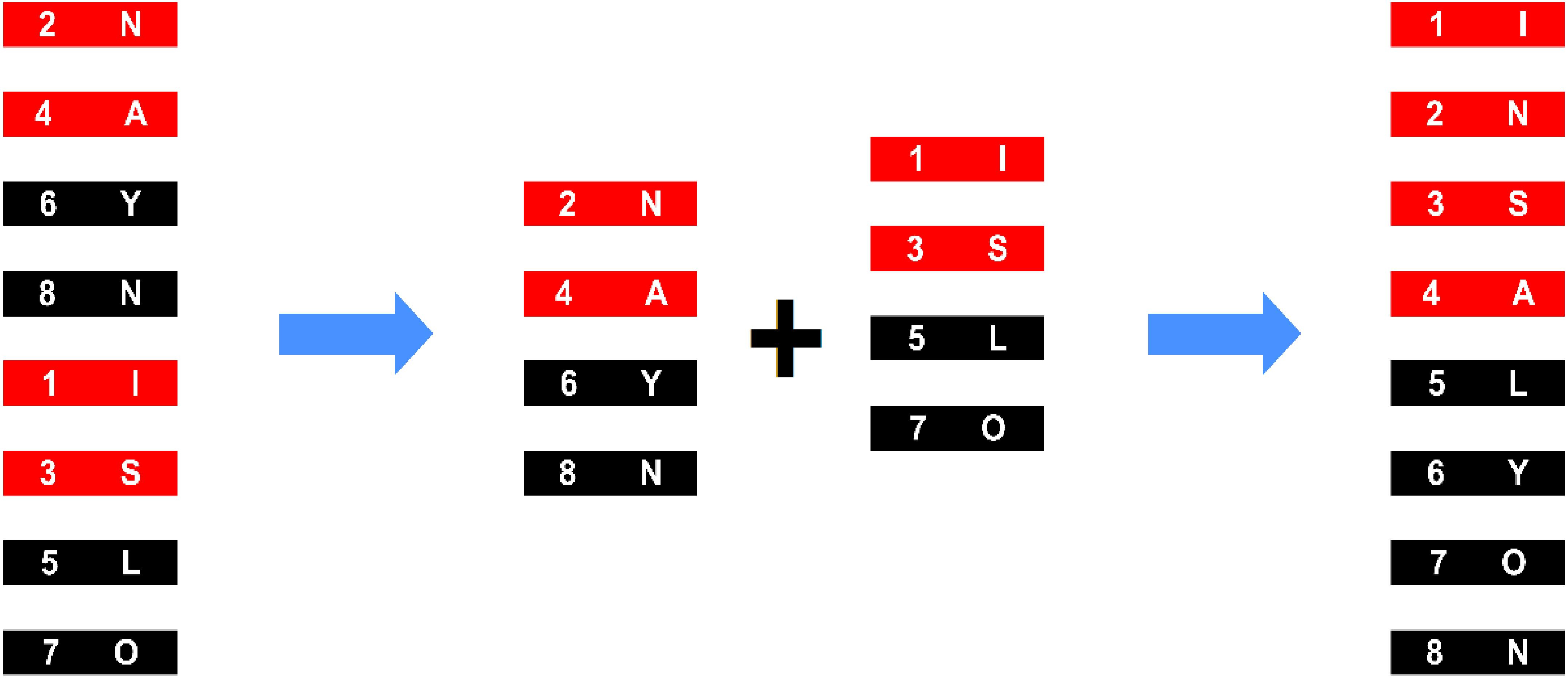
La manipulation



5e mélange : carte n° 1 → position n° 32 ≡ 5 [mod 9]

Mélange Faro

La manipulation



6e mélange : carte n° 1 ⟶ position n° 64 ≡ 1 [mod 9]

Mélange Faro

Le secret

Modélisation

i : position avant mélange $\leftrightarrow$ $j = f(i)$: position après mélange

$$f(i) = \begin{cases} 2i & \text{si } i \leqslant 4 \\ 2i-9 & \text{si } i \geqslant 5 \end{cases} \equiv 2i \; [\text{mod } 9]$$

$$f^{-1}(j) = \begin{cases} j/2 & \text{si } j \text{ est pair} \\ (j+9)/2 & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}$$

Mélange Faro

Le secret

Le secret : une période…

$$2^6 = 64 \equiv 1 \ [\mathrm{mod}\ 9] \ \Rightarrow \ f^6 = id$$

Au passage, une demi-période…

$$f^{-1} = f^5 \quad \text{et} \quad f^3(i) = 9 - i$$

Anti Faro

3e mélange : jeu inversé

Mélange Faro

Le secret

Théorème : **pour un jeu de 2^p cartes,**

- ***2p mélanges Faro ramènent le jeu à son ordre initial ;***
- ***p mélanges Faro emmènent le jeu dans un ordre inversé.***

Exemple : **pour un jeu de 32 cartes,**

10 mélanges Faro ramènent le jeu à son ordre initial.

Réf. : A.L., Mélanges parfaits de cartes – (I) et (II), Quadrature 76 et 77 (2010)

Mélanges Faro itérés

Généralisation et application à la cryptographie

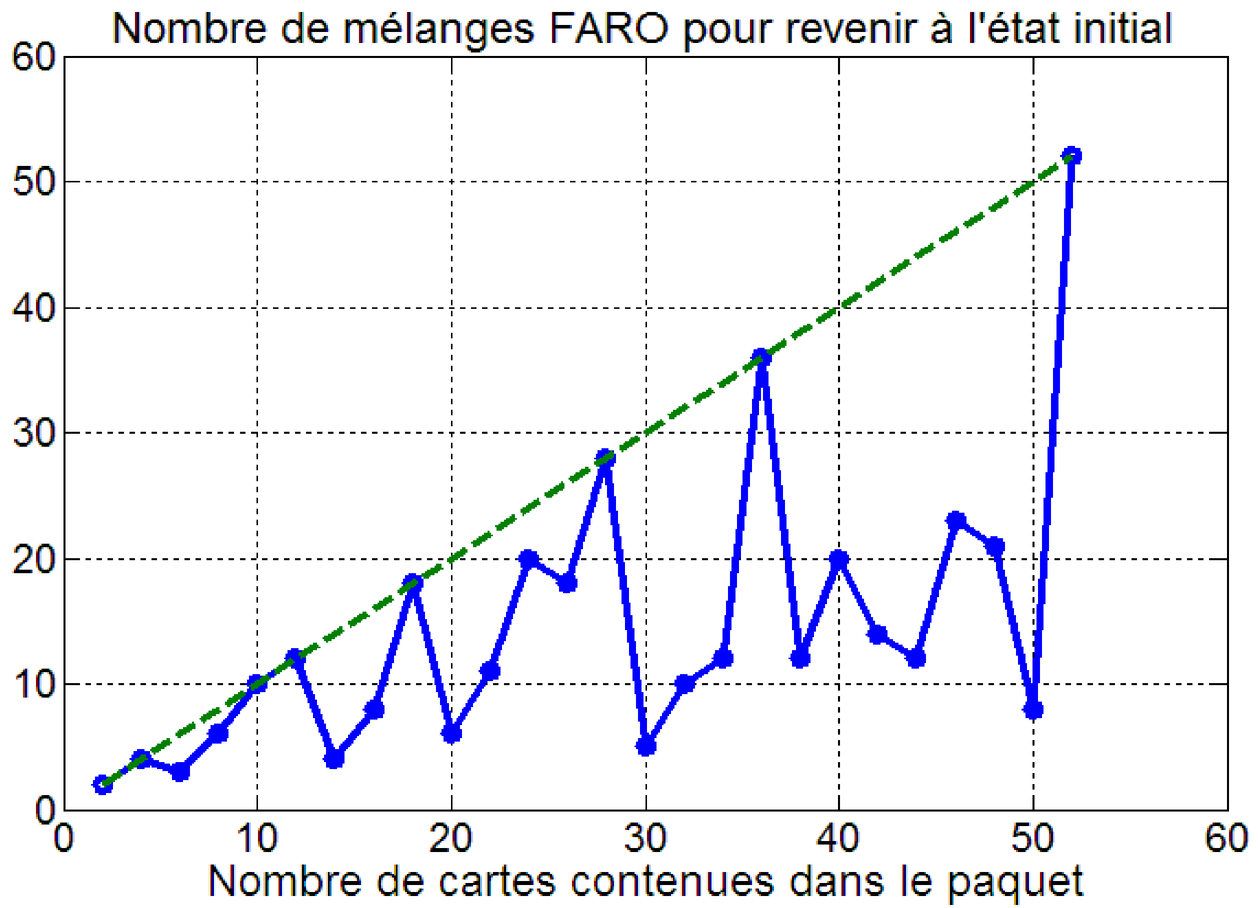
Un jeu de n cartes revient à sa position initiale après r mélanges Faro avec $2^r \equiv 1 \ [\mathrm{mod}\ (n+1)]$.

Pour le cryptage

- **Si r est pair, on crypte avec $p = r/2$ mélanges.**
- **Si r est impair, on crypte avec $p = (r+1)/2$ mélanges.**

Pour le décryptage

- **Si r est pair, on décrypte avec $q = r - p = r/2$ mélanges.**
- **Si r est impair, on décrypte avec $q = r - p = (r-1)/2$ mélanges.**



Cartomagie

Le principe

Cartomagie
(Magie des cartes)

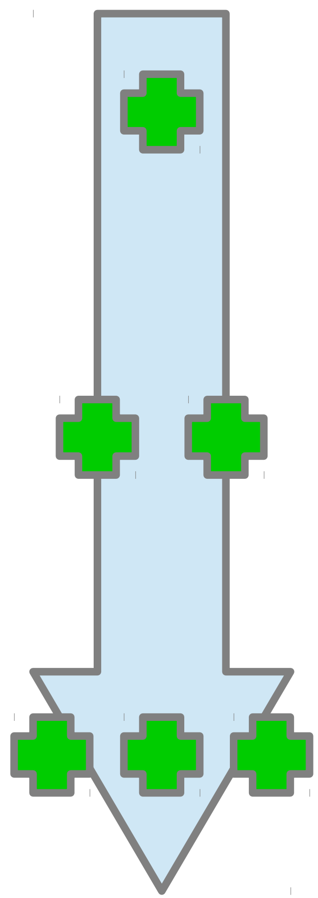
Self-working card tricks
(Tours automatiques à base de Maths)

Prestidigitation
(Passes magiques)

Mélanges et coupes
(par le magicien)

Mélanges et coupes
(par le spectateur)

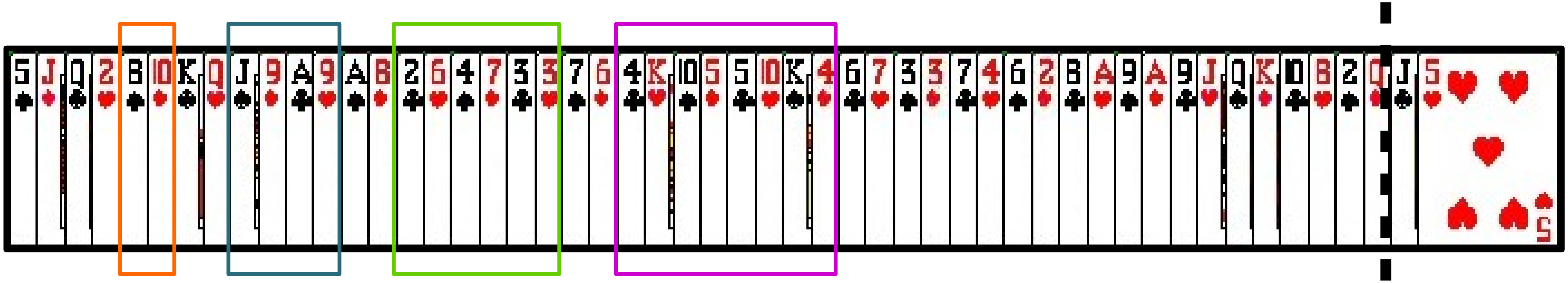
Effet super magique



Invariance dans un mélange

Péristance et principes de Gilbreath

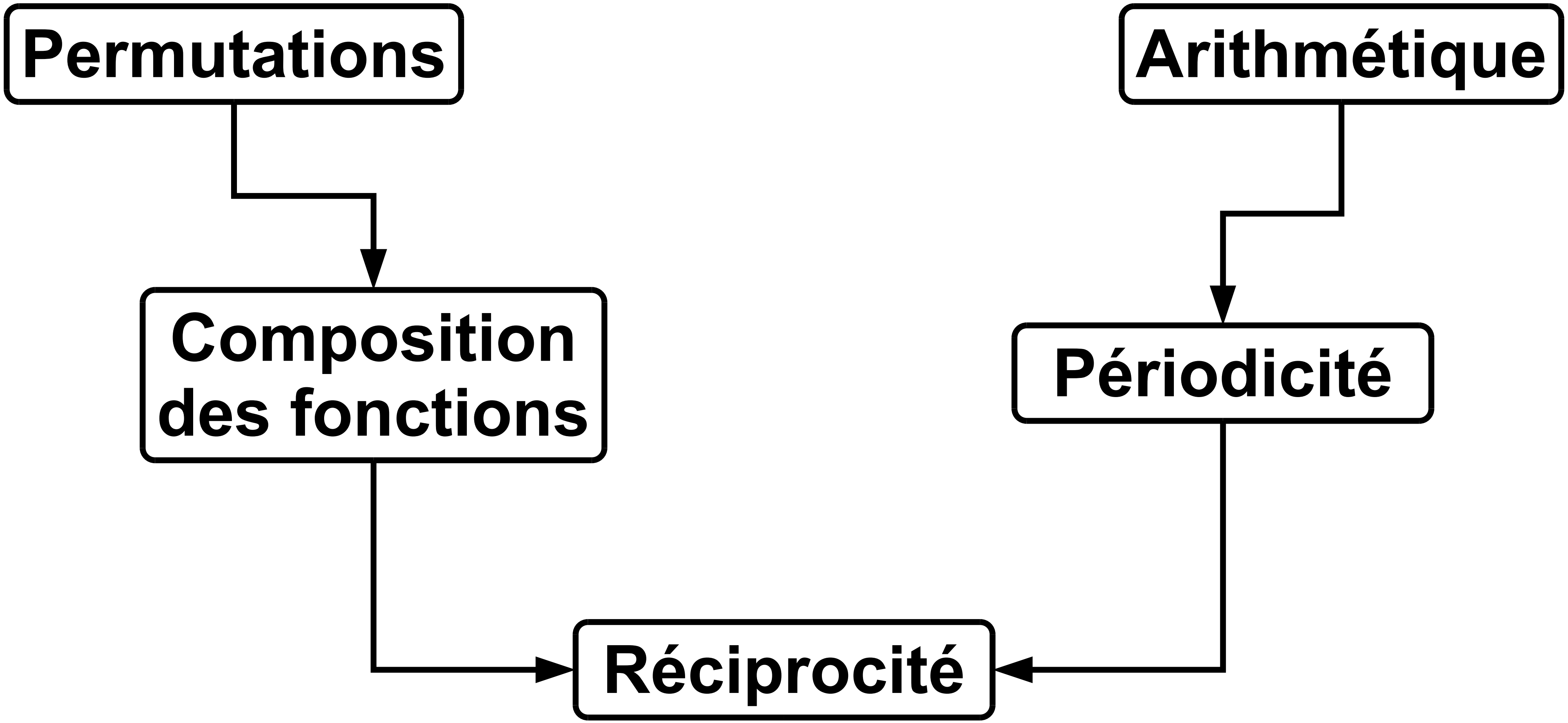
- **Jeu arrangé en fenêtre glissante de longueur L et cyclique**
- **Inversion d'une partie du jeu en posant les cartes sur la table (jeu en palindrome incomplet)**
- **Mélange à l'américaine « Fair-play » par un spectateur**
- **Par paquet de L cartes du jeu mélangé, la propriété de la fenêtre est conservée**



Réf. : A.L. & P. S. , Cartomagie : principes de Gilbreath – (I), (II) et (III), Quadrature 85, 86 et 87 (2012/2013)

Mélanges de cartes

Concepts mathématiques de base



30 secondes

Ou

Calculer plus vite que l'ordinateur ! (1)

Tour : 30 secondes ! (1)

La représentation magique

Chaque spectateur effectue ces calculs :

3 spectateurs avec chacun un couple de nombres u_1, u_2

$$
\begin{aligned}
u_3 &= u_1 + u_2 = \cdots \\
u_4 &= u_2 + u_3 = \cdots \\
u_5 &= u_3 + u_4 = \cdots \\
u_6 &= u_4 + u_5 = \cdots \\
u_7 &= u_5 + u_6 = \cdots \\
u_8 &= u_6 + u_7 = \cdots \\
u_9 &= u_7 + u_8 = \cdots \\
u_{10} &= u_8 + u_9 = \cdots
\end{aligned}
$$

Le magicien écrit 3 nombres en 30 secondes maximum… Les sommes des 10 nombres !

Tour : 30 secondes ! (1)

Le secret

La suite de Fibonacci

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Leonardo Fibonacci
(1175 – 1250)

les deux premiers termes u_1 et u_2 étant donnés

Tour : 30 secondes ! (1)

Le secret

$$
\begin{aligned}
u_3 &= u_1+u_2 \\
u_4 &= u_2+u_3 = u_1+2u_2 \\
u_5 &= u_3+u_4 = 2u_1+3u_2 \\
u_6 &= u_4+u_5 = 3u_1+5u_2 \\
u_7 &= u_5+u_6 = 5u_1+8u_2 \\
u_8 &= u_6+u_7 = 8u_1+13u_2 \\
u_9 &= u_7+u_8 = 13u_1+21u_2 \\
u_{10} &= u_8+u_9 = 21u_1+34u_2
\end{aligned}
$$

$$S_{10} = 55u_1 + 88u_2 = \boxed{11u_7}$$

Tour : 30 secondes ! (1)

Le secret

$$\begin{array}{lclcl}
u_1 & = & u_1 & & \\
u_2 & = & u_2 & & \\
u_3 & = & u_1+u_2 & & \\
u_4 & = & u_2+u_3 & = & u_1+2u_2 \\
u_5 & = & u_3+u_4 & = & 2u_1+3u_2 \\
u_6 & = & u_4+u_5 & = & 3u_1+5u_2
\end{array}$$

$$S_6 = 8u_1+12u_2 = \boxed{4u_5}$$

Tour : 30 secondes ! (1)

Une ouverture mathématique

Les suites de Fibonacci

$$\boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$$

les deux premiers termes u_1 et u_2 étant donnés.

Problème : indépendamment de u_1 et u_2, pour chaque entier n, peut-on trouver un nombre A et un entier p *tels que*

$$\boxed{S_n = Au_p\ ?}$$

Tour : 30 secondes ! (1)

Une ouverture mathématique

1re réponse partielle : pour $a = b = 1$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Théorème

Pour tout entier n multiple de 4 plus 2

$$S_n = L_n u_{n/2}$$

les L_n étant les nombres de Lucas.

Edouard Lucas
(1842 – 1891)

Tour : 30 secondes ! (1)

Une ouverture mathématique

2e réponse partielle : pour $b = -1$

$$u_{n+2} = au_{n+1} - u_n$$

Théorème

Pour tout entier impair n

$$S_n = A_n u_{(n-1)/2}$$

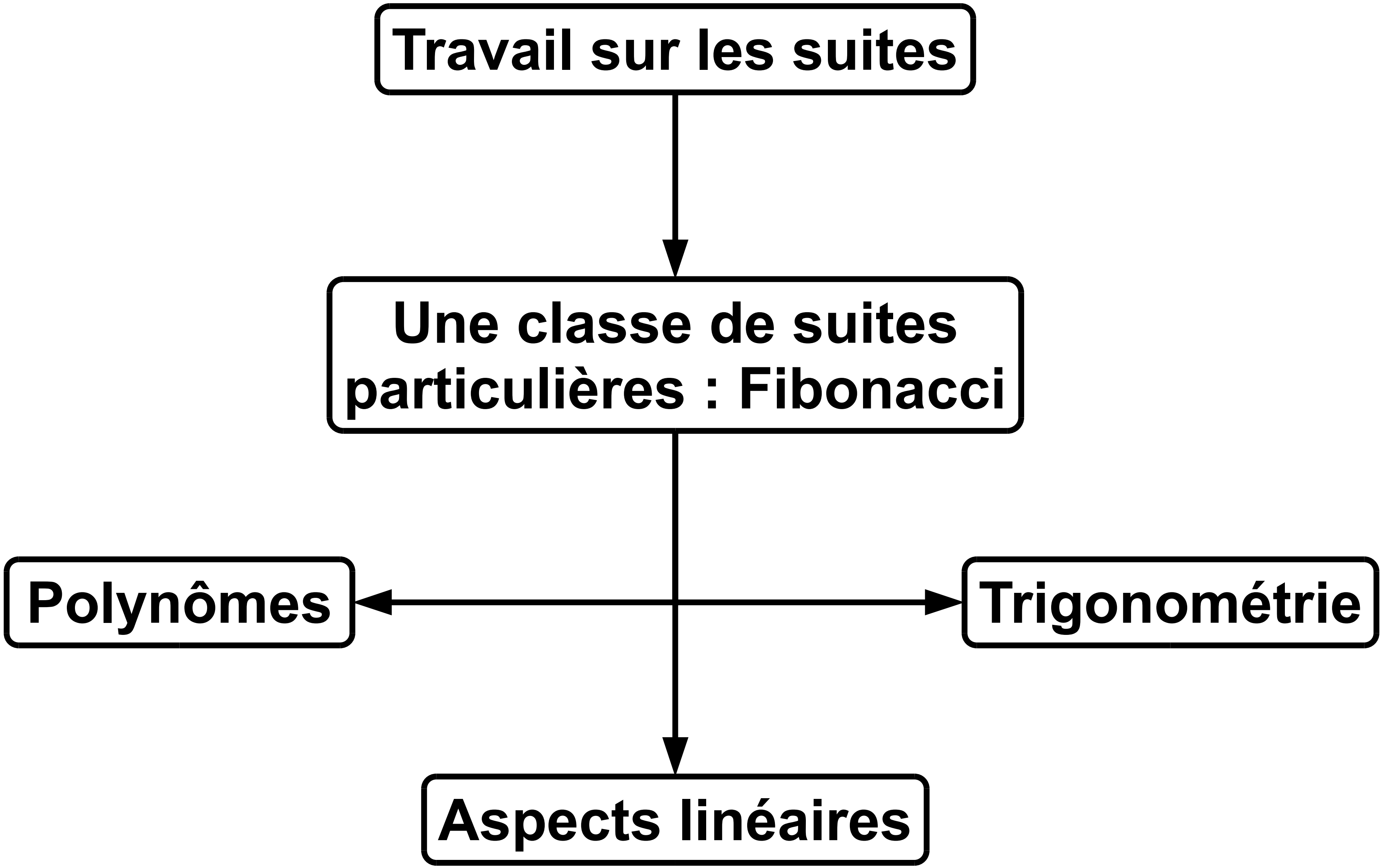
avec A_n : nombres de Tchebychev.

Pafnouti Tchebychev
(1821 – 1894)

Réf. : A.L., Un tour de magie autour de Fibonacci, Lucas et Tchebychev, Quadrature 93 (2014)

Tour : 30 secondes ! (1)

Concepts mathématiques de base



30 secondes

Ou

Réfléchir plus vite que l'ordinateur ! (2)

Tour : 30 secondes ! (2)

La représentation magique

Le public donne un nombre compris entre 35 et 99

Le magicien remplit un carré magique de taille 4x4 de somme magique donnée par le public

Tour : 30 secondes ! (2)

Le secret

A	12+x	6+x	3+x
2+x	7+x	9+x	A+3
11+x	A+1	4+x	5+x
8+x	1+x	A+2	10+x

$A = S - 21 - 3x$

8	11	B	1
B–1	2	7	12
3	B+2	9	6
10	5	4	B+1

$B = S - 20$

Tour : 30 secondes ! (2)

L'explication

0	12	6	3
2	7	9	3
11	1	4	5
8	1	2	10

Carré magique de somme 21

8	11	0	1
–1	2	7	12
3	2	9	6
10	5	4	1

Carré magique de somme 20

Interlude :

Carrés magiques d'ordre 4

Cf. le diaporama complémentaire

3 personnes

3 couleurs

Le magicien

devine !

Tour : Red, Green, Blue

La représentation magique

D'après William SIMON

- 3 personnes
- 3 cartes « instructions »
- 3 jetons de couleur
- 1 paquet de cartes blanches

- Chaque personne a choisi un jeton de couleur
- Chaque personne a récupéré des cartes du paquet
- Le magicien n'a rien vu !

Le magicien retrouve la couleur prise par chaque spectateur

Tour : Red, Green, Blue

La représentation magique — D'après William SIMON

A	B	C
Si vous avez choisi le jeton ROUGE prenez **1 carte**	Si vous avez choisi le jeton ROUGE prenez **2 cartes**	Si vous avez choisi le jeton ROUGE prenez **4 cartes**
Si vous avez choisi le jeton VERT prenez **2 cartes**	Si vous avez choisi le jeton VERT prenez **4 cartes**	Si vous avez choisi le jeton VERT prenez **8 cartes**
Si vous avez choisi le jeton BLEU prenez **3 cartes**	Si vous avez choisi le jeton BLEU prenez **6 Cartes**	Si vous avez choisi le jeton BLEU prenez **12 cartes**

+ 17 cartes blanches

Tour : Red, Green, Blue

Le secret

x1	x2	x4	Total	Reste	a = 1 b = 2 c = 3
1	4	12	17	0	a + 2b + 4c
	6	8	15	2	a + 2c + 4b
2	2	12	16	1	b + 2a + 4c
	6	4	12	5	b + 2c + 4a
3	2	8	13	4	c + 2a + 4b
	4	4	11	6	c + 2b + 4a

Ce choix fonctionne !

Tour : Red, Green, Blue

Le secret

x1	x2	x4	Total	Reste	a = 1 b = 3 c = 4
1	6	16	23	0	a + 2b + 4c
	8	12	21	2	a + 2c + 4b
3	2	16	21	2	b + 2a + 4c
	8	4	15	8	b + 2c + 4a
4	2	12	18	5	c + 2a + 4b
	6	4	14	9	c + 2b + 4a

Ce choix <u>NE</u> fonctionne <u>PAS</u> !

Tour : Red, Green, Blue

Une ouverture mathématique

x α_1	x α_2	x α_3	Total
a_1	a_2	a_3	$t_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$
	a_3	a_2	$t_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_3 + \alpha_3 a_2$
a_2	a_1	a_3	$t_3 = \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 a_3$
	a_3	a_1	$t_4 = \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_3 + \alpha_3 a_1$
a_3	a_1	a_2	$t_5 = \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_1 + \alpha_3 a_2$
	a_2	a_1	$t_6 = \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_1$

Un essai de généralisation

Tour : Red, Green, Blue

Une ouverture mathématique

Problème : **conditions pour que les totaux t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 soient tous différents ?**

$\rightarrow$ ***15 inégalités dont 6 redondantes.***

Modélisation

Correspondance *permutation* $\leftrightarrow$ *total*

$$f : \sigma \rightarrow \alpha_1 a_{\sigma(1)} + \alpha_2 a_{\sigma(2)} + \alpha_3 a_{\sigma(3)}$$

$\rightarrow$ **Problème équivalent à *f injective***

Tour : Red, Green, Blue

Une ouverture mathématique

Solution

a_1, a_2, a_3 *tous distincts*

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *tous distincts*

$$(\alpha_1 - \alpha_2)a_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)a_2 \neq (\alpha_1 - \alpha_3)a_3$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)a_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)a_3 \neq (\alpha_1 - \alpha_3)a_2$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)a_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)a_1 \neq (\alpha_1 - \alpha_3)a_3$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)a_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)a_3 \neq (\alpha_1 - \alpha_3)a_1$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)a_3 + (\alpha_2 - \alpha_3)a_1 \neq (\alpha_1 - \alpha_3)a_2$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)a_3 + (\alpha_2 - \alpha_3)a_2 \neq (\alpha_1 - \alpha_3)a_1$$

Tour : Red, Green, Blue

Une ouverture mathématique

Problème ouvert

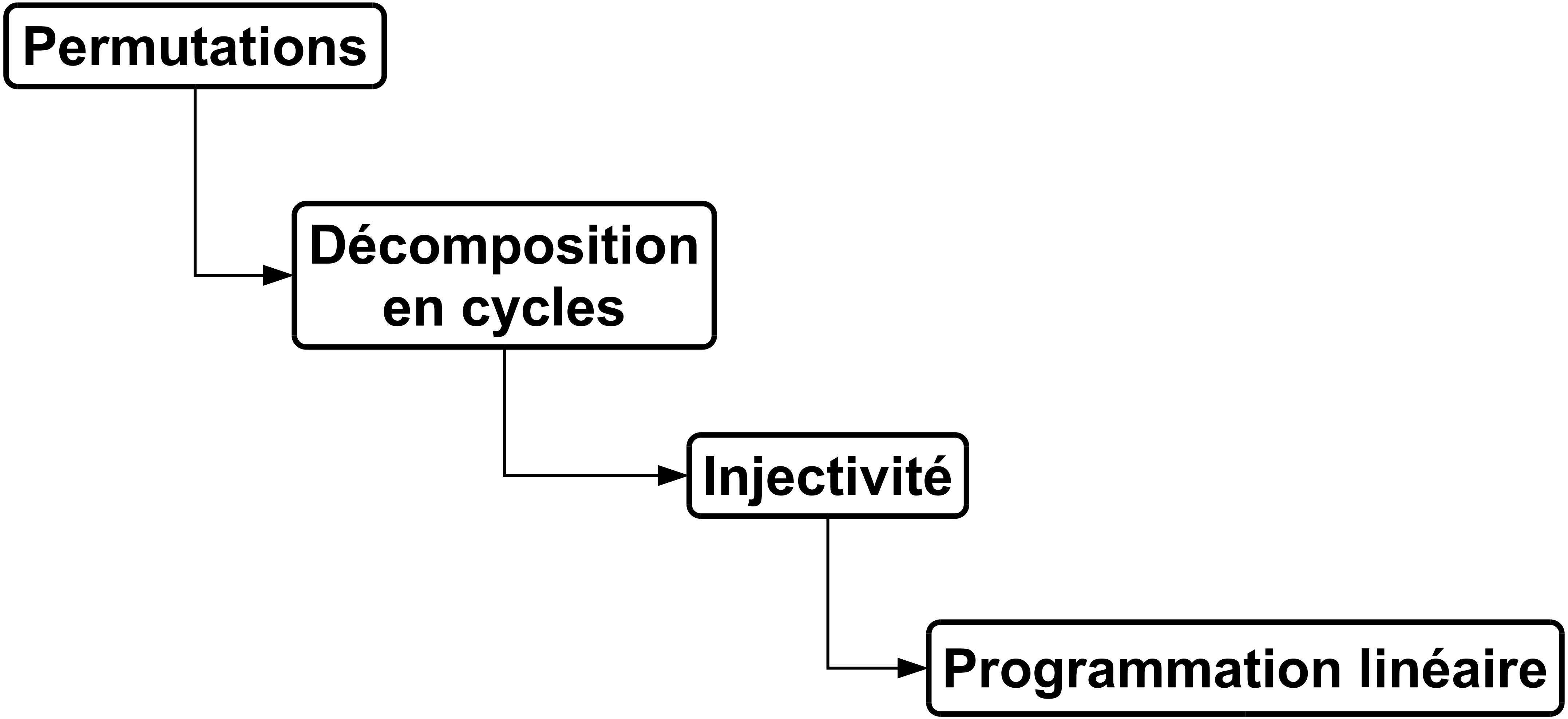
Avec plus de cartes, combien de relations pour avoir une injection ?

Conditions : **pour toutes permutations σ et ρ,**

$$(\alpha_{\sigma(1)} - \alpha_{\rho(1)})a_1 + \ldots + (\alpha_{\sigma(n)} - \alpha_{\rho(n)})a_n \neq 0$$

Tour : Red, Green, Blue

Concepts mathématiques de base



CONCLUSION

Les mathématiques de la magie

- Permutations
- Arithmétique
- Algèbre linéaire
- Calcul matriciel
- Combinatoire
- Polynômes
- Suites
- Algorithmique…

Diverses applications

- ***Cryptographie***
- ***Codage***
- ***Electronique numérique***
- ***Optique***
- ***Recherche opérationnelle***
- ***Plans d'expérience…***

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

esiea ECOLE D'INGENIEURS DU MONDE NUMERIQUE

Merci de votre attention !

Diaporama en ligne :

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal
http://magiealacarte.free.fr
http://scd.docinsa.insa-lyon.fr/cycle-de-conferences-20152016

aime.lachal@insa-lyon.fr
pierre.schott@esiea.fr