

# MATH & MAGIE (II)

## ***Carrés magiques d'ordre 4***

*Aimé Lachal & Pierre Schott*

***Carrés d'ordre 4  
et culture***

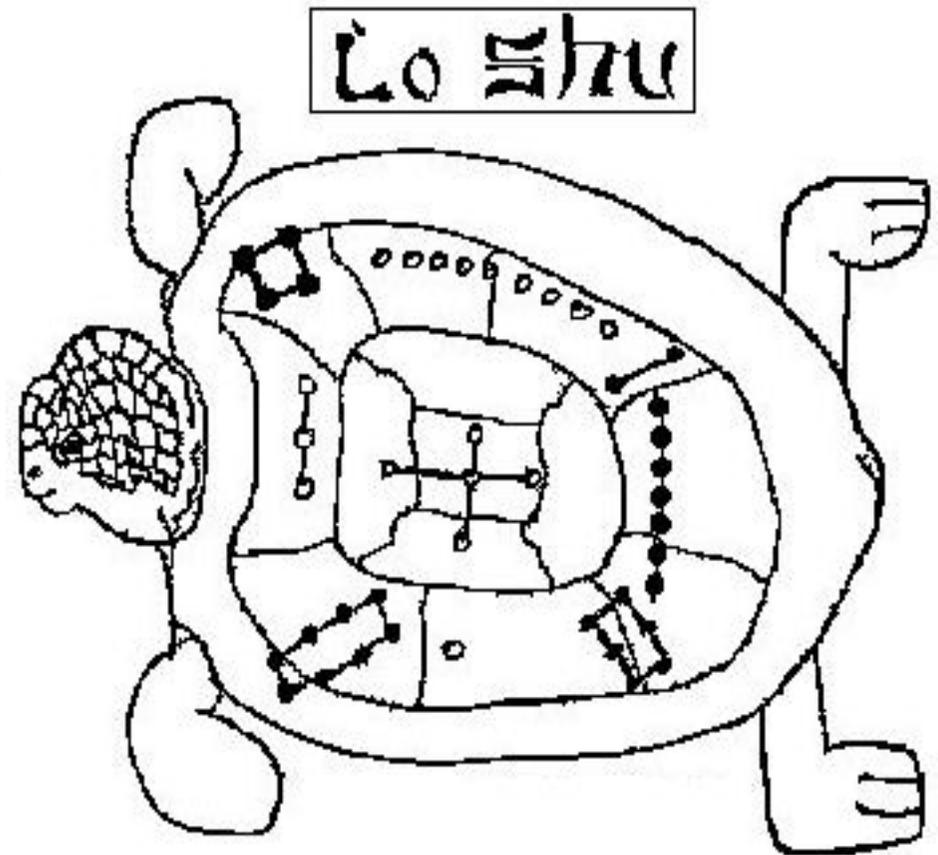
# Carrés d'ordre 3 dans l'histoire

## Apparition en Chine : ~ 650 av. J.-C.

→ Légende de Luo Shu  
(Le Livre de la rivière Luo – 洛書 ,  
~ 2200 av. J.-C.)

肆	仨	貳
參	伍	柒
捌	壹	陸

4	9	2
3	5	7
8	1	6



# Carrés d'ordre 4 dans l'histoire

## En Inde

→ Dans le temple jaïn de  
Parshvanath (Khajurâho, 954)



# Carrés d'ordre 4 dans l'histoire

## En Perse

→ Encyclopédie des Frères de la Pureté

(*Rasā'il Iḥwān al-Ṣafā'* – رسائل إخوان الصفا, Bagdad, 983).

د	ب	د	ا	٤	١٤	١٥	١	عداء
ط	ز	و	ب	٩	٧	٦	١٢	ورث
٥	يا	ى	ح	٥	١١	١٠	٨	القل
يو	ب	ج	ج	١٦	٤	٢	١٣	نكى

ينظر عداوة في لوح من نحاس ويحبه في النار فهو عدا

# Carrés d'ordre 4 dans la religion

## En Europe

**Henri Corneille Agrippa** (1486–1535)

Écrivain occultiste, théologien, astrologue et alchimiste allemand.

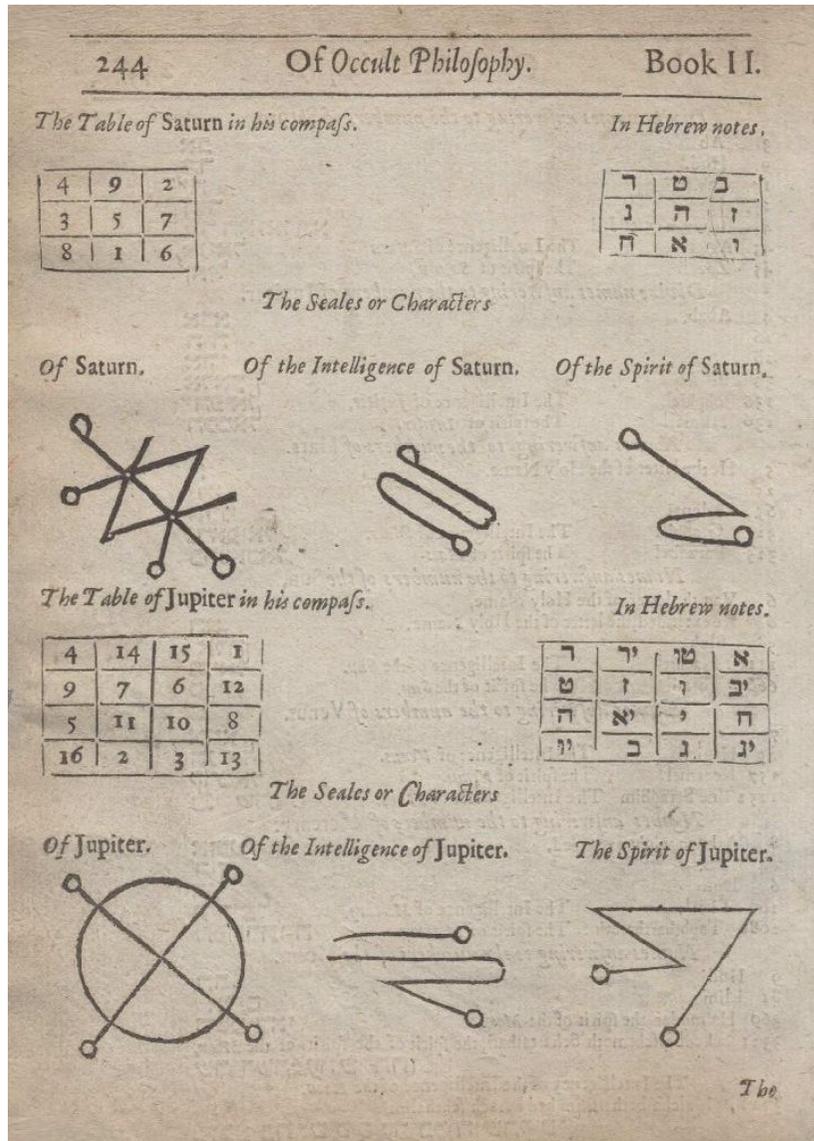
→ Œuvre célèbre :

« *De Occulta Philosophia* »

→ Il associe aux sept planètes connues sept carrés magiques



# Carrés d'ordre 4 dans la religion



4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

**Carré de Jupiter**

# Carrés d'ordre 4 dans la religion

**Ce sont tous  
des carrés « *normaux* » !**  
(contenant des entiers successifs)

**Pour un carré d'ordre  $n$  contenant  $1, 2, \dots, n^2$   
la « *somme magique* » vaut**

$$\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$$

Ici, pour  $n = 4$ , la somme magique vaut

**34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

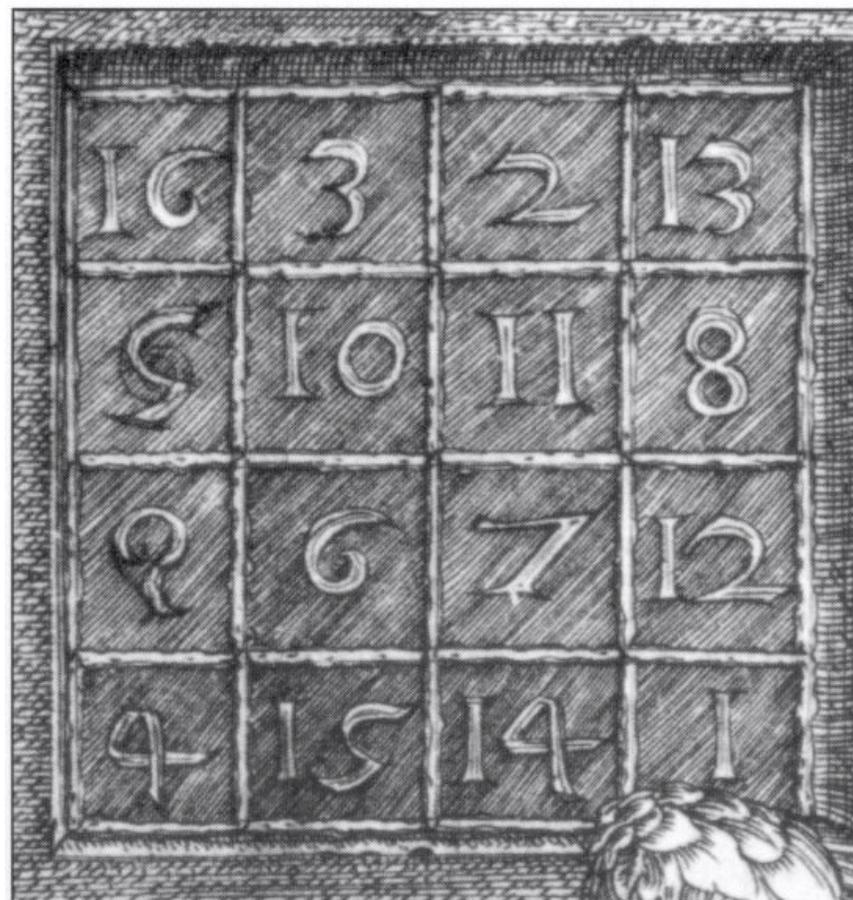
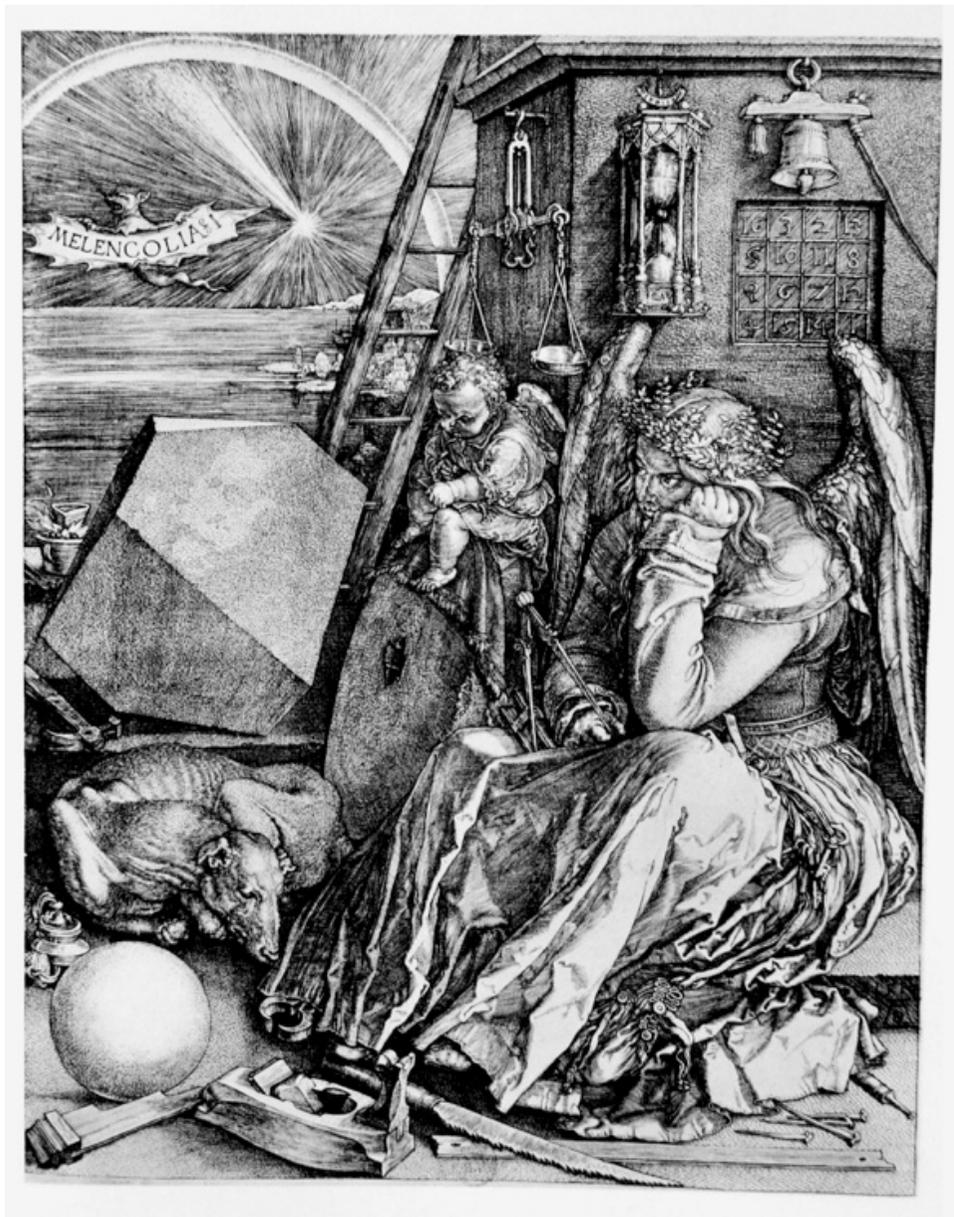
**Albrecht Dürer** (1471–1528)

Peintre, graveur allemand.

→ *Œuvre célèbre :*  
« *Melencolia* » (1514)



# Carrés d'ordre 4 dans l'art



Somme magique **34**  
Date **1514**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>15</b>	<b>14</b>	<b>1</b>

Dans le carré de Dürer...

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>13</b>

Somme par ligne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>5</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>8</b>

Somme par ligne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>9</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>12</b>

Somme par ligne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>4</b>	<b>15</b>	<b>14</b>	<b>1</b>

Somme par ligne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>			
<b>5</b>			
<b>9</b>			
<b>4</b>			

Somme par colonne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>3</b>		
	<b>10</b>		
	<b>6</b>		
	<b>15</b>		

Somme par colonne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		2	
		11	
		7	
		14	

Somme par colonne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

			<b>13</b>
			<b>8</b>
			<b>12</b>
			<b>1</b>

Somme par colonne → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>			
	<b>10</b>		
		<b>7</b>	
			<b>1</b>

Somme par diagonale → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

			13
		11	
	6		
4			

Somme par diagonale → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>	<b>3</b>		
<b>5</b>	<b>10</b>		

Somme par carré  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		2	13
		11	8

Somme par carré  $\rightarrow$  34

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		7	12
		14	1

Somme par carré  $\rightarrow$  34

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

9	6		
4	15		

Somme par carré  $\rightarrow$  34

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>10</b>	<b>11</b>	
	<b>6</b>	<b>7</b>	

Somme par carré → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>		<b>2</b>	
<b>9</b>		<b>7</b>	

Somme par carré  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>3</b>		<b>13</b>
	<b>6</b>		<b>12</b>

Somme par carré  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>10</b>		<b>8</b>
	<b>15</b>		<b>1</b>

Somme par carré  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>5</b>		<b>11</b>	
<b>4</b>		<b>14</b>	

Somme par carré  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>			<b>13</b>
<b>4</b>			<b>1</b>

Somme par carré  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>	<b>3</b>		
<b>9</b>	<b>6</b>		

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		<b>2</b>	<b>13</b>
		<b>7</b>	<b>12</b>

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		11	8
		14	1

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>5</b>	<b>10</b>		
<b>4</b>	<b>15</b>		

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>		<b>2</b>	
<b>5</b>		<b>11</b>	

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>3</b>		<b>13</b>
	<b>10</b>		<b>8</b>

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>6</b>		<b>12</b>
	<b>15</b>		<b>1</b>

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

9		7	
4		14	

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>3</b>	<b>2</b>	
	<b>15</b>	<b>14</b>	

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>5</b>			<b>8</b>
<b>9</b>			<b>12</b>

Somme par rectangle  $\rightarrow$  **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>	<b>3</b>		
		<b>14</b>	<b>1</b>

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		<b>2</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>15</b>		

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>5</b>	<b>10</b>		
		<b>7</b>	<b>12</b>

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		11	8
9	6		

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

<b>16</b>			
<b>5</b>			
			<b>12</b>
			<b>1</b>

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

			13
			8
9			
4			

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	<b>3</b>		
	<b>10</b>		
		<b>7</b>	
		<b>14</b>	

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		2	
		11	
	6		
	15		

Somme par parallélogramme → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

	3		
5			
			12
		14	

Somme par pandiagonale → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

		2	
			8
9			
	15		

Somme par pandiagonale → **34**

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

3

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

5

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

6

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

7

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

8

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

9

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

10

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

11

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

12

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

13

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

14

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

15

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

17

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

18

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

19

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

20

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

21

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

22

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

23

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

24

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

25

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

26

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

27

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

28

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

29

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

30

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

31

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

32

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

33

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

35

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

36

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

37

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

38

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

39

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

40

En résumé

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

41

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

42

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

43

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

44

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

45

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

46

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

47

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

48

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

49

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

50

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

51

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

52

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

53

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

54

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

55

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

56

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

57

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

58

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

59

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

60

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

61

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

62

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

63

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

64

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

65

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

66

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

67

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

68

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

69

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

70

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

71

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

72

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

73

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

74

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

75

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

76

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

77

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

78

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

79

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

80

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

81

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

82

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

83

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

84

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

85

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

86

Et tous les autres...

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

**C'est un carré « *polymagique* » !**

**Parmi les  $\binom{16}{4} = 1820$  combinaisons  
de 4 nombres parmi 16,  
*il y a 86 quadruplets de somme 34***

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

## **René Descombes** (1924– )

Ingénieur des Travaux Publics français.

→ *Nombreux ouvrages :*

« *Les carrés magiques* » (2000)

« *La magie du carré* » (2004)

« *Le carré naturel* » (2011)



# Une application au codage

<b>16</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>15</b>	<b>14</b>	<b>1</b>

**Transmission d'information  
à l'aide d'un carré magique :**  
**grand nombre de relations  
de contrôle implicites**

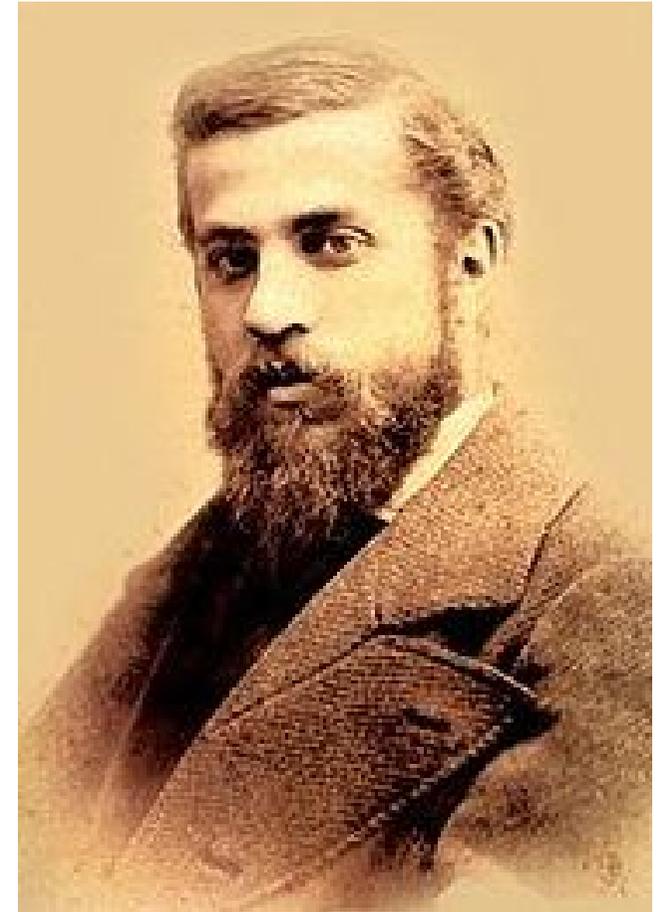
- *Détection d'erreurs de transmission plus sensible*
- *Évite d'envoyer des contrôles de redondance surnuméraires*
- *Excellent rendement !*

# Carrés d'ordre 4 dans l'art

## **Antoni Gaudí i Cornet** (1852–1926)

Architecte catalan.

→ *Œuvre célèbre :*  
*basilique de la Sagrada Familia*  
*(Barcelone, démarrée en 1987)*



# Carrés d'ordre 4 dans l'art

## **Josep Maria Subirachs** (1927–2014)

Sculpteur et peintre catalan.

→ *Œuvre célèbre :*  
*façade de la passion sur*  
*la basilique de la Sagrada Familia*



# Carrés d'ordre 4 dans l'art



1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Somme  
magique **33**

Carré  
polymagique

***Construction  
de carrés magiques  
d'ordre 4***

# Construction des carrés d'ordre 4

<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>
<b>x</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>x</b>
<b>x</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>x</b>
<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>

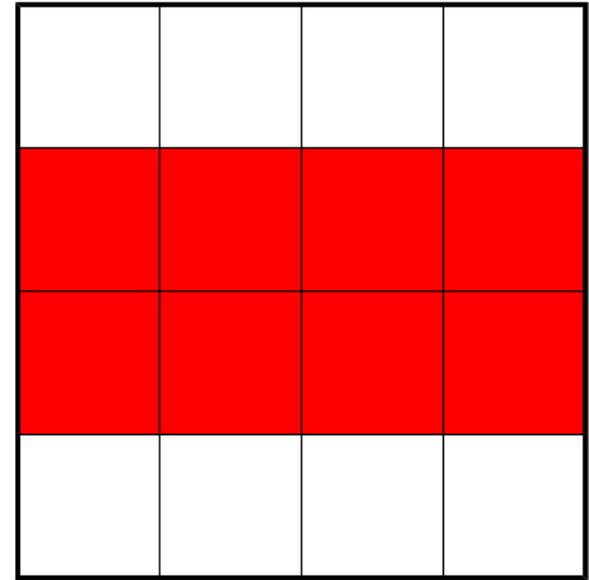
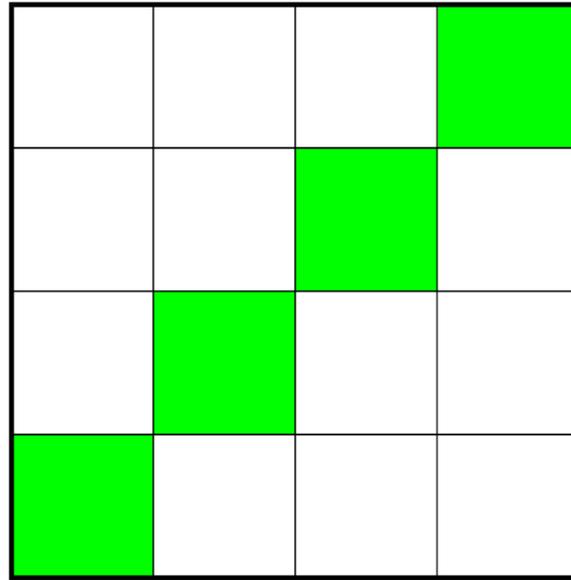
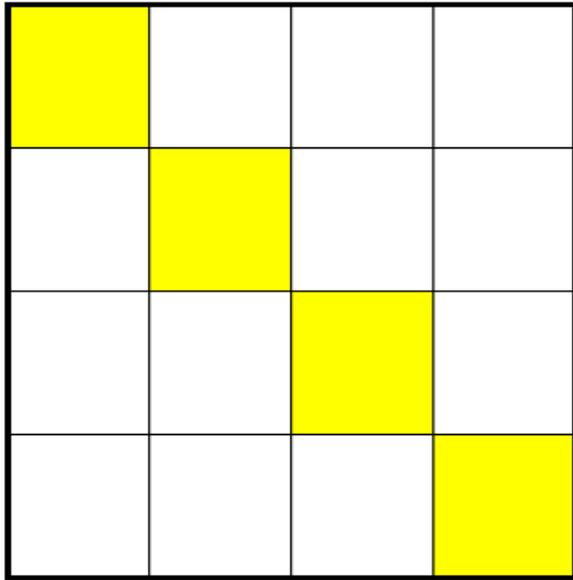
# Construction des carrés d'ordre 4

→ *Remarque préliminaire*

**La somme magique  
est nécessairement**

$$S = A + B + C + D$$

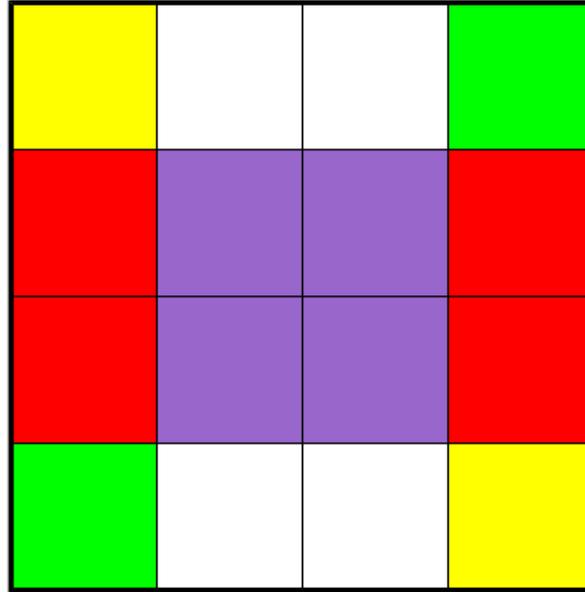
# Construction des carrés d'ordre 4



A diagram illustrating the decomposition of a 4x4 grid into three components. On the left, a yellow diagonal of four squares is shown. This is followed by a plus sign, then a green anti-diagonal of four squares. This is followed by another plus sign, then a red 2x2 block. To the right of the red block is the equation  $= 4S$ .

Une explication en couleurs

# Construction des carrés d'ordre 4



$$\begin{array}{c} \text{Yellow} \\ \text{Red} \\ \text{Green} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Green} \\ \text{Red} \\ \text{Yellow} \end{array} + 2 \text{Purple} = 2S + 2 \text{Purple} = 4S$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Purple} = S}$$

# Construction des carrés d'ordre 4

	<b>A</b>	<b>B</b>	
	<b>C</b>	<b>D</b>	

À partir du  
carré central  
→ **A,B,C,D**

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

<b>C-a</b>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	
	<b>C</b>	<b>D</b>	
			<b>B+a</b>

1 paramètre  
→ **a**

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

$C-a$			$D-b$
	$A$	$B$	
	$C$	$D$	
$A+b$			$B+a$

2 paramètres  
→  $a, b$

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

$C-a$	$B+a+c$	$A+b-c$	$D-b$
	$A$	$B$	
	$C$	$D$	
$A+b$			$B+a$

3 paramètres  
→  $a, b, c$

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

$C-a$	$B+a+c$	$A+b-c$	$D-b$
	$A$	$B$	
	$C$	$D$	
$A+b$	$D-a-c$	$C-b+c$	$B+a$

3 paramètres  
→  $a, b, c$

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

$C-a$	$B+a+c$	$A+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	$A$	$B$	
$B-b+d$	$C$	$D$	
$A+b$	$D-a-c$	$C-b+c$	$B+a$

4 paramètres  
→  $a, b, c, d$

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

$C-a$	$B+a+c$	$A+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	$A$	$B$	$C-a+d$
$B-b+d$	$C$	$D$	$A+b-d$
$A+b$	$D-a-c$	$C-b+c$	$B+a$

4 paramètres  
→  $a, b, c, d$

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

$C-a$	$B+a+c$	$A+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	$A$	$B$	$C-a+d$
$B-b+d$	$C$	$D$	$A+b-d$
$A+b$	$D-a-c$	$C-b+c$	$B+a$

**Carré  
de somme magique  
 $A+B+C+D$**

→ *Espace vectoriel  
de dimension 8*

# Construction des carrés d'ordre 4

**Ernest Bergholt** (1856–1925)

Auteur anglais d'ouvrages sur les jeux de cartes.

→ *Forme générale  
des carrés d'ordre 4*

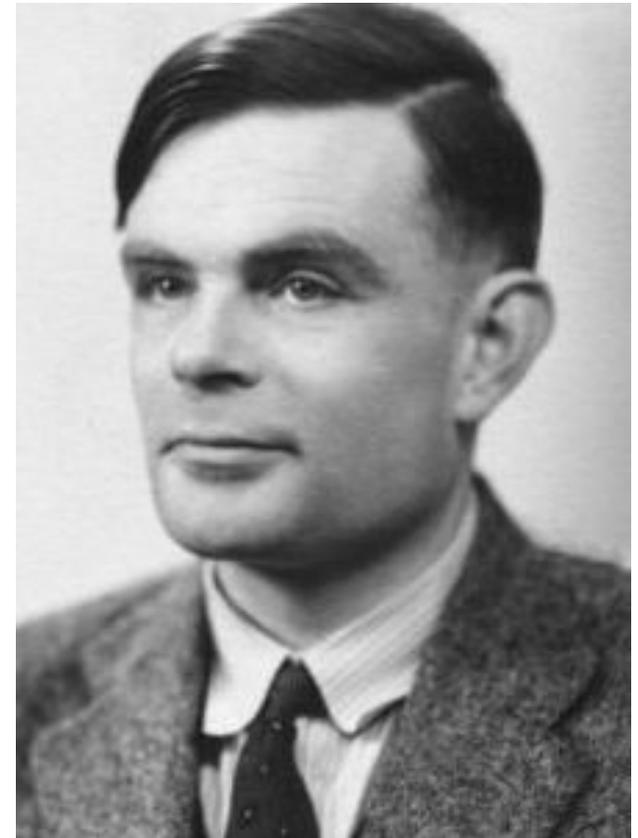


# Construction des carrés d'ordre 4

**Alan Turing** (1912–1954)

Mathématicien et cryptologue britannique.

→ *Fondateur de l'informatique*  
*Né le 23/06/1912*



# Construction des carrés d'ordre 4

	<b>23</b>	<b>06</b>	
	<b>19</b>	<b>12</b>	

À partir du  
carré central

→ **A = 23**

**B = 6**

**C = 19**

**D = 12**

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

<b>9</b>			<b>22</b>
	<b>23</b>	<b>06</b>	
	<b>19</b>	<b>12</b>	
<b>13</b>			<b>16</b>

À partir du  
carré central  
→ **a = 10**  
**b = -10**

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

<b>9</b>	<b>11</b>	<b>18</b>	<b>22</b>
	<b>23</b>	<b>06</b>	
	<b>19</b>	<b>12</b>	
<b>13</b>	<b>7</b>	<b>24</b>	<b>16</b>

À partir du  
carré central

$$\rightarrow a = 10$$

$$b = -10$$

$$c = -5$$

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

9	11	18	22
17	23	06	14
21	19	12	8
13	7	24	16

À partir du  
carré central

$$\rightarrow a = 10$$

$$b = -10$$

$$c = -5$$

$$d = 5$$

Remplissage progressif

# Construction des carrés d'ordre 4

9	11	18	22
17	23	06	14
21	19	12	8
13	7	24	16

**Un carré  
de somme 60**

*(de carré central  
la date de naissance  
de Turing)*

***Un carré  
magique normal***

# Construction d'un carré normal

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Remplissage symétrique inversé

$i$

$\leftrightarrow$

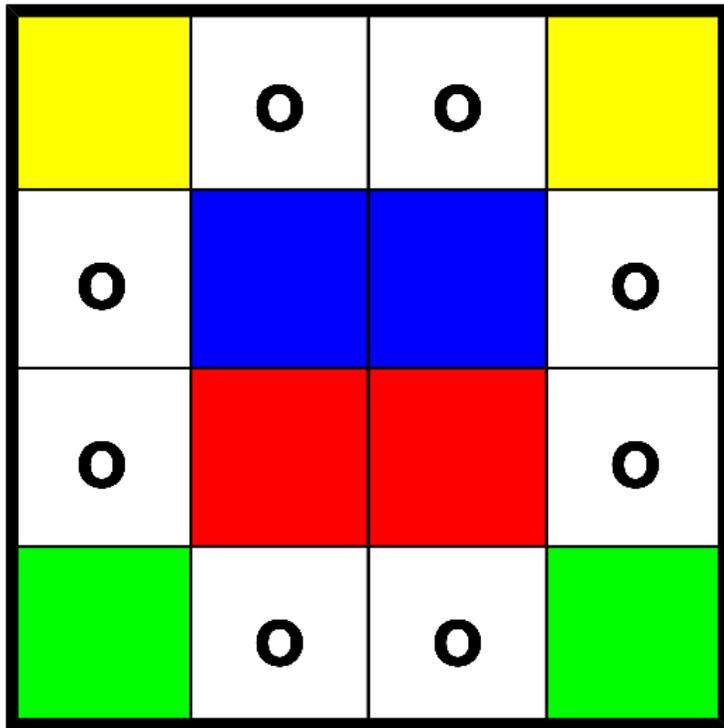
$17 - i$

$i$

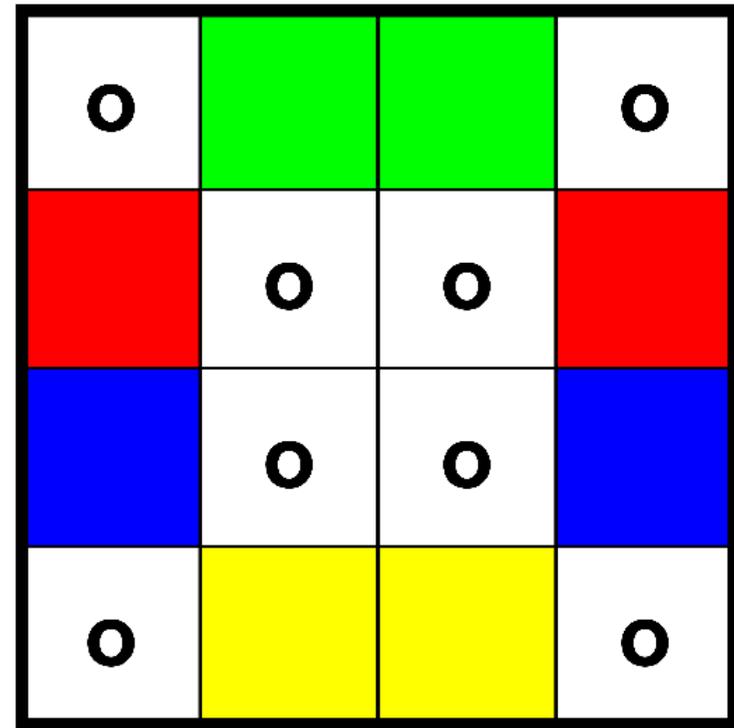
$\leftrightarrow$

$17 - i$

# Construction d'un carré normal



Diagonales  
conservées



Diagonales  
retirées

# Construction d'un carré normal

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Diagonales  
conservées

	15	14	
12			9
8			5
	3	2	

Diagonales  
retirées

# Construction d'un carré normal

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Après superposition...

# Construction d'un carré normal

<b>1</b>	<b>15</b>	<b>14</b>	<b>4</b>
<b>12</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>5</b>
<b>13</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>16</b>

**Un carré normal  
de somme 34**

*(Dürer & Jupiter  
après permutations  
de ligne/colonne)*

# Construction d'un carré normal

## Explication par ligne

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

$$\begin{array}{l} 1+4 \\ 12+9 \\ 8+5 \\ 13+16 \end{array} = \begin{array}{l} 34 - (15+14) \\ 34 - (6+7) \\ 34 - (10+11) \\ 34 - (3+2) \end{array}$$

→ Complémentarité

# Construction d'un carré normal

## Explication par colonne

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

# Construction d'un carré normal

## Explication par colonne

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

$$\begin{array}{l} 1+13 = 34 - (12+8) \\ 15+3 = 34 - (6+10) \\ 14+2 = 34 - (7+11) \\ 4+16 = 34 - (9+5) \end{array}$$

→ Complémentarité

# Construction d'un carré normal

## Complément :

### Formule explicite des éléments du carré

***Élément situé  
sur la  $i^e$  ligne et  $j^e$  colonne :***

- hors de la diagonale :  $21 - 4i - j$
- sur la 1<sup>re</sup> diagonale ( $j = i$ ) :  $5i - 4$
- sur la 2<sup>e</sup> diagonale ( $j = 5 - i$ ) :  $3i + 1$

# Construction d'un carré normal

**Bernard Frénicle de Bessy**  
(1605–1675)

Mathématicien français.

→ « *Des quarrez ou tables magiques* » (1693)

→ *Dénombrement de tous les carrés d'ordre 4*



On appelle quarré magique celui qui estant divisé par cellules en quantité représentée par un nombre quarré, & les cellules estant remplies de nombres consécutifs, ou qui soient en même progression arithmétique, contient pareille somme en chacune de ses lignes, de quelque façon qu'on les puisse prendre. Exemple:

Le quarré A, B, C, D, 16, est divisé en 16 cellules, & ces cellules sont remplies des nombres consécutifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. jusques à 16: & ces nombres sont disposés d'un tel ordre dans les cellules, que les nombres de chaque ligne estant assemblez, font une somme égale; soit qu'on prenne les lignes en long, comme

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

ou qu'on les prenne de haut en bas, pour avoir 1, 12, 8, 13, | 15, 6, 10, 3, | 14, 7, 11, 2, | 4, 9, 5, 16, | ou enfin si on considère les deux diagonales ou lignes transversales, 1, 6, 11, 16, & 4, 7, 10, 13, & la somme de chacune de ces lignes est 34.

La somme des nombres qui sont en chaque ligne ne se peut pas prendre à discretion; mais elle est nécessaire à chaque figure: & voicy le moyen de sçavoir quelle elle est.

# Construction d'un carré normal

**Bernard Frénicle de Bessy**

(1605–1675)

Mathématicien français.

→ « *Table générale  
Des quarrez de quatre* »

*La première page...*

TABLE GENERALE  
DES  
QUARREZ DE QUATRE.

$\beta$ 1 13 8 12 16 4 9 5 11 7 14 2 6 10 3 15	$\beta$ 1 13 12 8 16 4 5 9 7 11 14 2 10 6 3 15	$\beta$ 1 13 8 12 16 4 9 5 10 6 15 3 7 11 2 14	$\beta$ 1 13 12 8 16 4 5 9 6 10 15 3 11 7 2 14
$\gamma$ 1 14 8 11 15 4 10 5 12 7 13 2 6 9 3 16	$\alpha$ 1 14 11 8 15 4 5 10 6 9 16 3 12 7 2 13	$\alpha$ 1 14 7 12 15 4 9 6 10 5 16 3 8 11 2 13	$\gamma$ 1 14 12 7 15 4 6 9 8 11 13 2 10 5 3 16
$\delta$ 1 11 14 8 16 5 4 9 7 12 13 2 10 6 3 15	$\delta$ 1 14 11 8 16 5 4 9 7 12 13 2 10 3 6 15	$\alpha$ 1 14 7 12 16 5 10 3 9 4 15 6 8 11 2 13	$\delta$ 1 10 15 8 16 6 3 9 5 11 14 4 12 7 2 13
$\delta$ 1 15 10 8 16 6 3 9 5 11 14 4 12 2 7 13	$\beta$ 1 11 8 14 16 6 9 3 13 7 12 4 4 10 5 15	$\beta$ 1 11 14 8 16 6 3 9 4 10 15 5 13 7 2 12	$\beta$ 1 11 14 8 16 6 3 9 7 13 12 4 10 4 5 15



# Construction d'un carré normal

N O M B R E D E S T A B L E S  
*de chaque sorte.*

<b>D</b> es celles qui ont 1 à l'un des coins, il y en a.		208		208
De celles qui ont	2	200		200
	3	204		166
	4	238		178
	5	216		64
	6	206		48
	7	230		16
		<hr/>		
		Somme 880		

**Il y a 880 carrés  
magiques d'ordre 4**  
*(à 8 rotations/symétries près)*

*La page finale...*

***Une application  
en recherche  
opérationnelle***

# Une application en RO

## Organisation d'un planning d'examens oraux

### Répartition quotidienne candidat/examineur

#### Données

34 candidats doivent passer  
une épreuve orale  
devant chacun de 4 examinateurs  
durant 4 jours  
à raison d'une épreuve par jour

#### Problème

→ Attribuer à chaque candidat  
un calendrier jour/examineur

	Jour n°1	Jour n°2	Jour n°3	Jour n°4
Examineur n° 1	16	3	2	13
Examineur n° 2	5	10	11	8
Examineur n° 3	9	6	7	12
Examineur n° 4	4	15	14	1

# Une application en RO

## Un algorithme d'affectation

→ Principe : à chaque candidat, on attribue un planning « jour/examineur »

- On sélectionne sur chaque ligne le plus grand (si possible) nombre de manière à ce qu'aucun des 4 ne soit sur la même colonne
- On choisit le plus petit de ces 4 nombres :  $m$
- On soustrait au carré initial  $m$  fois le carré des positions des 4 nombres précédents (carré ne contenant que des 0 excepté quatre 1 répartis un par ligne et 1 par colonne)
- On réitère le procédé avec le carré ainsi obtenu

# Une application en RO

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

- 11 x

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0

=

5	3	2	13
5	10	0	8
9	6	7	1
4	4	14	1

5	3	2	13
5	10	0	8
9	6	7	1
4	4	14	1

- 9 x

0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

=

5	3	2	4
5	1	0	8
0	6	7	1
4	4	5	1

# Une application en RO

5	3	2	4
5	1	0	8
0	6	7	1
4	4	5	1

- 5 x

1	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0

=

0	3	2	4
5	1	0	3
0	1	7	1
4	4	0	1

0	3	2	4
5	1	0	3
0	1	7	1
4	4	0	1

- 4 x

0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

=

0	3	2	0
1	1	0	3
0	1	3	1
4	0	0	1

# Une application en RO

0	3	2	0
1	1	0	3
0	1	3	1
4	0	0	1

- 3 x

0	1	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	0	0	0

=

0	0	2	0
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1

0	0	2	0
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1

- 1 x

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

=

0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

# Une application en RO



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

= 11 x

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0

+ 9 x

0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

+ 5 x

1	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0

+ 4 x

0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

+ 3 x

0	1	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	0	0	0

+ 1 x

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

+ 1 x

0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

# Une application en RO

→ On attribuera :

le calendrier  $C_1$  à 11 élèves

le calendrier  $C_2$  à 9 élèves

le calendrier  $C_3$  à 5 élèves

le calendrier  $C_4$  à 4 élèves

le calendrier  $C_5$  à 3 élèves

le calendrier  $C_6$  à 1 élève

le calendrier  $C_7$  à 1 élève

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0

0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

1	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0

0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

0	1	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	0	0	0

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

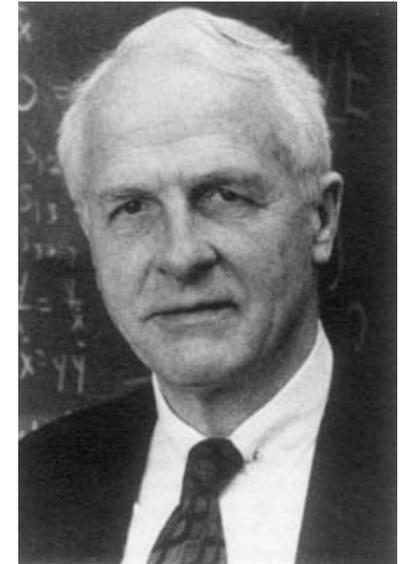
# Une application en RO

**Explication : un joli théorème...**

## Théorème de Birkhoff-von Neumann

(1946 – 1953)

*Tout matrice semi-magique d'ordre  $n$   
est décomposable en combinaison linéaire  
à coefficients positifs  
d'au plus  $(n - 1)^2 + 1$  matrices de permutation.*



**Garrett Birkhoff**  
(1911–1996)



**John von Neumann**  
(1903–1957)

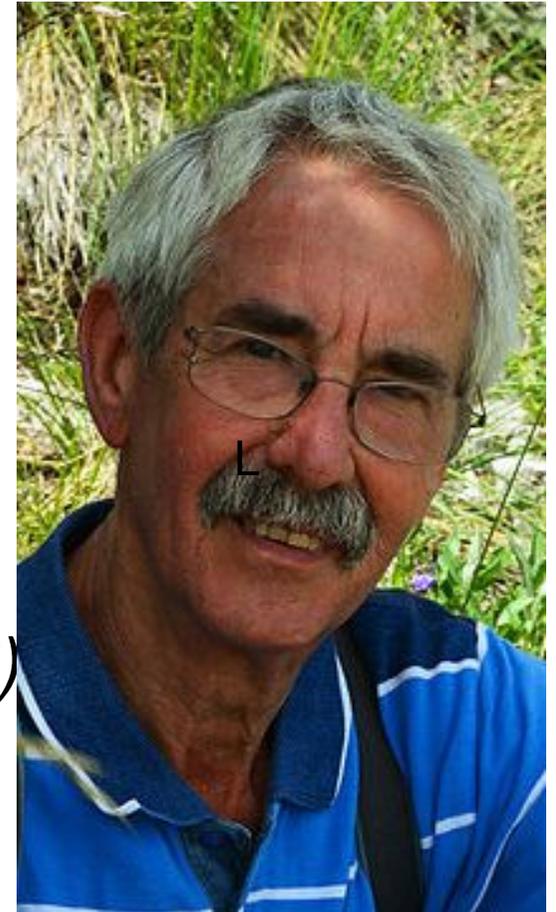
***Des carrés  
artistiques...***

# Carrés alpha- et géo-magiques

**Lee Cecil Fletcher Sallows** (1944– )

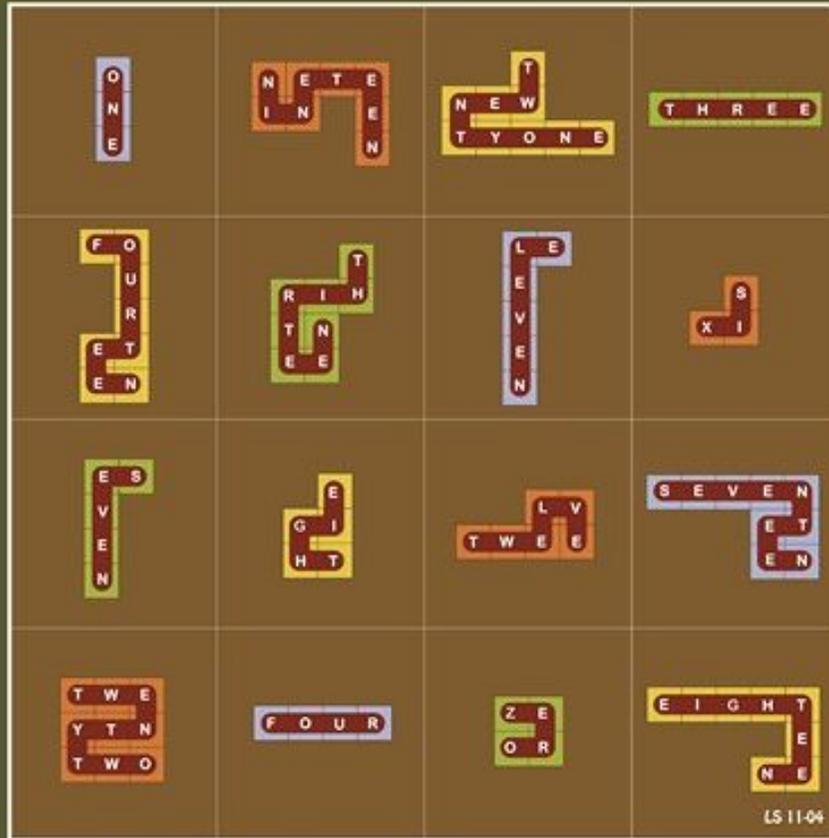
Ingénieur électronicien anglais.

→ *Construction et création  
de nombreux carrés  
alphamagiques et géomagiques* (1986)



# Carrés alpha-magiques

An alpha-geomagic square  
Any four shapes in a straight line tile the square;  
the numbers they bear sum to 44



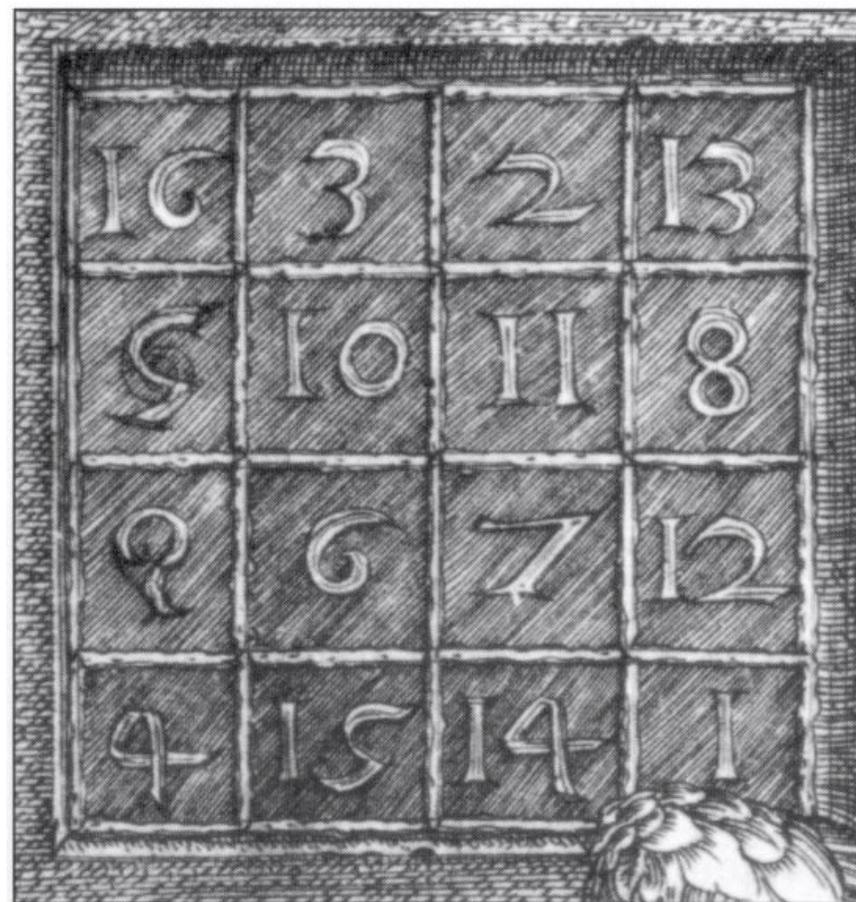
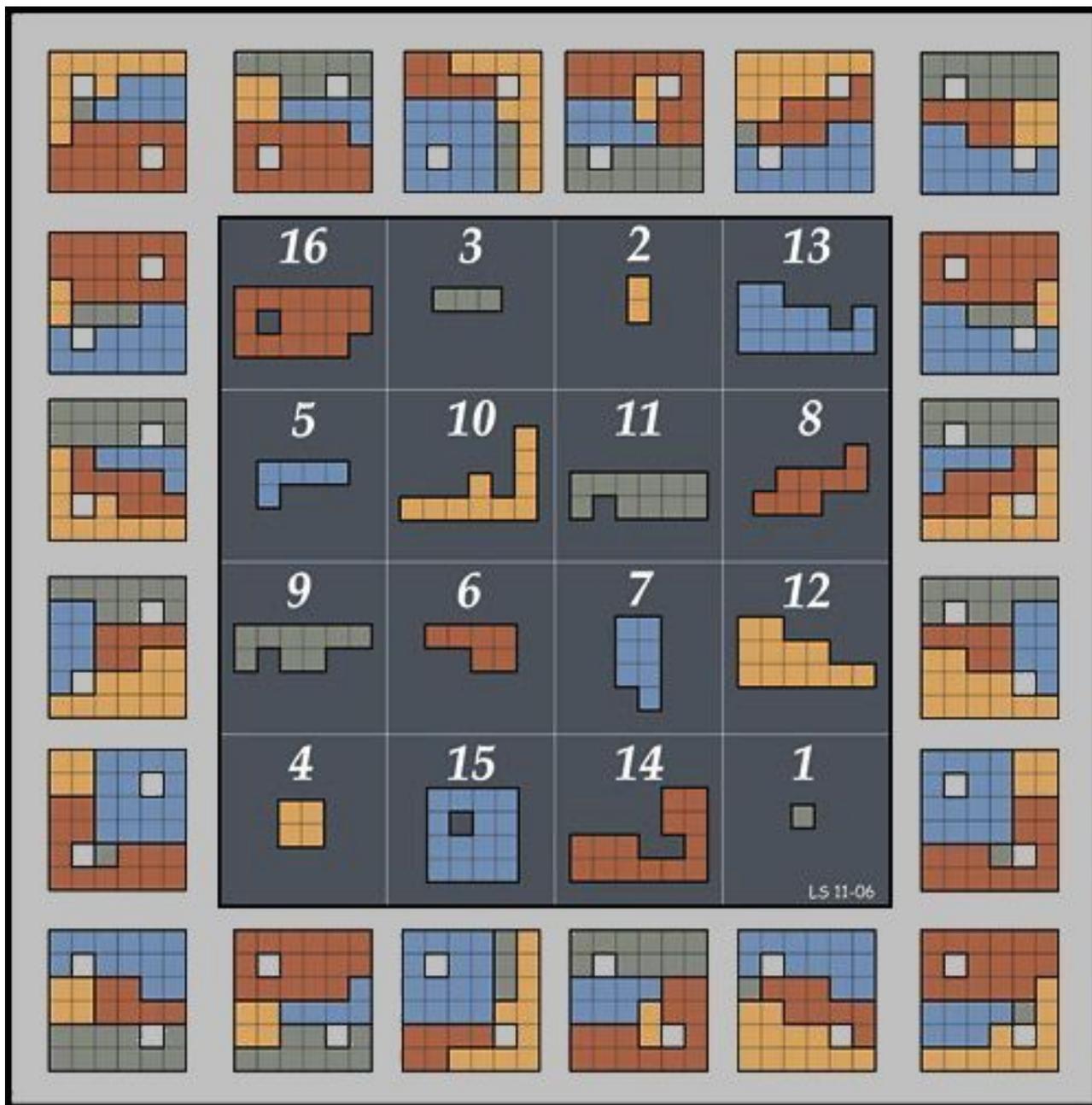
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

*Carré alphabétique*  
→ magique de somme 44

3	8	9	5
8	8	6	3
5	5	6	9
9	4	4	8

*Carré numérique*  
→ magique de somme 25

# Carrés géo-magiques



Carré de Dürer

# Carrés géo-magiques

$A+a$	$B+b$	$C+c$	$D-c$
$C-c$	$D+c$	$A+b$	$B+a$
$D+b$	$C+a$	$B-c$	$A+c$
$B+c$	$A-c$	$D+a$	$C+b$

Une variante à 6 paramètres  
de la formule de Bergholt

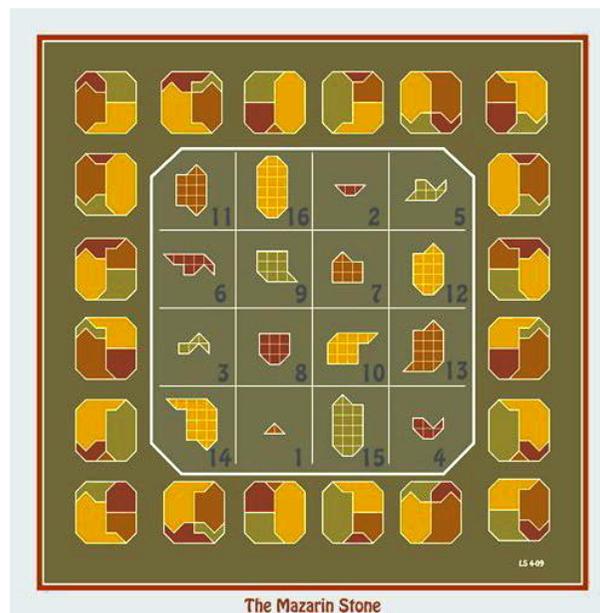
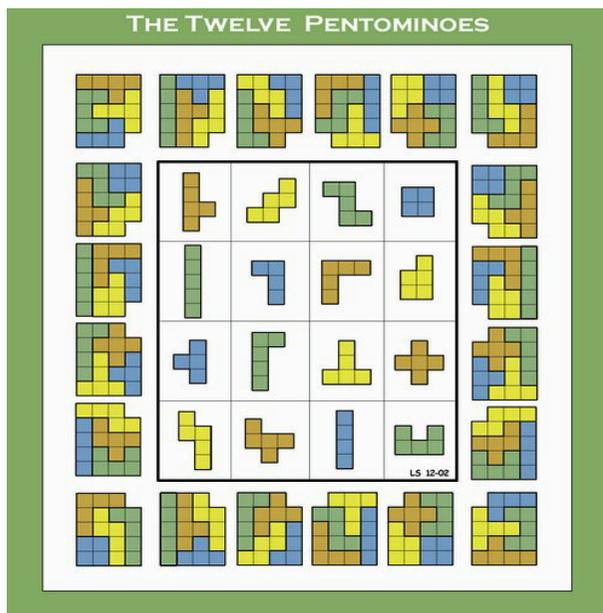
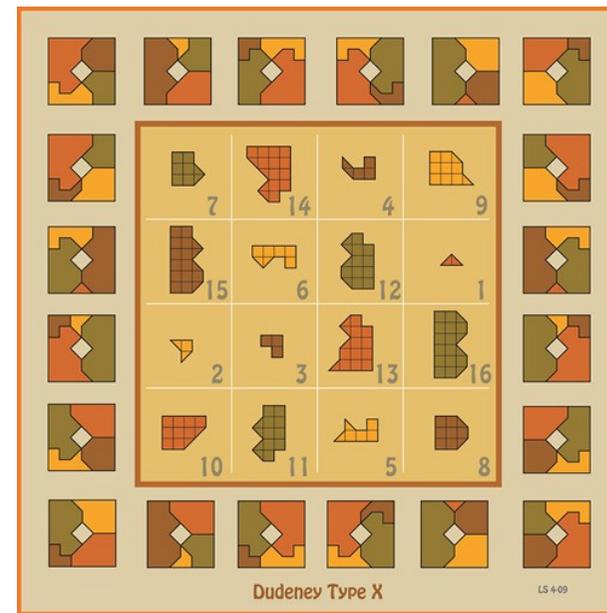
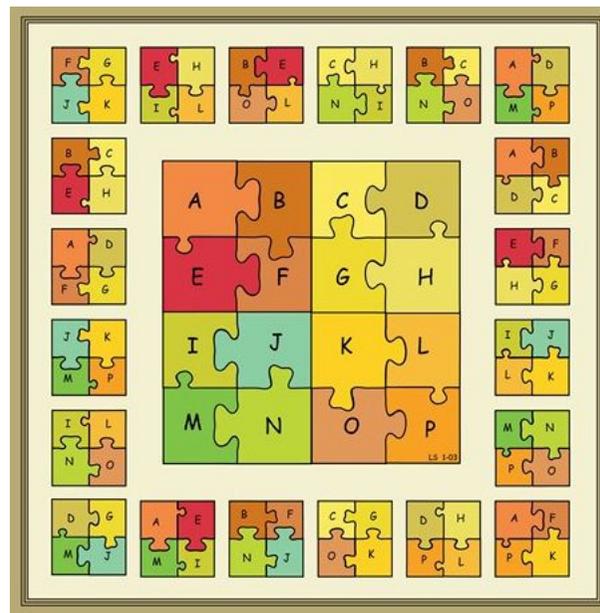
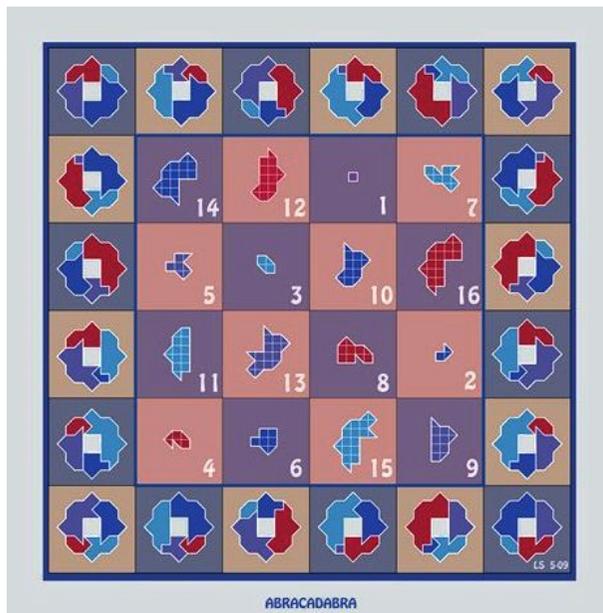
$A+a$	$B+b$	$C+c$	$D-c$
$C-c$	$D+c$	$A+b$	$B+a$
$D+b$	$C+a$	$B-c$	$A+c$
$B+c$	$A-c$	$D+a$	$C+b$

PYTHA GORAS

LS 10-09

Magie van Merlijn

# Carrés géo-magiques



***Carrés magiques  
d'ordre supérieur  
et autres  
figures magiques...***

# Autres carrés et figures magiques

- Ordre impair
- Ordre pair (*cas  $n = 4p$  et  $n = 4p+2$* )
- Carré polymagique (*sous-carrés...*)
- Carré diabolique :  
panmagique (*pandiagonale...*)
- Carré satanique (*puissances*) :  
bimagique, trimagique...
- Étoile, cercle, cube magique...

# *Mathématiques des carrés magiques*

- **Algèbre linéaire**
- **Calcul matriciel**
- **Arithmétique**
- **Combinatoire**
- **Géométrie...**

# Quelques références

➤ **Wikipédia**

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Carré\\\_magique\\\_\\_\(mathématiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Carré\_magique\__(mathématiques))

➤ **Gérard Villemin**

<http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/CarreMag/CMIntro.htm>

➤ **Christian Boyer**

<http://www.multimagie.com>

➤ **René Descombes**

<http://www.kandaki.com/CM-Index.htm>

***Et bien d'autres !***