

MATH & MAGIE



***La Mathématique
est-elle Magique ?***

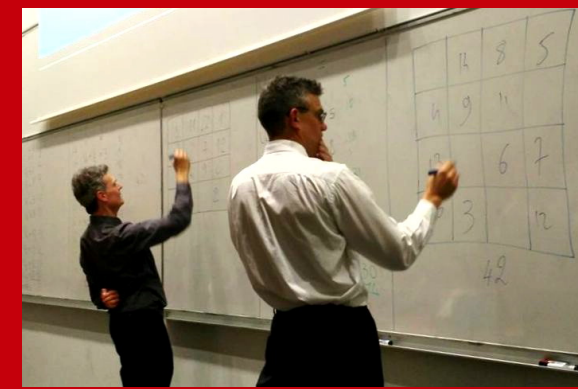
Ou

***La Magie
est-elle Mathématique ?***

Aimé Lachal & Pierre Schott

Exposition Magimatique – 6 avril 2017





29 mars 2012

4 avril 2016

***Première conférence
à l'INSA***

***Deuxième conférence
à l'INSA***

***Un spectacle de
Cartomagie***

***Un spectacle de
Numéromagie***



PLAN DE L'EXPOSÉ



La Magie *est Mathématique* *Cartomagie*

I – Quelques tours

II – Divers mélanges

Description des mélanges
Mélanges Faros
Mélanges australiens

III – Mélanges itérés

IV – Des coupes



Interlude

« 30 secondes »

ou

Réfléchir plus vite
Que l'ordinateur !

La Mathématique *est Magique* *Carrés magiques*

I – Carrés d'ordre 4 et culture

II – Construction des carrés
magiques d'ordre 4

III – Des carrés artistiques



1^{re} partie

Cartomagie

I

Quelques tours...

Cartomagie

Le principe

Cartomagie
(Magie des cartes)

**Effet
magique**

Self-working card tricks
(Tours automatiques à base de Maths)

Prestidigitation
(Passes magiques)

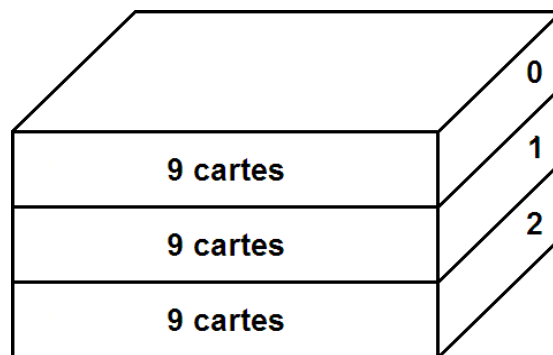
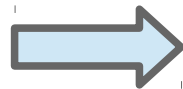
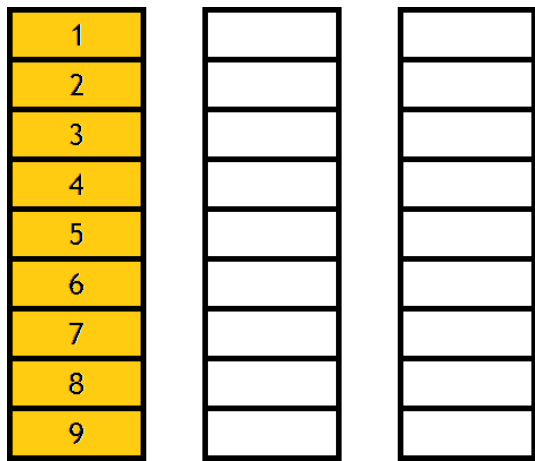
Exemple

Tour des 27 cartes



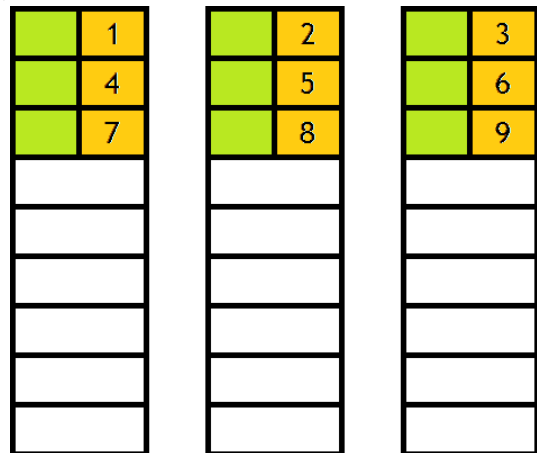
Cartomagie – Tour des 27 cartes (M. Gardner)

Le secret 1/3



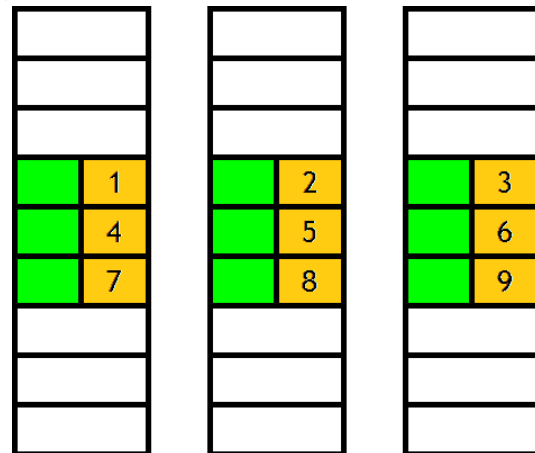
- 1) Le spectateur A choisit une carte
Le spectateur B choisit une position
- 2) A indique la colonne où se trouve sa carte
- 3) Le magicien récupère les cartes en colonne et met la colonne de A là où il a besoin
- 4) Le magicien distribue le paquet reformé en ligne et répète la manip plusieurs fois
- 5) Le magicien retrouve la carte de A à la position donnée par B

$p_1 = 1$



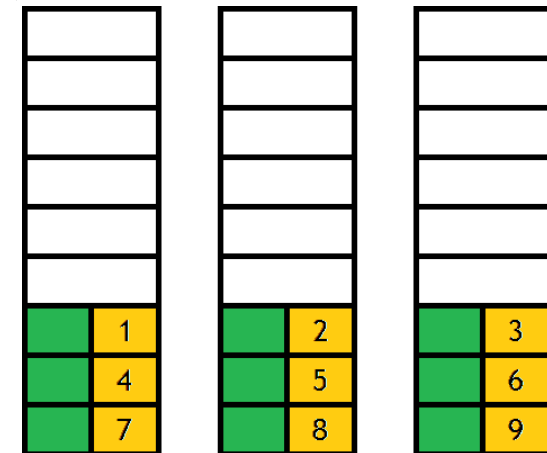
Colonne mise
au-dessus du paquet

$p_1 = 2$



Colonne mise
au milieu du paquet

$p_1 = 3$



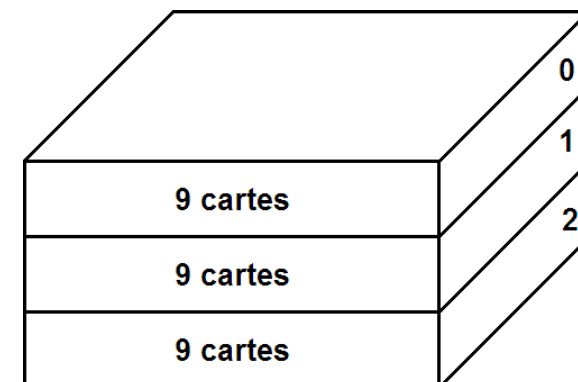
Colonne mise
au-dessous du paquet

Cartomagie – Tour des 27 cartes (M. Stover)

Le système ternaire

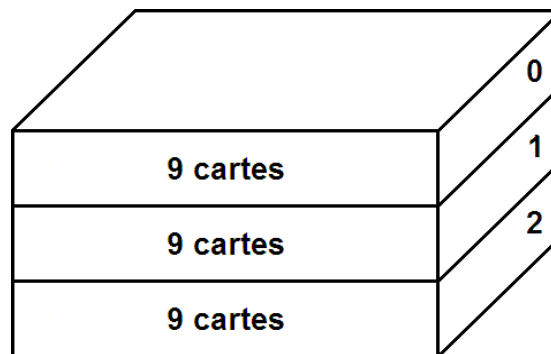
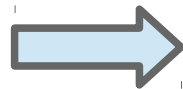
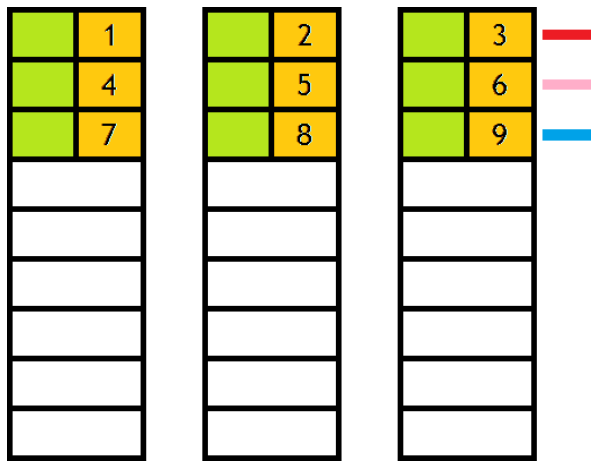
Position	Ternaire	Position	Ternaire	Position	Ternaire
1	000	10	100	19	200
2	001	11	101	20	201
3	002	12	102	21	202
4	010	13	110	22	210
5	011	14	111	23	211
6	012	15	112	24	212
7	020	16	120	25	220
8	021	17	121	26	221
9	022	18	122	27	222

**Conversion
position–ternaire**
Code x y z
Première phase
Deuxième phase
Troisième phase



Cartomagie – Tour des 27 cartes (M. Gardner)

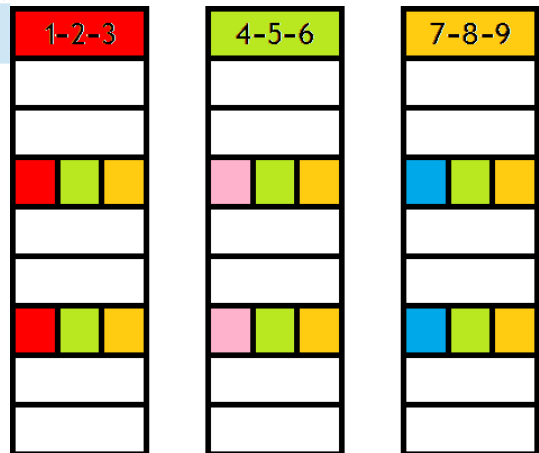
Le secret 2a/3



- 1) Le spectateur A choisit une carte
Le spectateur B choisit une position
- 2) A indique la colonne où se trouve sa carte
- 3) Le magicien récupère les cartes en colonne et met la colonne de A là où il a besoin
- 4) Le magicien distribue le paquet reformé en ligne et répète la manip plusieurs fois
- 5) Le magicien retrouve la carte de A à la position donnée par B

$$p_2 = p_1 + 0$$

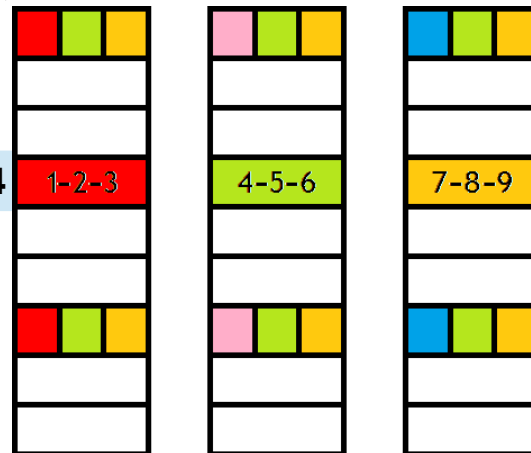
$$p_2 = 1$$



Colonne mise
au-dessus du paquet

$$p_2 = p_1 + 3$$

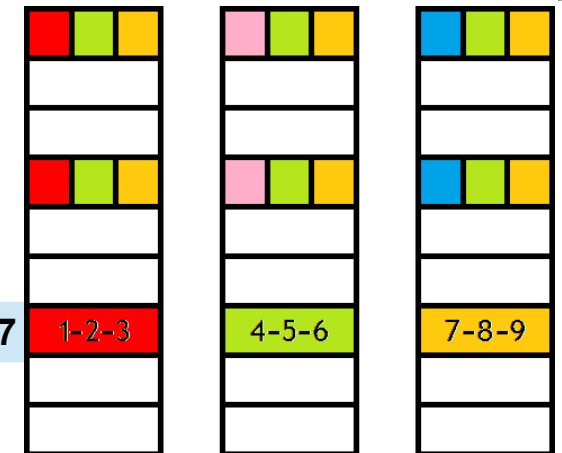
$$p_2 = 4$$



Colonne mise
au milieu du paquet

$$p_2 = p_1 + 6$$

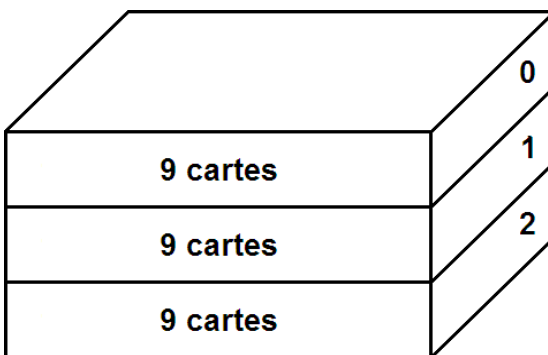
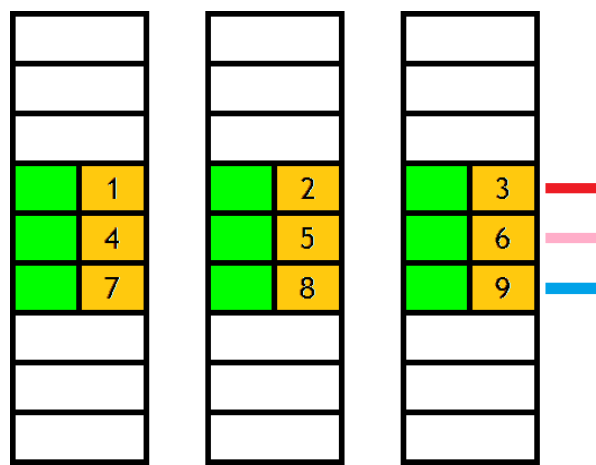
$$p_2 = 7$$



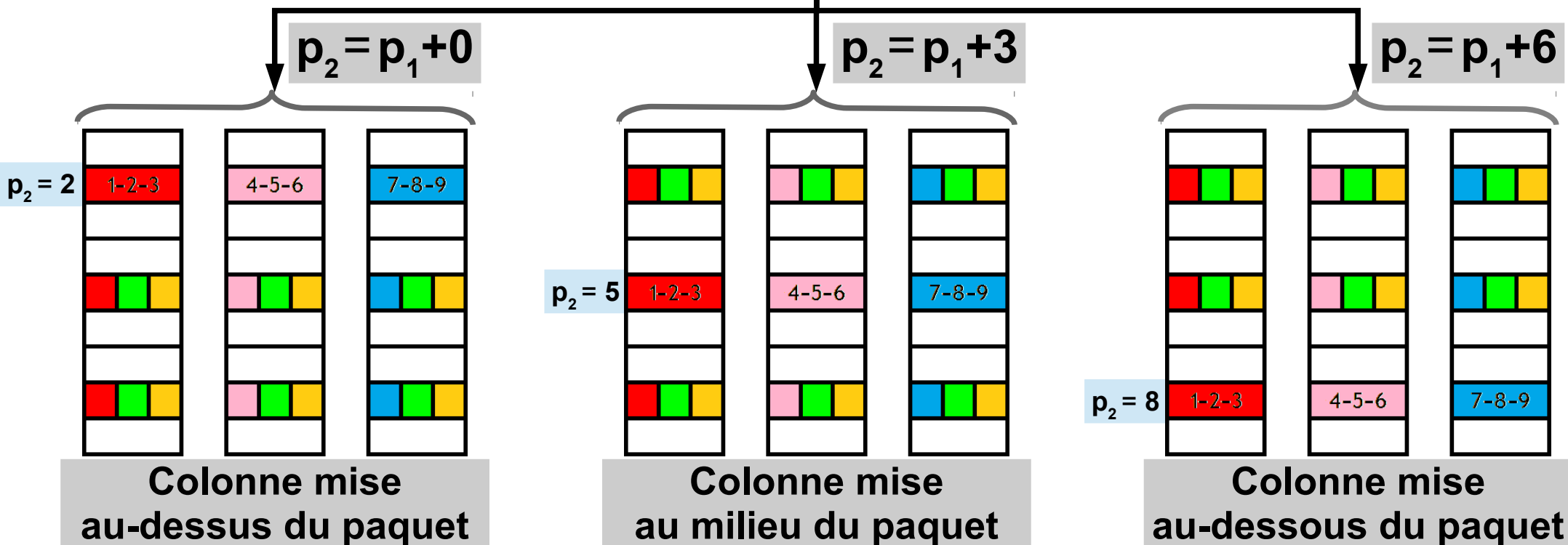
Colonne mise
au-dessous du paquet

Cartomagie – Tour des 27 cartes (M. Gardner)

Le secret 2b/3

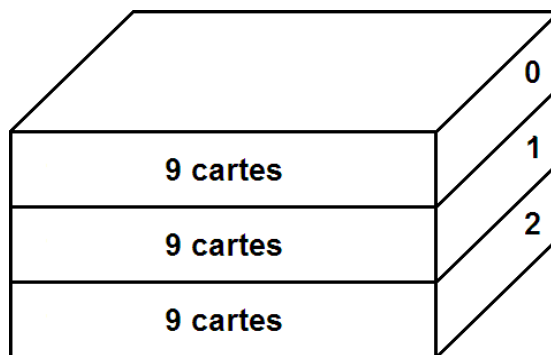
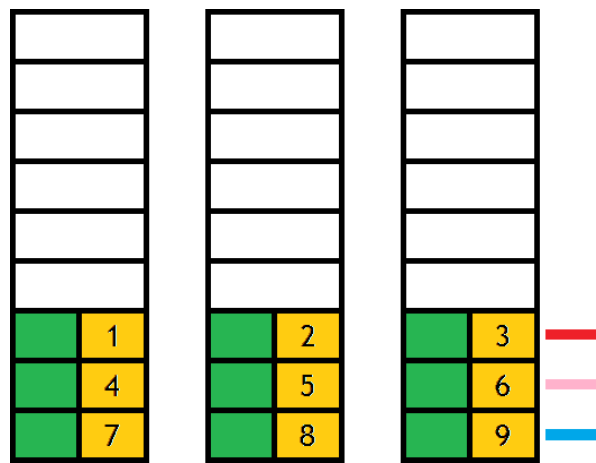


- 1) Le spectateur A choisit une carte
Le spectateur B choisit une position
- 2) A indique la colonne où se trouve sa carte
- 3) Le magicien récupère les cartes en colonne et met la colonne de A là où il a besoin
- 4) Le magicien distribue le paquet reformé en ligne et répète la manip plusieurs fois
- 5) Le magicien retrouve la carte de A à la position donnée par B



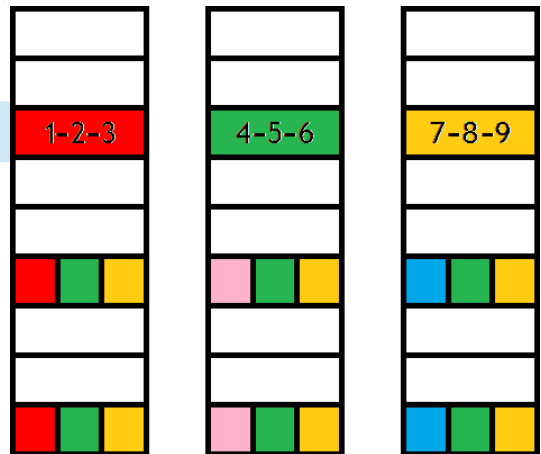
Cartomagie – Tour des 27 cartes (M. Gardner)

Le secret $2c/3$



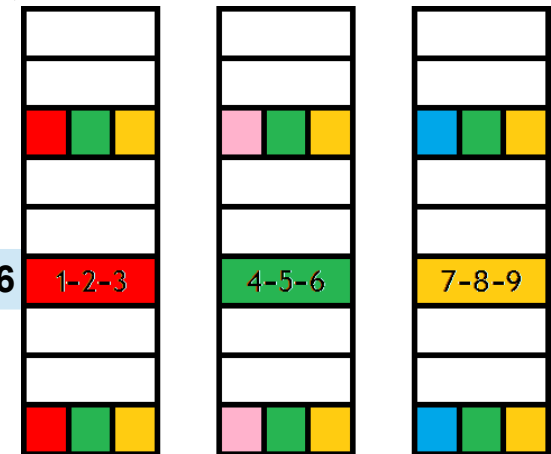
- 1) Le spectateur A choisit une carte
Le spectateur B choisit une position
- 2) A indique la colonne où se trouve sa carte
- 3) Le magicien récupère les cartes en colonne et met la colonne de A là où il a besoin
- 4) Le magicien distribue le paquet reformé en ligne et répète la manip plusieurs fois
- 5) Le magicien retrouve la carte de A à la position donnée par B

$$p_2 = p_1 + 0$$



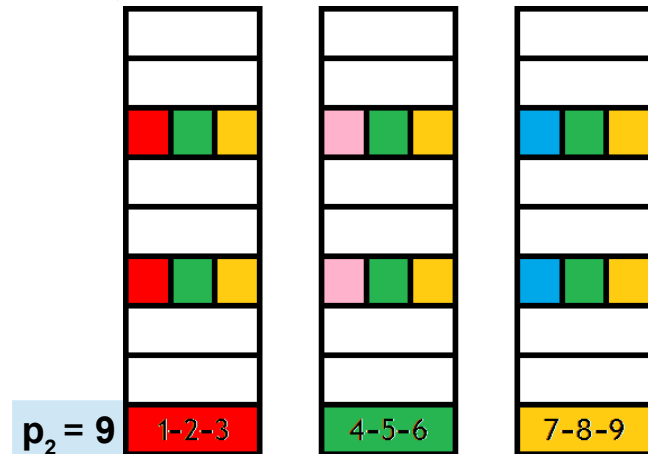
Colonne mise
au-dessus du paquet

$$p_2 = p_1 + 3$$



Colonne mise
au milieu du paquet

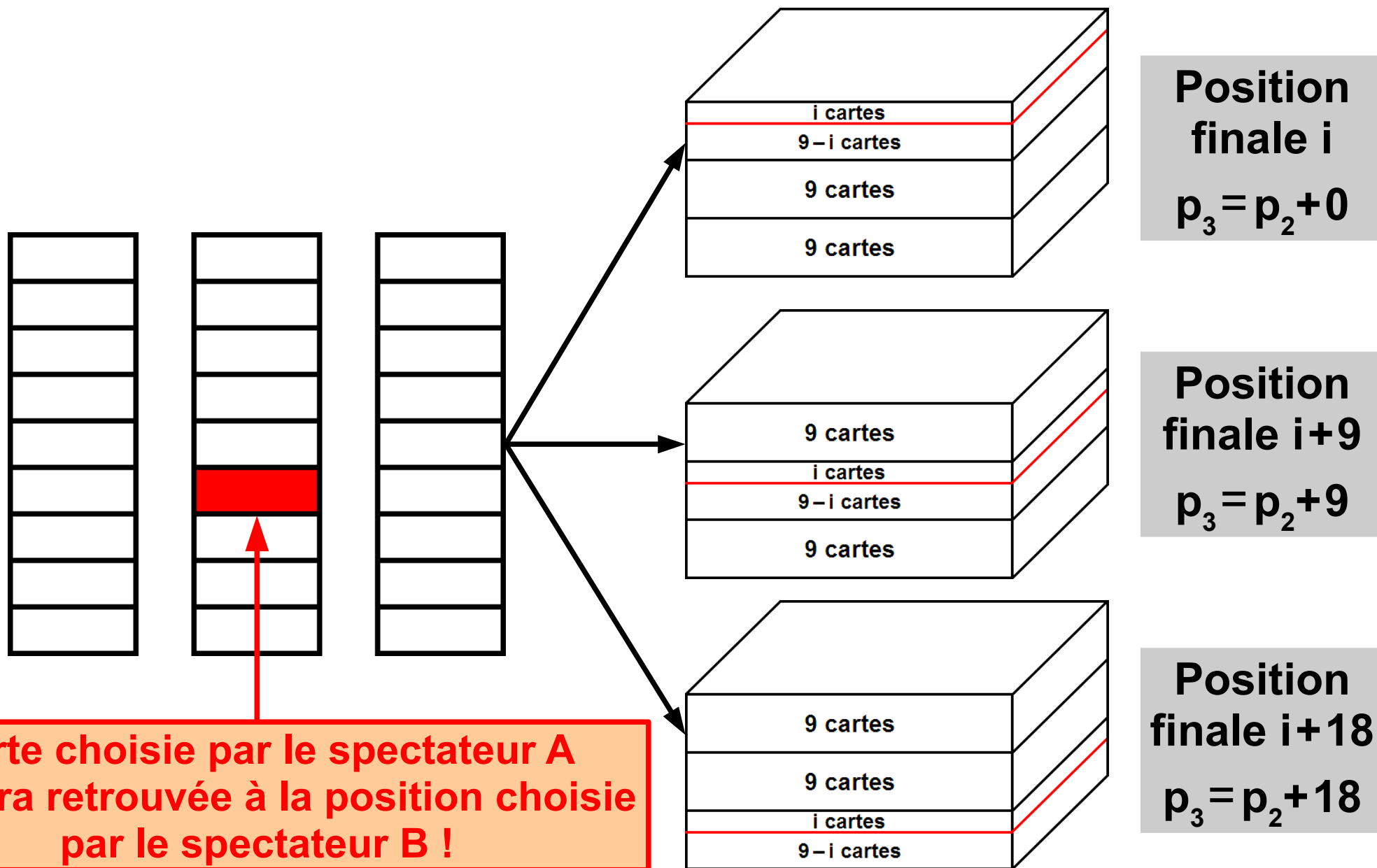
$$p_2 = p_1 + 6$$



Colonne mise
au-dessous du paquet

Cartomagie – Tour des 27 cartes (M. Gardner)

Le secret 3/3

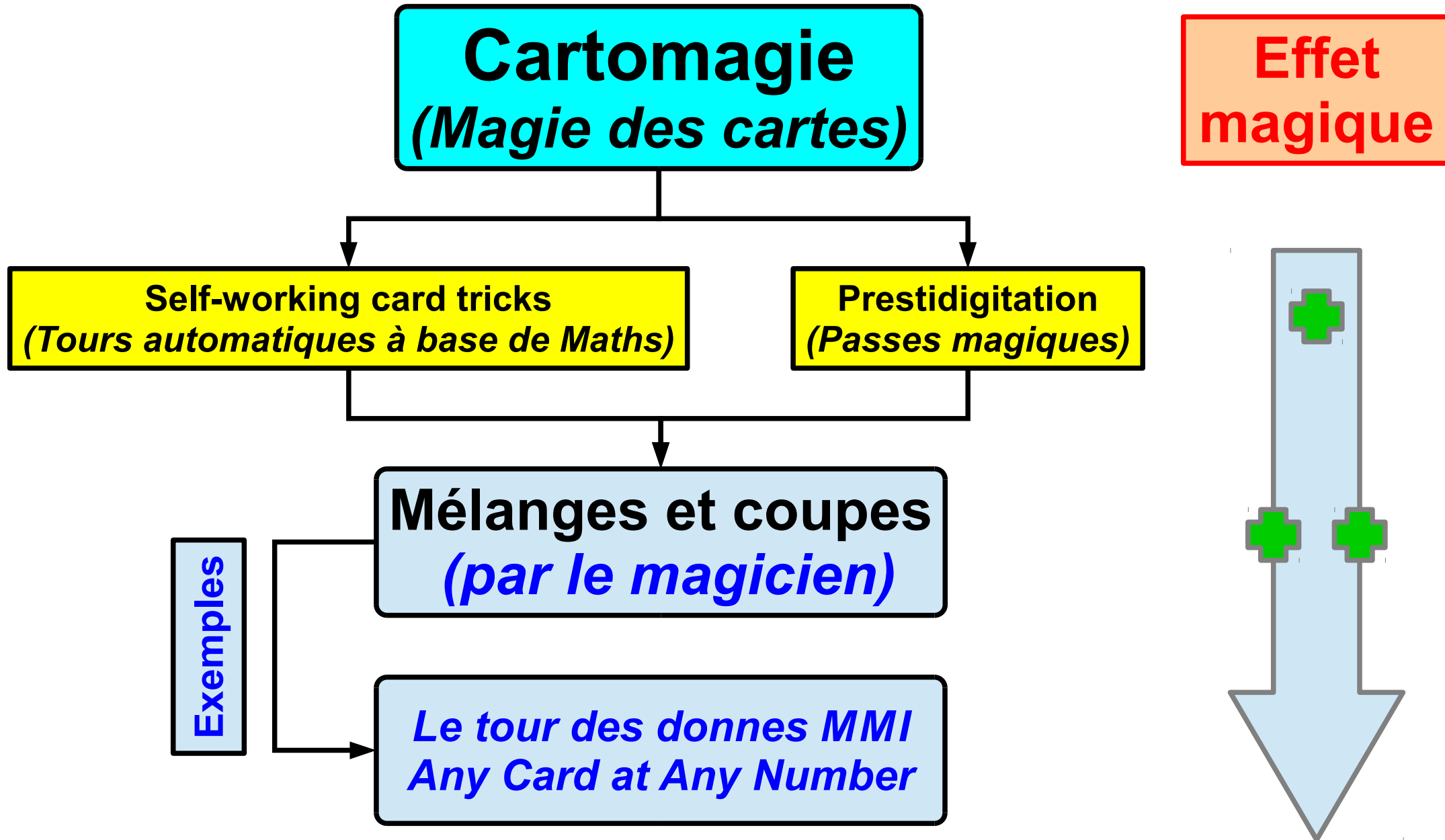


II

Divers mélanges...

Cartomagie

Le principe



Cartomagie – Tour des donnes MMI et ACAN

La conception des deux tours

Idée générale

Faire un tour
avec des **donnes** et **mélanges**
qui classent le jeu en **chapelet**
pour pouvoir faire un **ACAN** !

*Le tour des donnes MMI
Any Card at Any Number*

Cartomagie – *Any Card at Any Number*

La conception des deux tours

- **Le spectateur A donne l'identité d'une carte**
- **Le spectateur B donne un nombre**
- **La carte donnée par A se trouve à la position indiquée par B !**

Les secrets

Jeu monté en chapelet

Forçage de la position par la preuve par 9

Cartomagie – Any Card at Any Number

Le secret : forçage par la preuve par 9

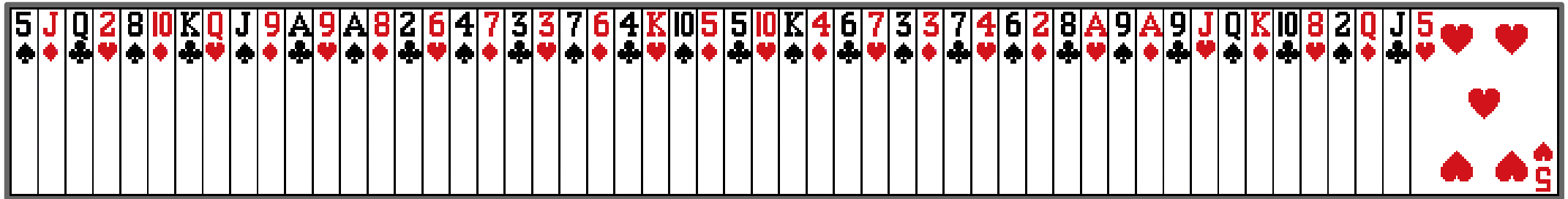
- Soit **x** le nombre choisi librement par le spectateur A
- Après quelques calculs, on obtient
$$N = 3(3x+6) = 9(x+2)$$

*Si un nombre est multiplié par 9,
alors la somme de ses digits vaut 9
ou un multiple de 9*

**Il suffit ensuite de faire faire
une ou plusieurs opérations pour atteindre
la position nommée par le spectateur B**

Cartomagie – Any Card at Any Number

Le secret : le chapelet Raymond



$$\text{Position : } N = 4q + r$$

Reste : r

- 0 = Cœur
- 1 = Pique
- 2 = Carreau
- 3 = Trèfle

Famille : r

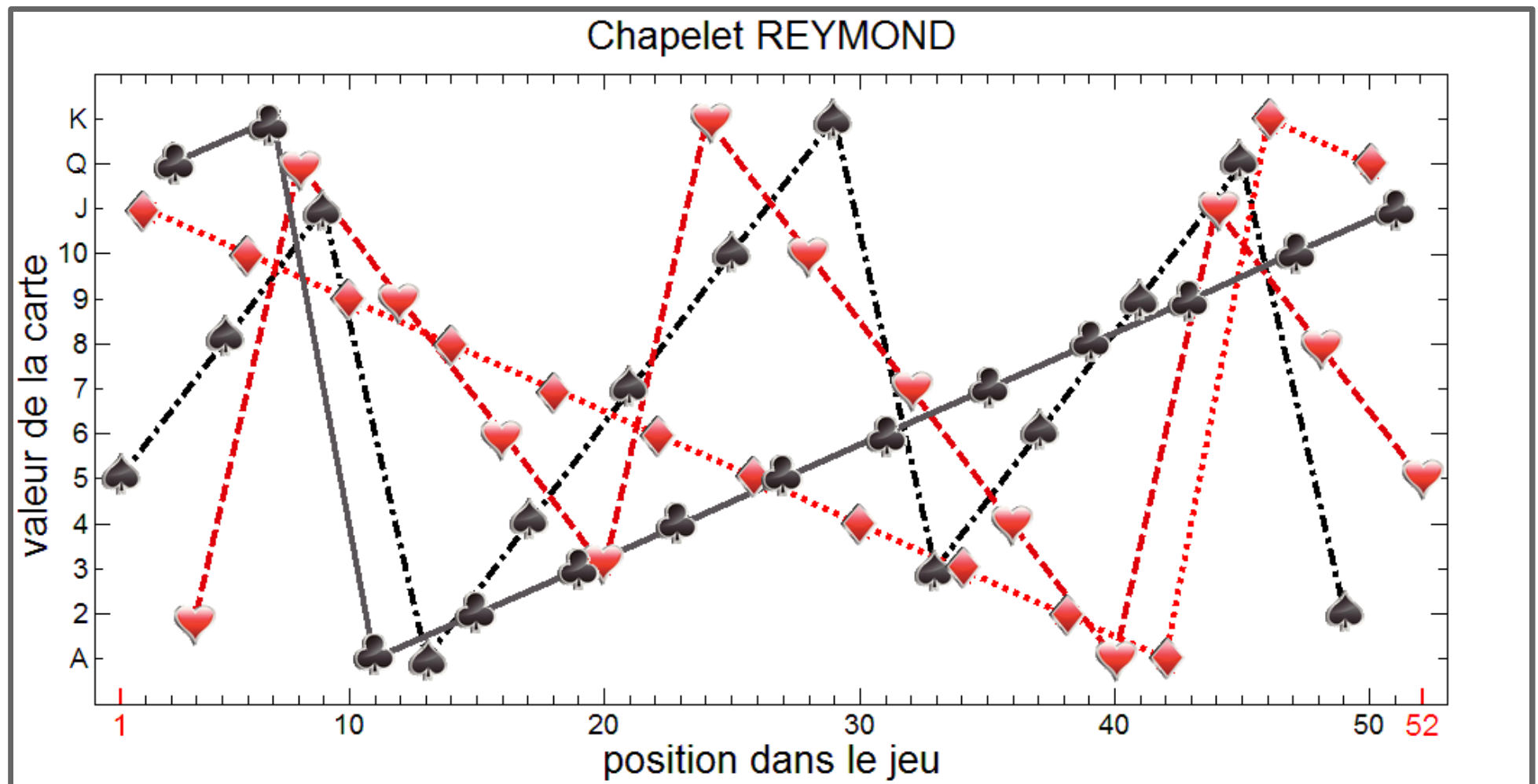
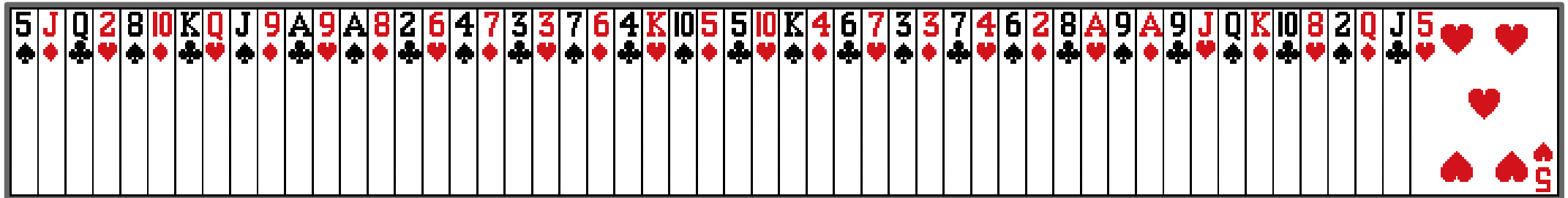
Quotient : q

- Si $r = 3$ alors $X_3 \equiv q - 1 \pmod{13}$
- Si $r = 2$ alors $X_2 \equiv 10 - X_3 \pmod{13}$
- Si $r = 1$ alors $X_1 \equiv 3q + 5 \pmod{13}$
- Si $r = 0$ alors $X_0 \equiv 10 - X_1 \pmod{13}$

Valeur de la carte : X

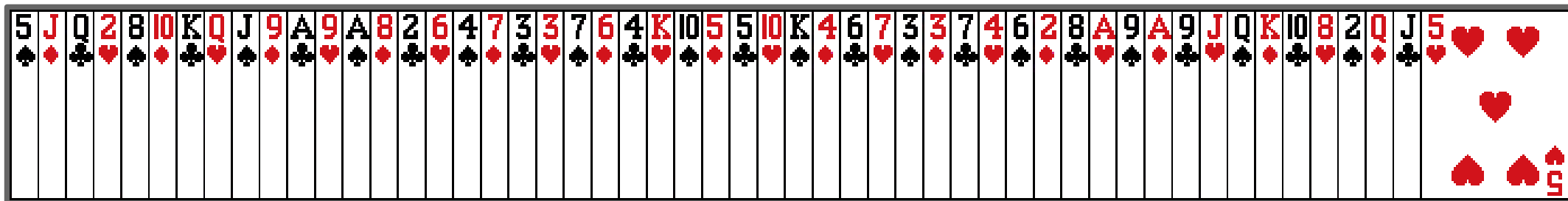
Cartomagie – Any Card at Any Number

Le secret : le chapelet Raymond



Cartomagie – Tour des donnes MMI

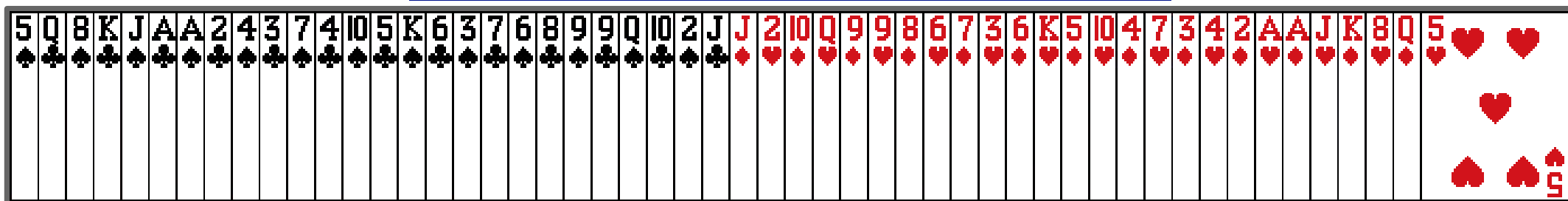
La conception du tour



**FARO
OUT**

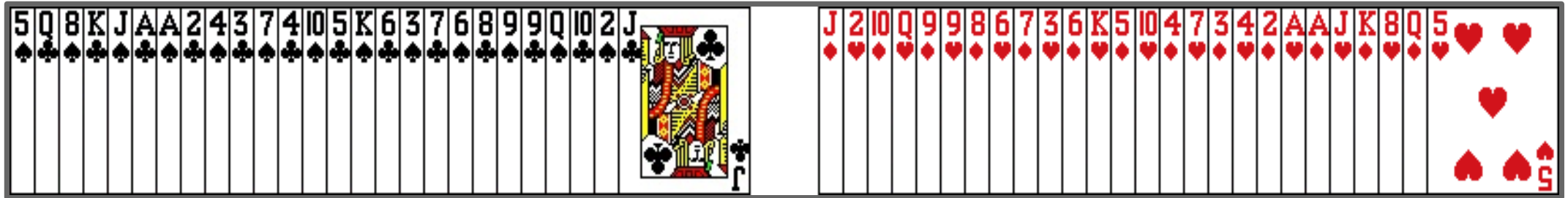


**ANTI
FARO
OUT**

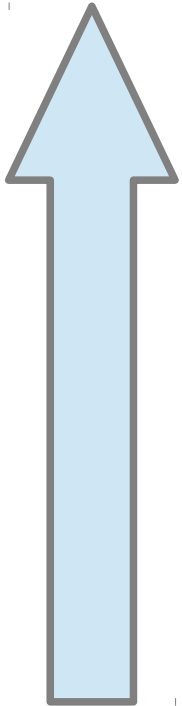


Cartomagie – Tour des donnes MMI

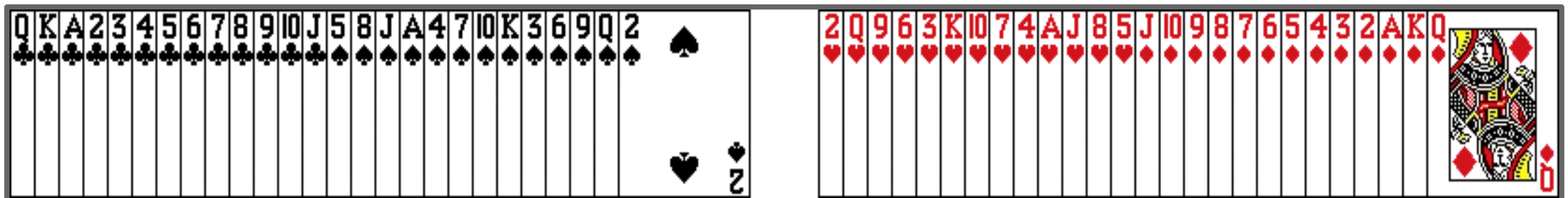
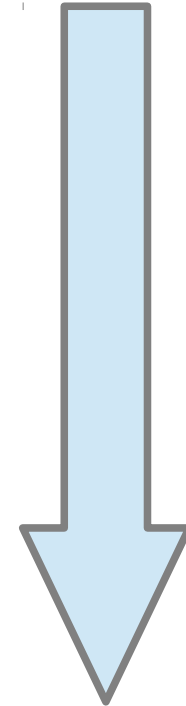
La conception du tour



**FARO
IN**



**ANTI
FARO
IN**

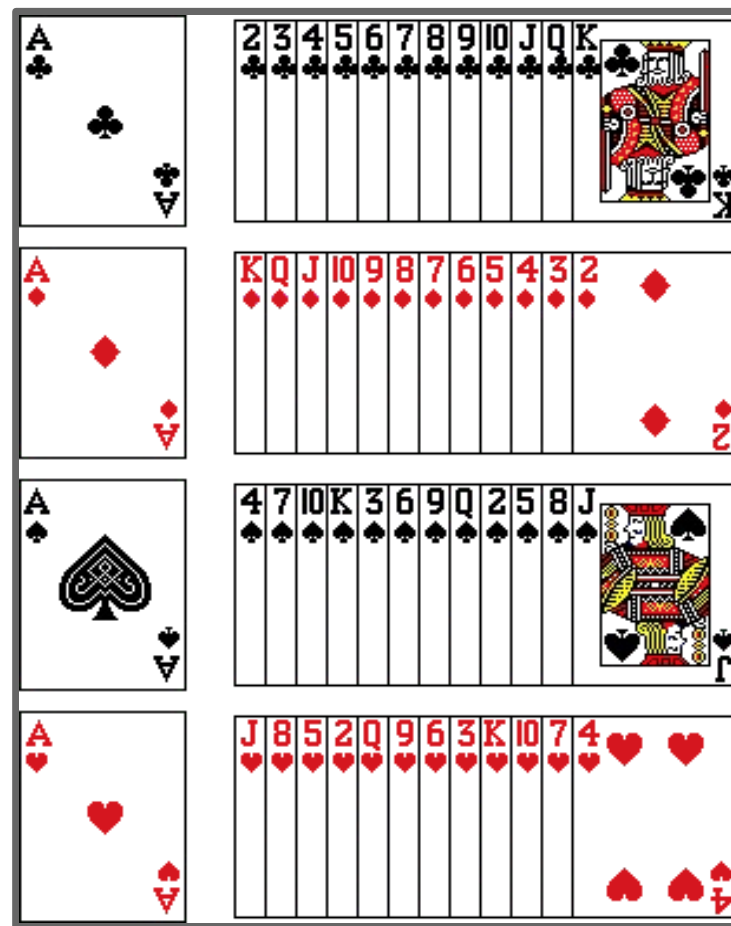


Cartomagie – Tour des donnes MMI

La conception du tour

EFFET MAGIQUE

? **DONNES**
qui mélangent
de plus en plus



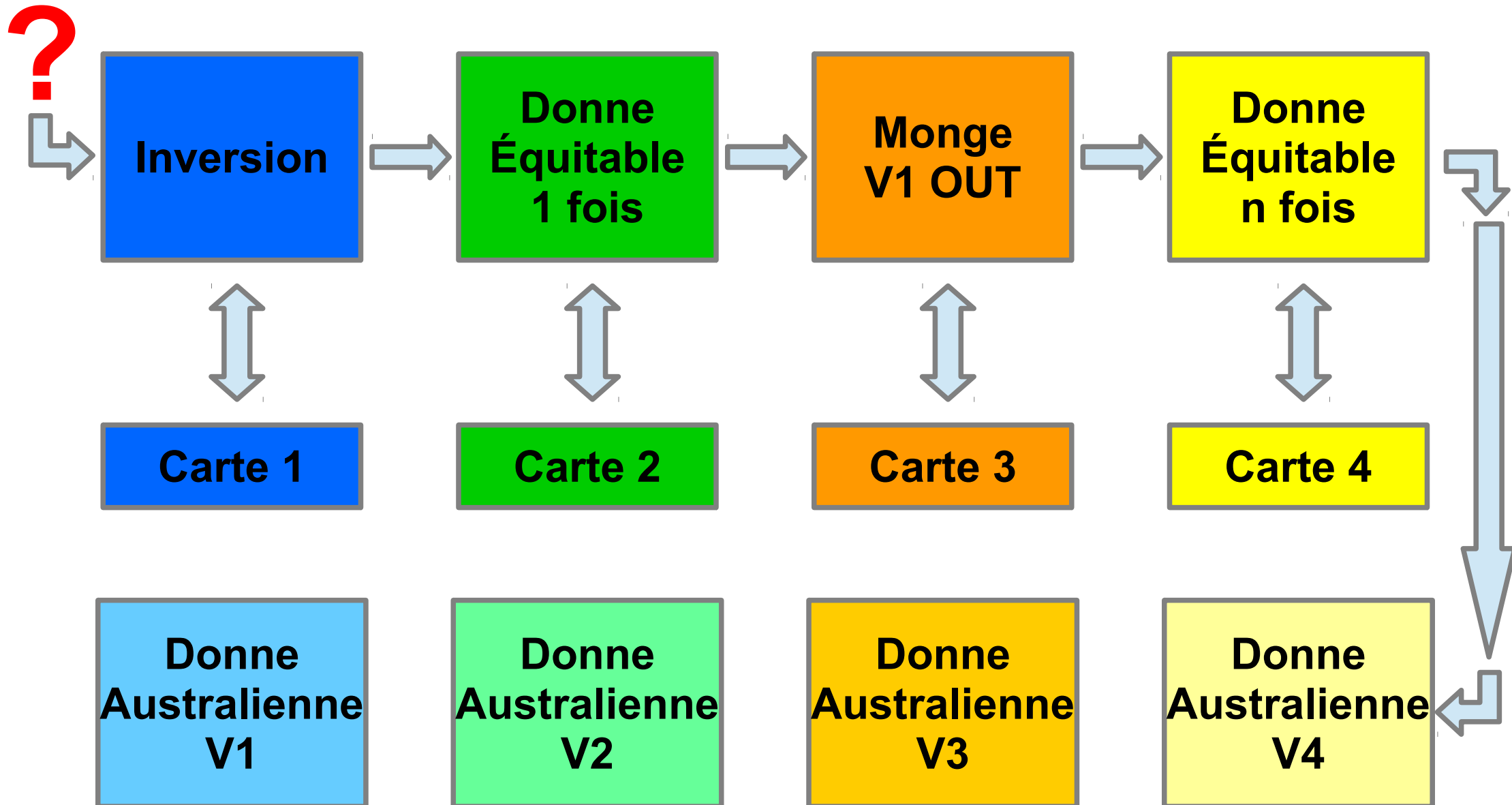
COUPES

FAROS



Cartomagie – Tour des données MMI

La conception du tour



Cartomagie – Tour des donnes MMI

La conception du tour

Tours de Magie - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)

Mélanges de cartes Codage/Cryptage

CASINO ROYAL

Paquet initial

52

Paquet mélangé : Ordre inversé

01

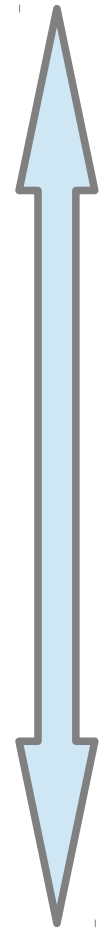
52

Main du magicien

Carte(s) choisie(s)

The screenshot shows a software interface for a card magic routine. At the top, it says 'Tours de Magie - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)'. Below this are two tabs: 'Mélanges de cartes' and 'Codage/Cryptage'. The main area has a dark blue background with the 'CASINO ROYAL' logo. It displays two decks: 'Paquet initial' (top) and 'Paquet mélangé : Ordre inversé' (bottom). The 'Paquet initial' deck is shown as a vertical list of numbers 01 to 52, with a '52' label at the bottom right. The 'Paquet mélangé' deck is shown as a vertical list of numbers 51 down to 01, with a '01' label at the bottom right. At the bottom left, there is a fan of cards (Ace of Diamonds, King of Diamonds, Queen of Diamonds, Jack of Diamonds, 10 of Diamonds) and a '52' label. At the bottom right, there is a fan of cards (Ace of Diamonds, King of Diamonds, Queen of Diamonds, Jack of Diamonds, 10 of Diamonds) and a '01' label. A green box labeled 'Main du magicien' is next to the bottom fan, and another green box labeled 'Carte(s) choisie(s)' is next to the bottom fan.

Inversion



Carte 1

Cartomagie – Tour des donnes MMI

La conception du tour

Tours de Magie - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)

Mélanges de cartes Codage/Cryptage

CASINO ROYAL

Paquet initial

52

52

Paquet mélangé : Donne équitable (1 fois)

51

51

52

52

Main du magicien

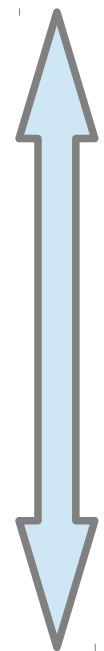
Carte(s) choisie(s)



Inversion



Donne
Équitable 1 fois



Carte 2

Cartomagie – Tour des donnes MMI

La conception du tour

Tours de Magie - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)

Mélanges de cartes Codage/Cryptage

CASINO ROYAL

Paquet initial

Paquet mélangé : Monge v1 OUT

Main du magicien

Carte(s) choisie(s)

52

51

52

51

52

51

52

51

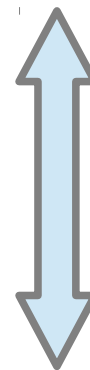
Inversion



Donne
Équitable 1 fois



Monge
V1 OUT



Carte 3

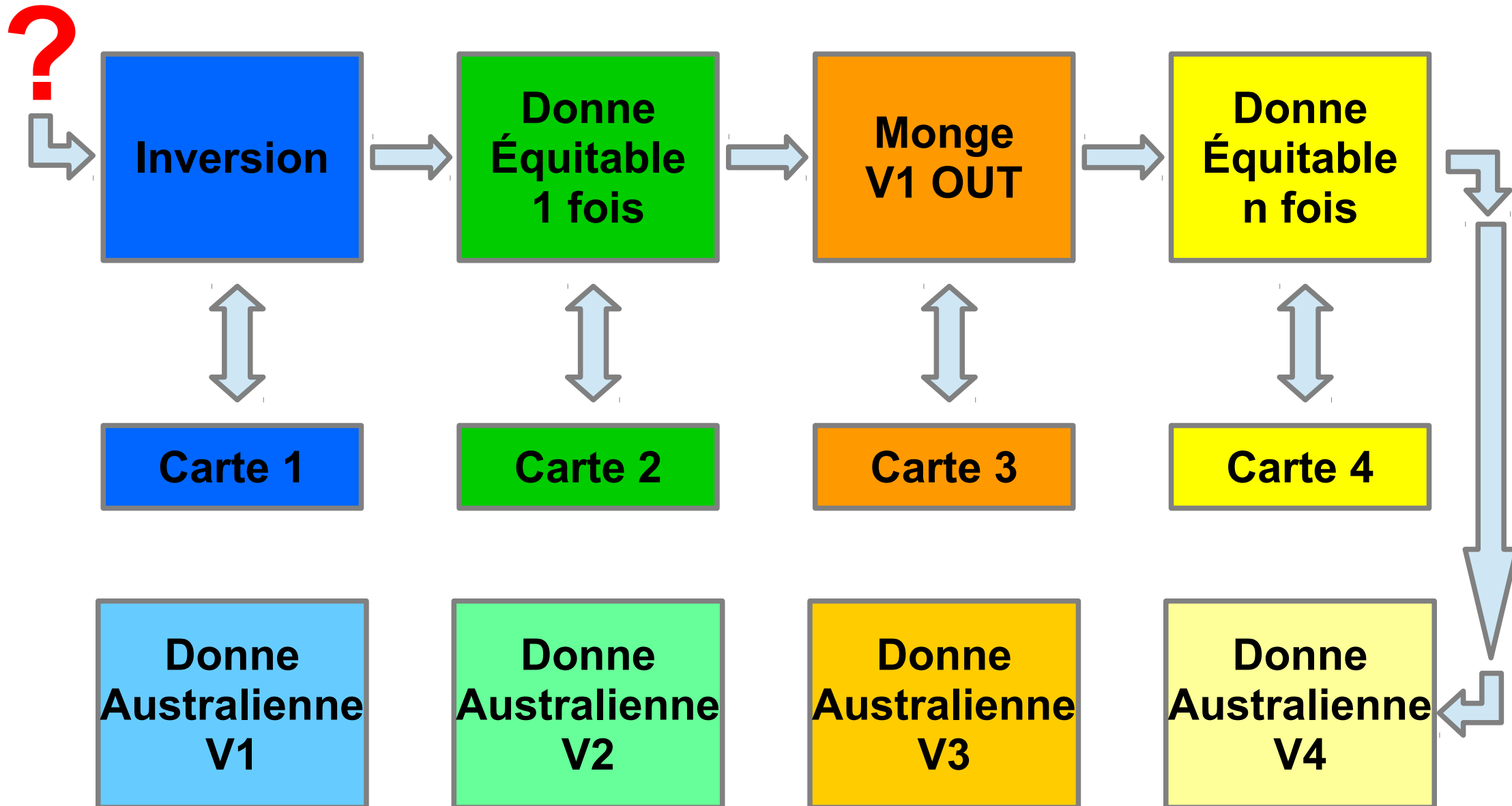
La conception du tour

```
graph TD; A[Inversion] --> B[Donne Équitable 1 fois]; B --> C[Monge V1 OUT]; C --> D[Donne Équitable n fois]; D <--> E[Carte 4];
```

The flowchart illustrates the V1 OUT algorithm. It begins with a blue box labeled "Inversion". A downward arrow leads to a green box labeled "Donne Équitable 1 fois". Another downward arrow leads to an orange box labeled "Monge V1 OUT". A third downward arrow leads to a yellow box labeled "Donne Équitable n fois". Finally, a double-headed vertical arrow connects this yellow box to a yellow box at the bottom labeled "Carte 4".

Cartomagie – Tour des données MMI

La conception du tour



Cartomagie – Tour des donnes MMI

La conception du tour

Tours de Magie - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)

Mélanges de cartes Codage/Cryptage

CASINO ROYAL

Paquet initial

Paquet mélangé

Donne Australiennne V1

Donne Australiennne V2

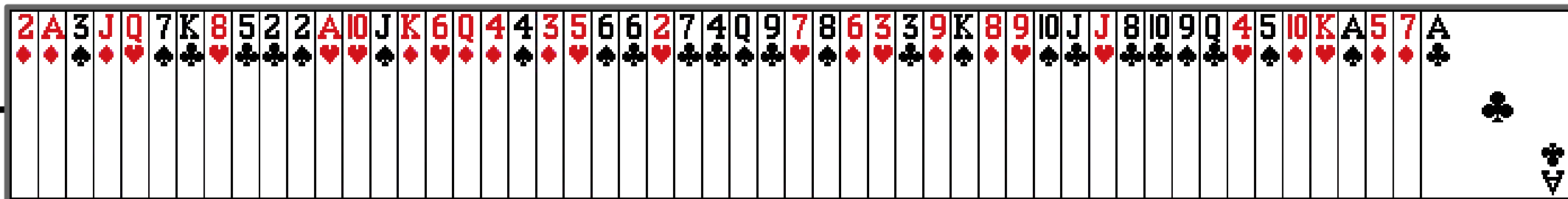
Donne Australiennne V3

Donne Australiennne V4

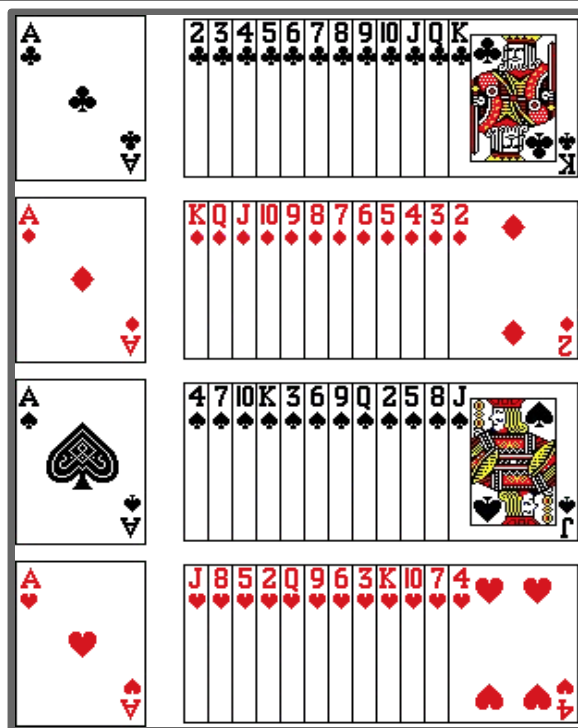
Cartomagie – Tour des donnes MMI

La conception du tour

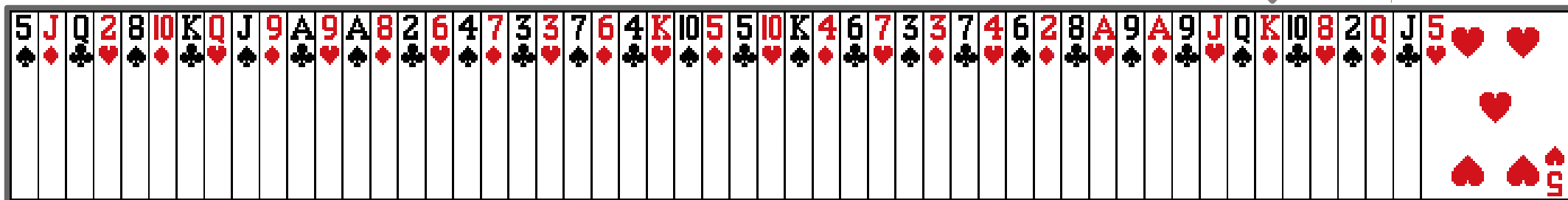
Départ



Mélanges



Faros



Chapelet

Description des mélanges

Cartomagie – Tour des donnes MMI

Le principe

Mélanges donnant un chaos

- Mélange « *à la française* »
- Mélange « *hindou* »

Mélanges donnant un chaos organisé ou pas !

- Mélange « *américain* » (ou « *à la queue d'aronde* »)

Mélanges donnant un chaos organisé

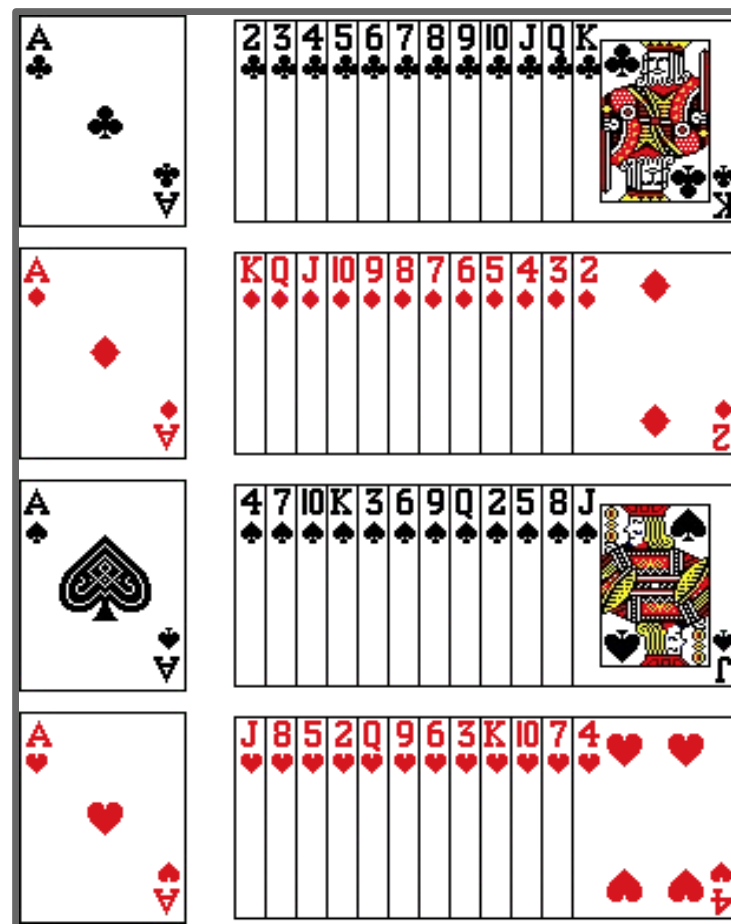
- Mélange parfait « *Faro* » (ou « *Pharaon* »)
- Mélange « *australien* », mélange de Monge
- Donne équitable (itérée ou non)

Mélanges

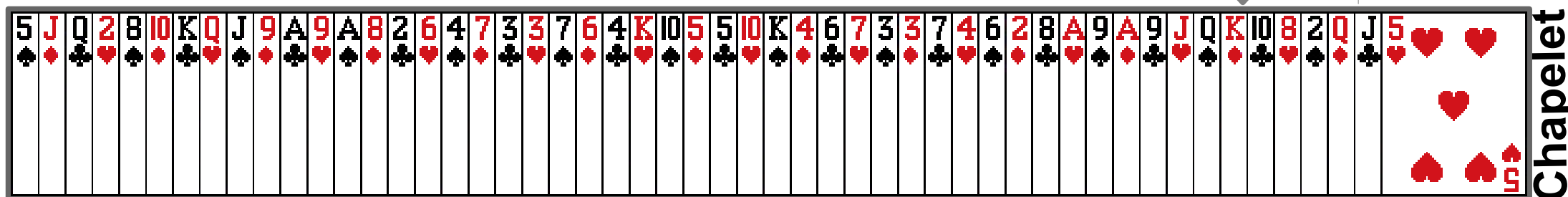
Faros

Mélanges Faros

Réorganisation du paquet



Faros



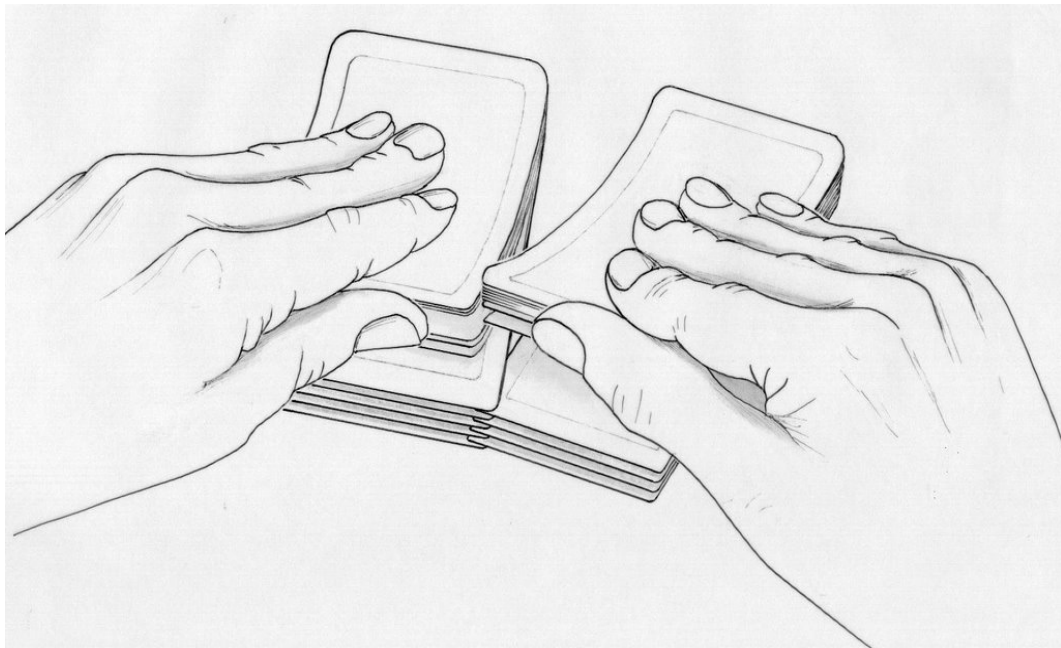
Chapelet

Mélanges Faros et américains

Le principe

Les coupes et mélanges donnant un chaos organisé

Mélanges « *Faros* »
→ **Déterministes**



Mélanges « *américains* »
→ **Aléatoires**



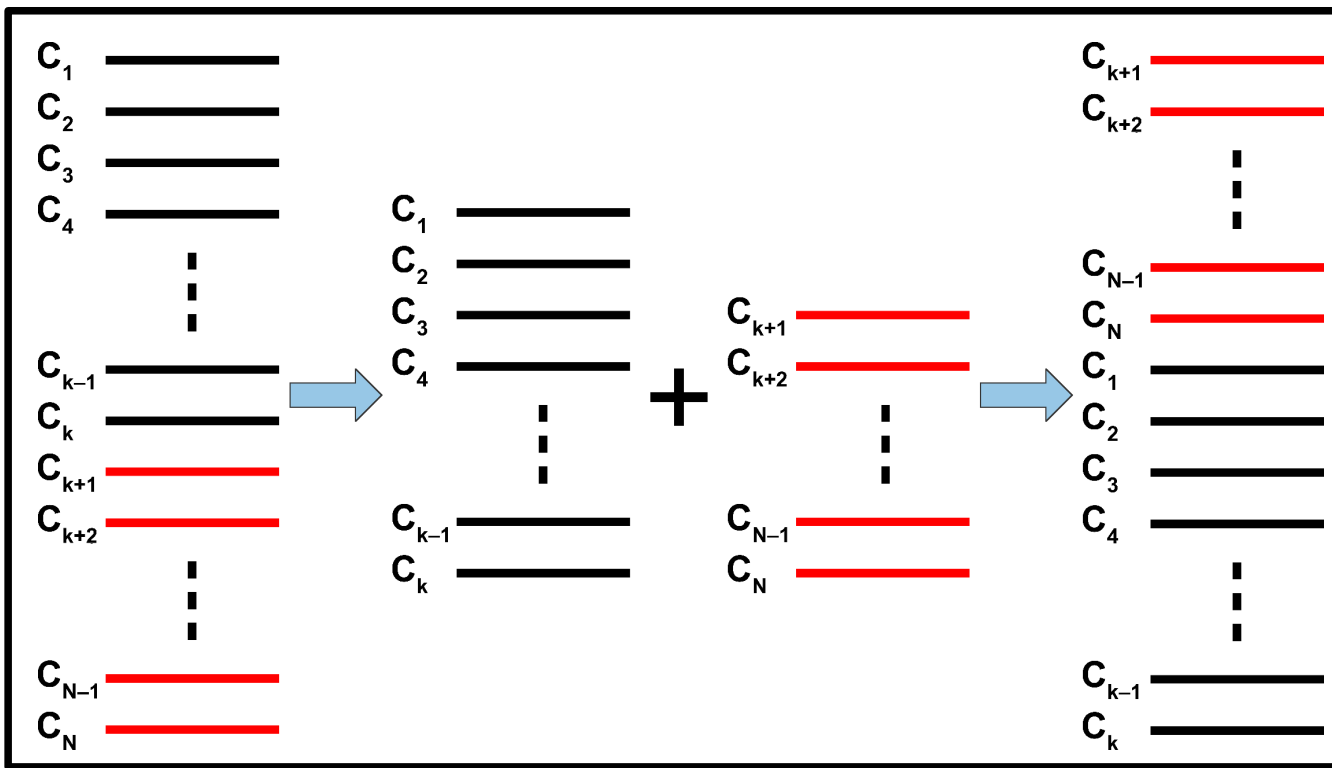
Mélanges Faros

Préliminaire : coupes

Modélisation

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = c(i)$: position **après** mélange

*Pour un jeu de N cartes,
coupe après la k^e carte :*



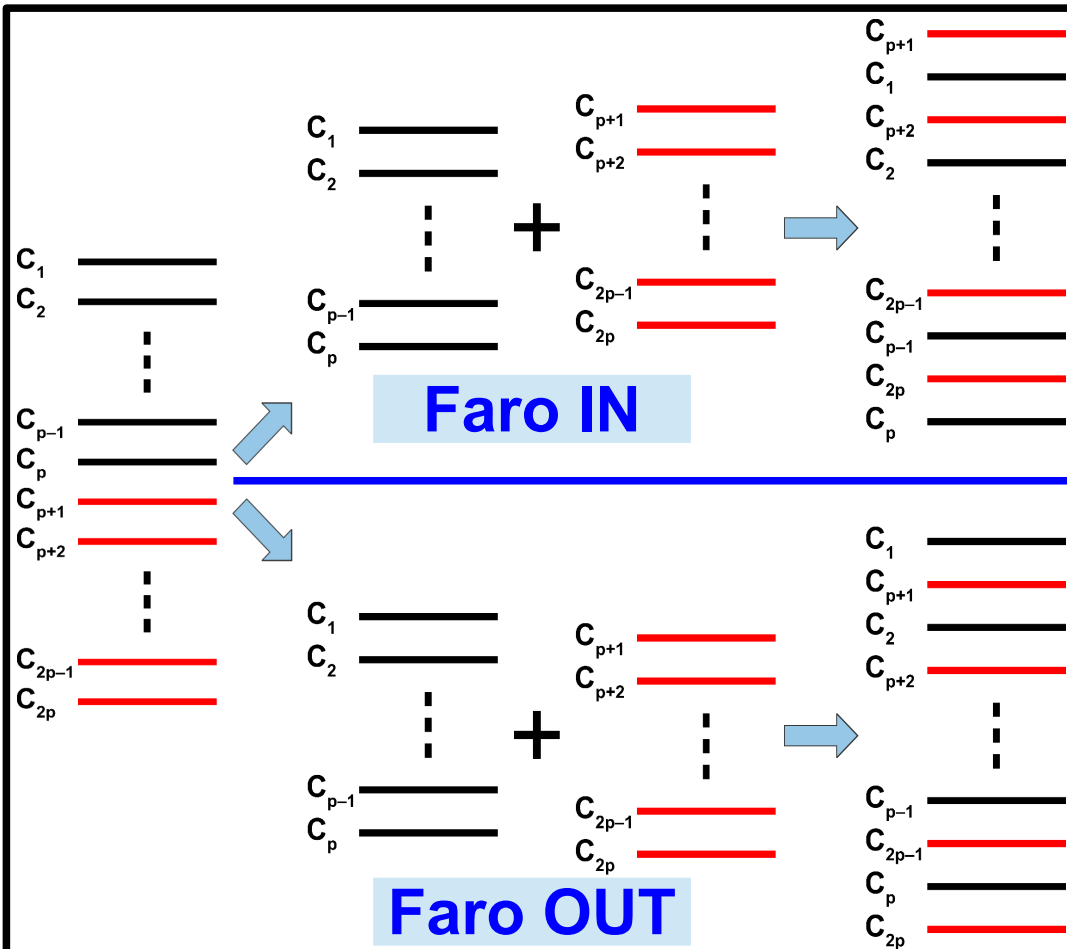
$$c_k(i) = \begin{cases} i + N - k & \text{si } i \leq k \\ i - k & \text{si } i \geq k \end{cases}$$
$$\equiv i - k \pmod{N}$$

Mélanges Faros et américains

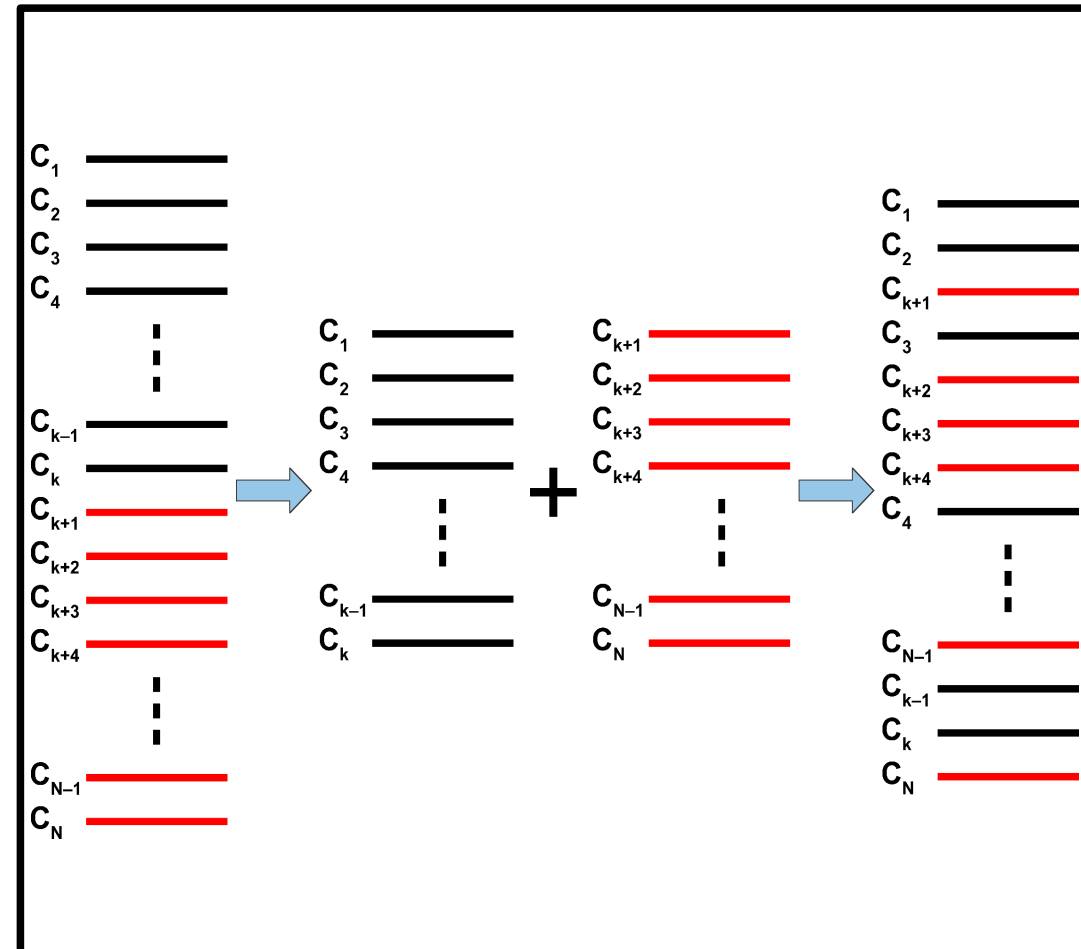
Le principe

Les coupes et mélanges donnant un chaos organisé

Mélanges « Faros » → Déterministes



Mélanges « américains » → Aléatoires



Mélanges Faros

Le secret

Modélisation

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = f(i)$: position **après** mélange

Pour un jeu de $N = 2p$ cartes :

$$f_{IN}(i) = \begin{cases} 2i & \text{si } i \leq N/2 \\ 2i - N - 1 & \text{si } i \geq N/2 + 1 \end{cases}$$
$$\equiv 2i \pmod{N+1}$$

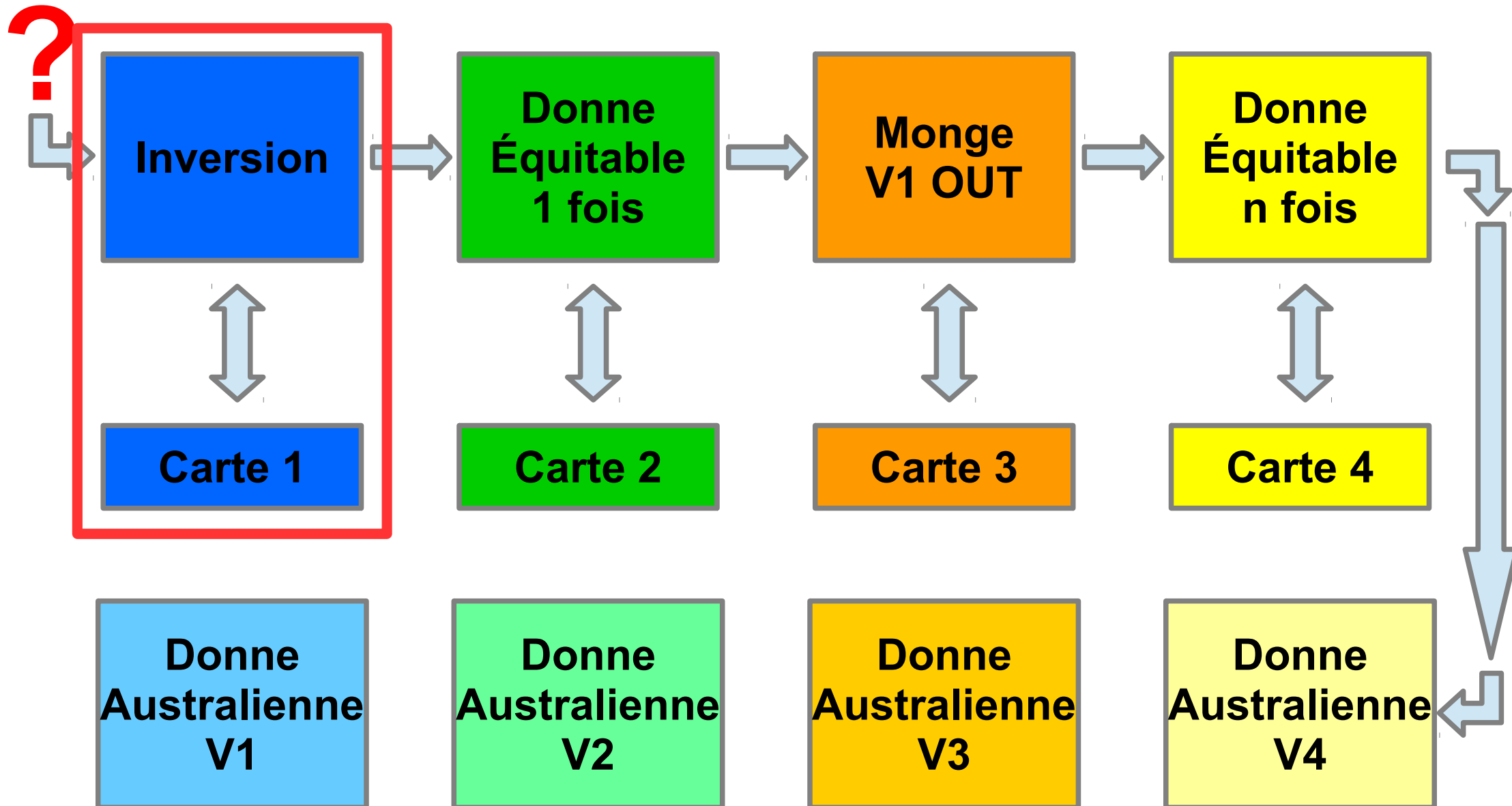
Faro **IN**

$$f_{OUT}(i) = \begin{cases} 2i - 1 & \text{si } i \leq N/2 \\ 2i - N & \text{si } i \geq N/2 + 1 \end{cases}$$
$$\equiv 2i - 1 \pmod{N-1}$$

Faro **OUT**

Cartomagie – Tour des données MMI

Les explications



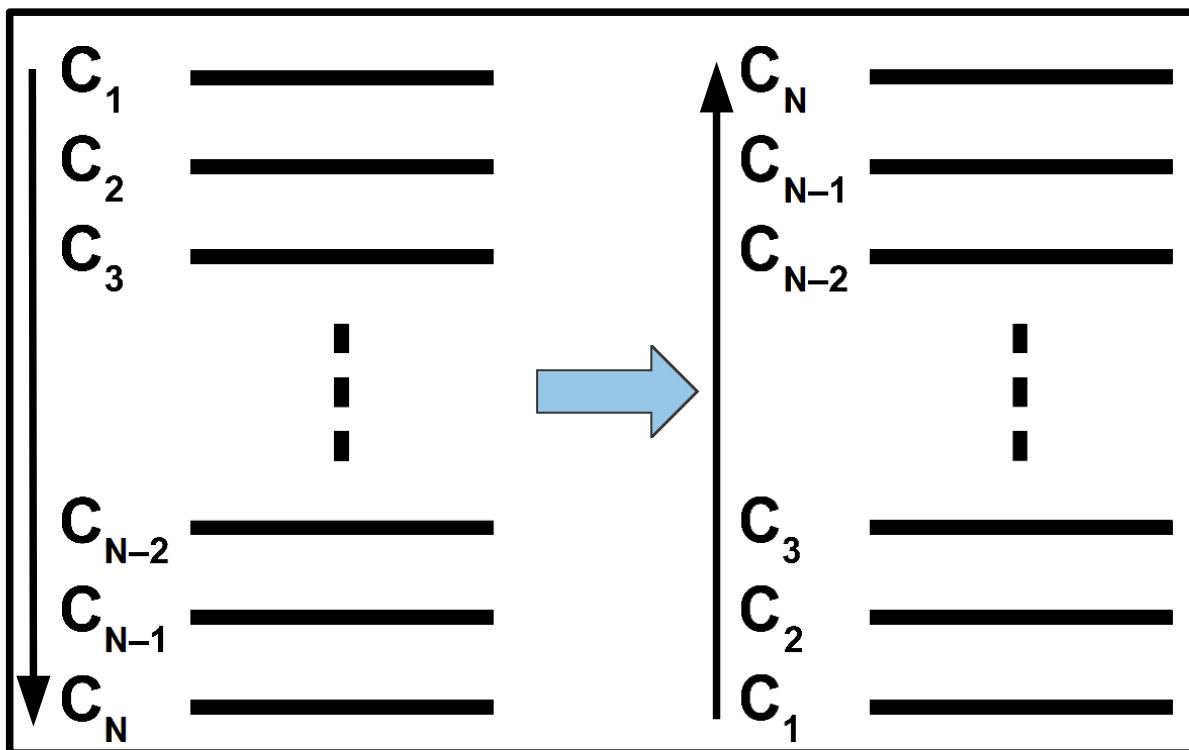
Inversion – Retournement

Le secret

Modélisation

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j=r(i)$: position **après** mélange

Pour un jeu de N cartes :

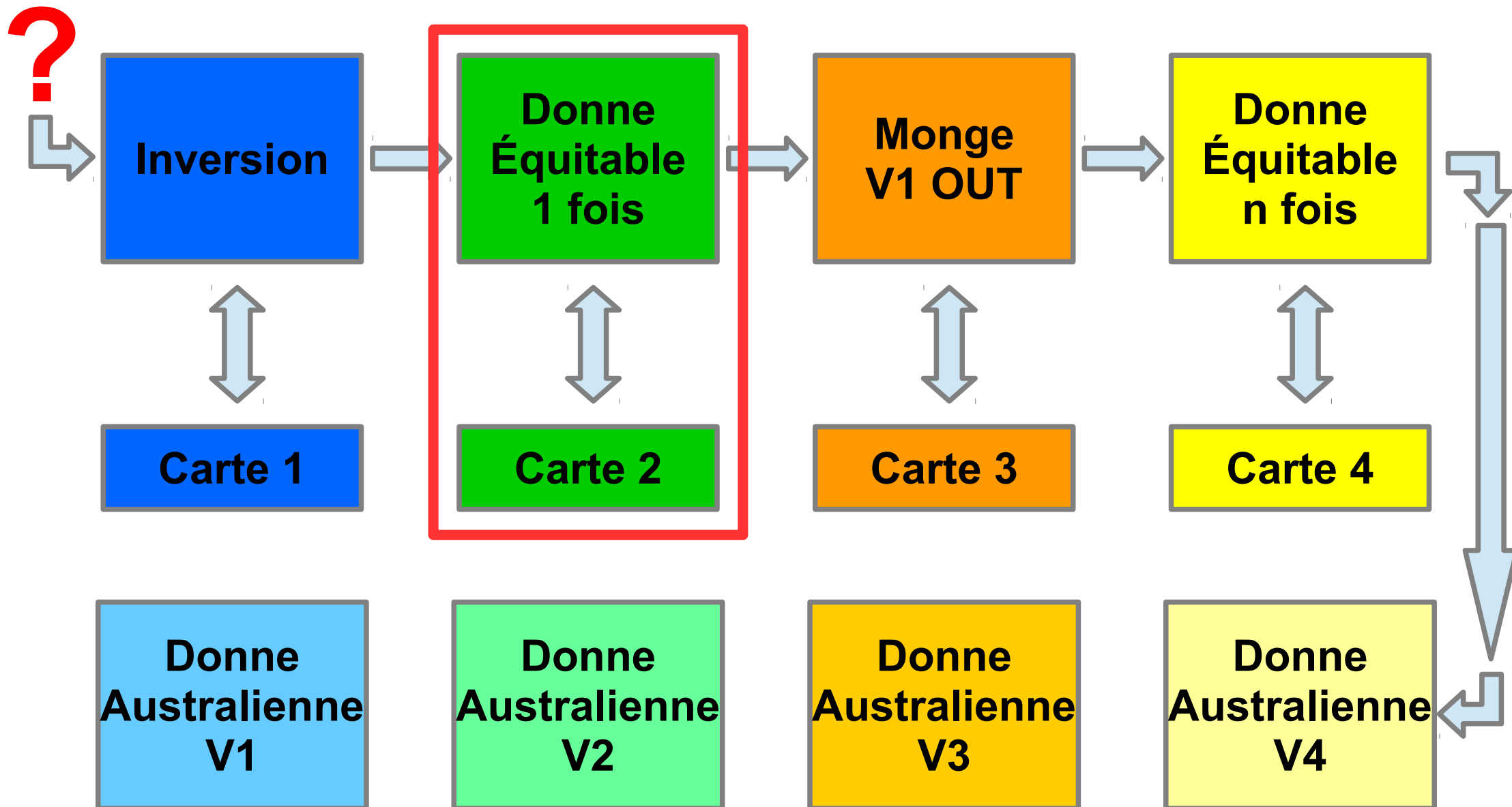


$$r(i) = N+1-i$$

*C'est une symétrie !
 $r \circ r = id$ ou $r = r^{-1}$*

Cartomagie – Tour des données MMI

Les explications

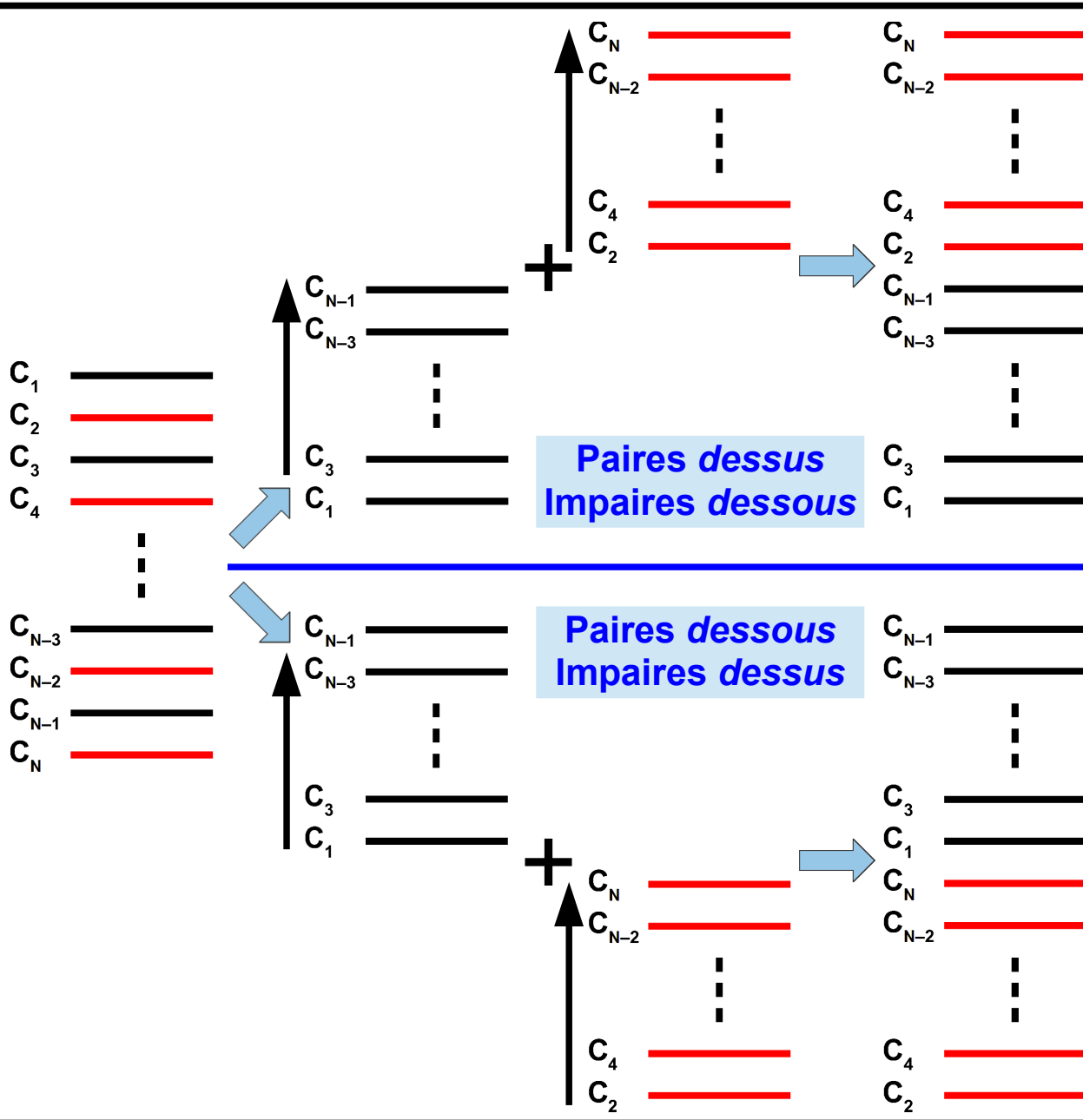


Donne équitable

La manipulation

N pair

L'un des deux tas
contient les cartes *paires*
l'autre les *impaires*,
et l'on superpose
les deux tas



Donne équitable

Le secret

Modélisation

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = g(i)$: position **après** mélange

Pour un jeu de $N = 2p$ cartes :

$$g_1(i) = \begin{cases} (N+2-i)/2 & \text{si } i \text{ est pair} \\ (2N+1-i)/2 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

$$g_2(i) = \begin{cases} (2N+2-i)/2 & \text{si } i \text{ est pair} \\ (N+1-i)/2 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

*C'est un «anti-Faro **OUT**»
retourné !*

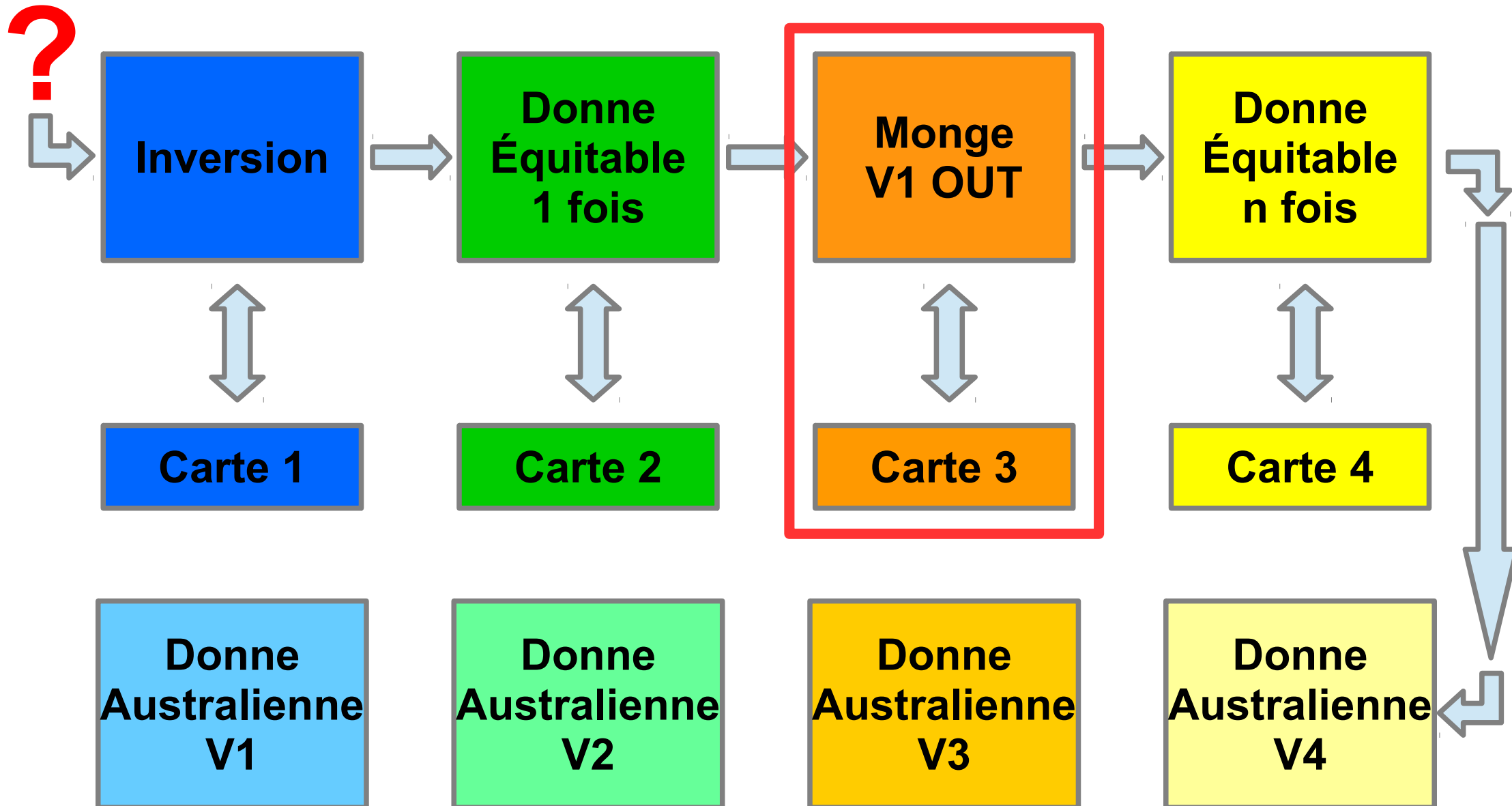
$$g_1 = f_{OUT}^{-1} \circ r = r \circ f_{OUT}^{-1}$$

*C'est un «anti-Faro **IN**»
retourné !*

$$g_2 = f_{IN}^{-1} \circ r = r \circ f_{IN}^{-1}$$

Cartomagie – Tour des données MMI

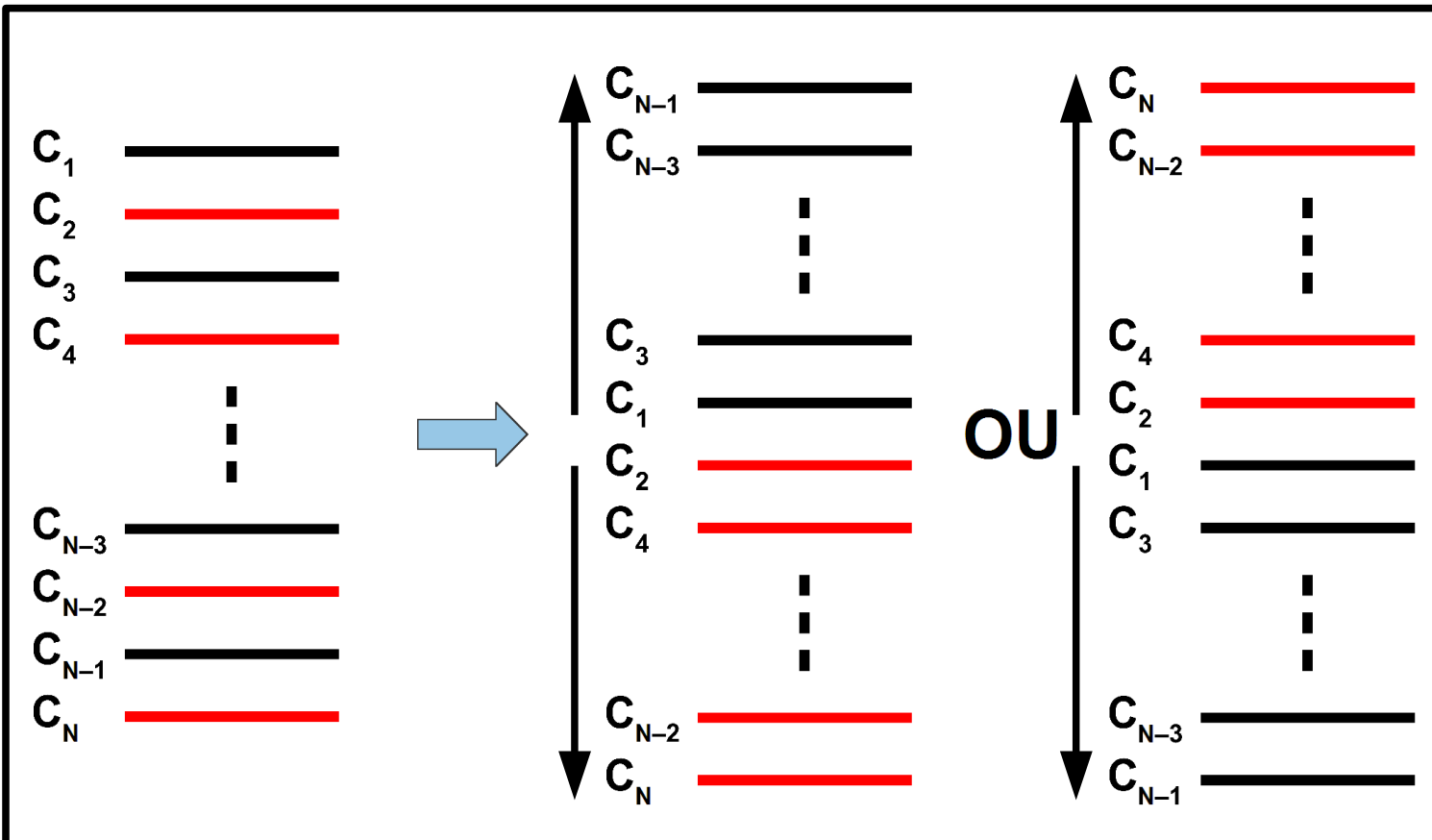
Les explications



Mélanges de Monge

La manipulation

N pair



- On « passe » les cartes d'une main à l'autre
- On place
la 2^e *sous* la 1^{re},
la 3^e *sur* la 1^{re},
la 4^e *sous* la 2^e,
la 5^e *sur* la 3^e,
etc.
- Ou inversement

Mélanges de Monge

Le secret

Modélisation

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = h(i)$: position **après** mélange

Pour un jeu de $N = 2p$ cartes :

$$h_1(i) = \begin{cases} (N+i)/2 & \text{si } i \text{ est pair} \\ (N+1-i)/2 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

$$h_2(i) = \begin{cases} (N+2-i)/2 & \text{si } i \text{ est pair} \\ (N+1+i)/2 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

Les deux mélanges se déduisent l'un de l'autre par retournement !

$$h_1 = r \circ h_2$$
$$h_2 = r \circ h_1$$

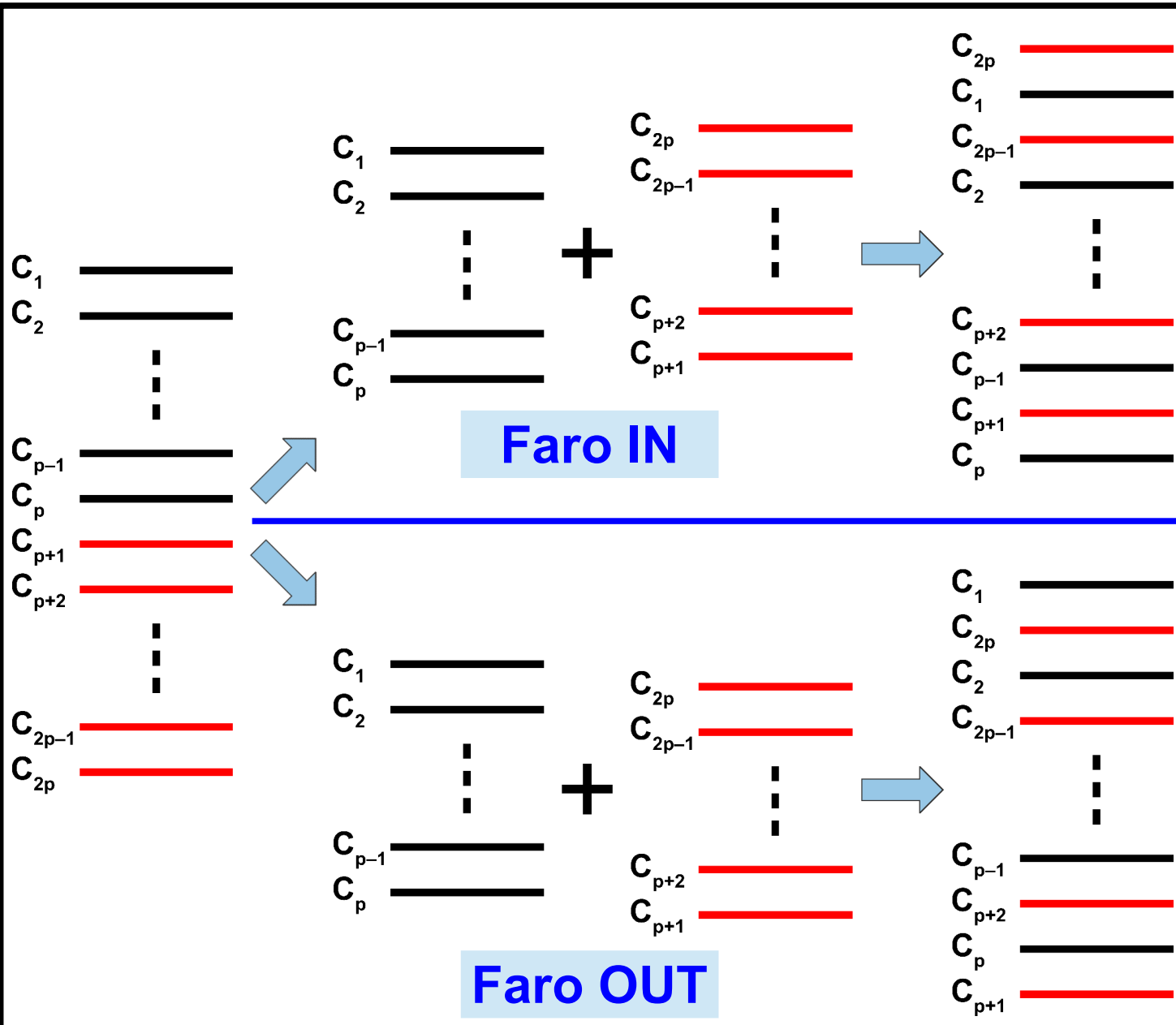
Mélanges de Monge

La manipulation (variante : mélange espagnol)

$N = 2p$

- On coupe le paquet en deux
- On retourne l'un des deux tas
- On effectue un mélange Faro

Ce sont des Faros avec retournement d'un des 2 paquets !



Mélanges de Monge

Le secret

Modélisation

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = h(i)$: position **après** mélange

Pour un jeu de $N = 2p$ cartes :

$$h_{IN}(i) = \begin{cases} 2i & \text{si } i \leq N/2 \\ 2N+1-2i & \text{si } i \geq N/2+1 \end{cases}$$
$$\equiv \pm 2i \pmod{2N+1}$$

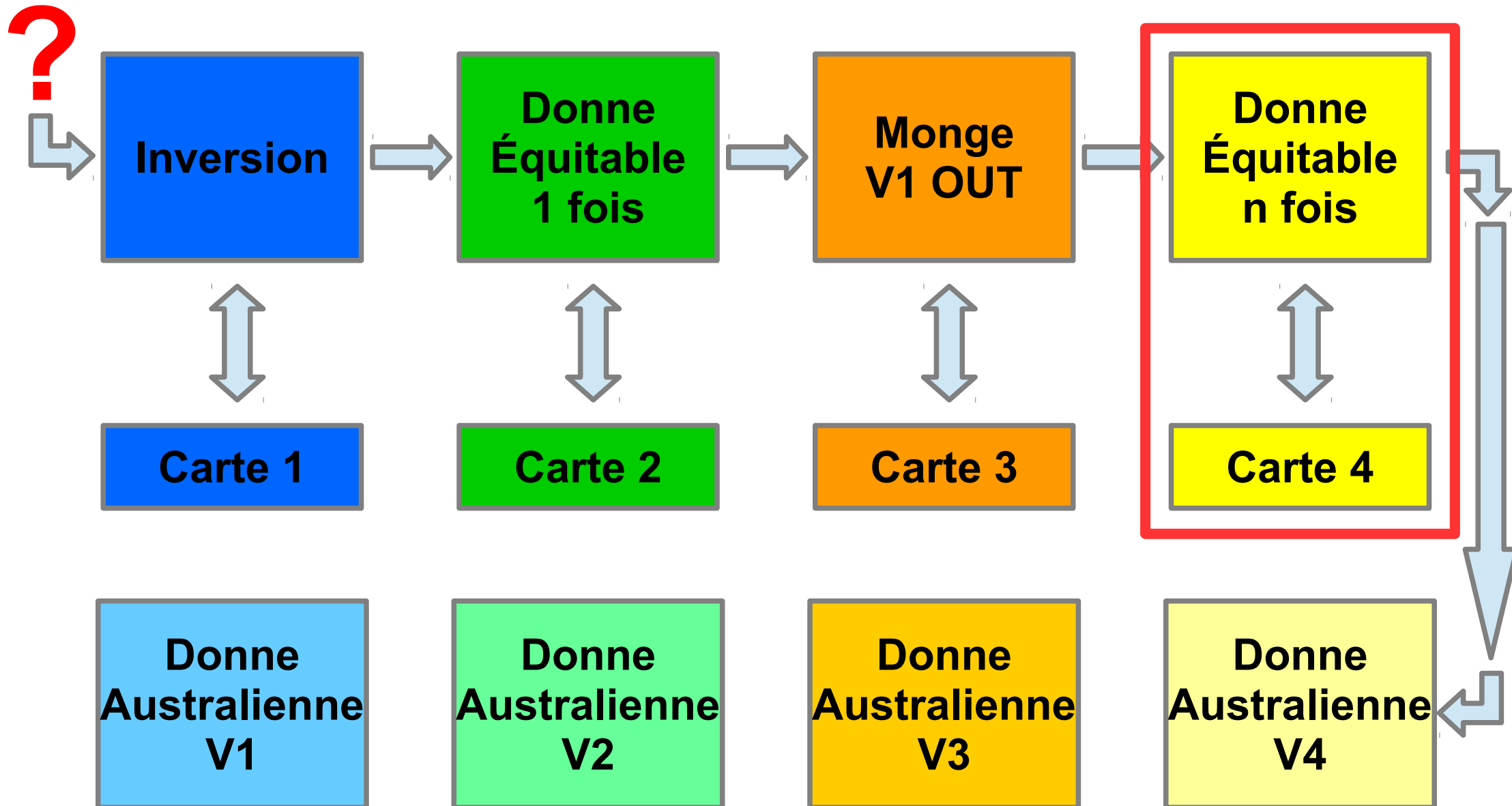
$$h_{OUT}(i) = \begin{cases} 2i-1 & \text{si } i \leq N/2 \\ 2N-2i & \text{si } i \geq N/2+1 \end{cases}$$
$$\equiv \pm (2i-1) \pmod{2N-1}$$

Les variantes se déduisent des deux mélanges précédents par retournements !

$$h_{IN} = r \circ h_1^{-1} \circ r$$
$$h_{OUT} = r \circ h_2^{-1} \circ r$$

Cartomagie – Tour des données MMI

Les explications



Donne équitable n fois

La manipulation

Tours de Magie - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)

Mélanges de cartes Codage/Cryptage

CASINO ROYAL

Paquet initial

52

Paquet mélangé : Donne équitable (n fois)

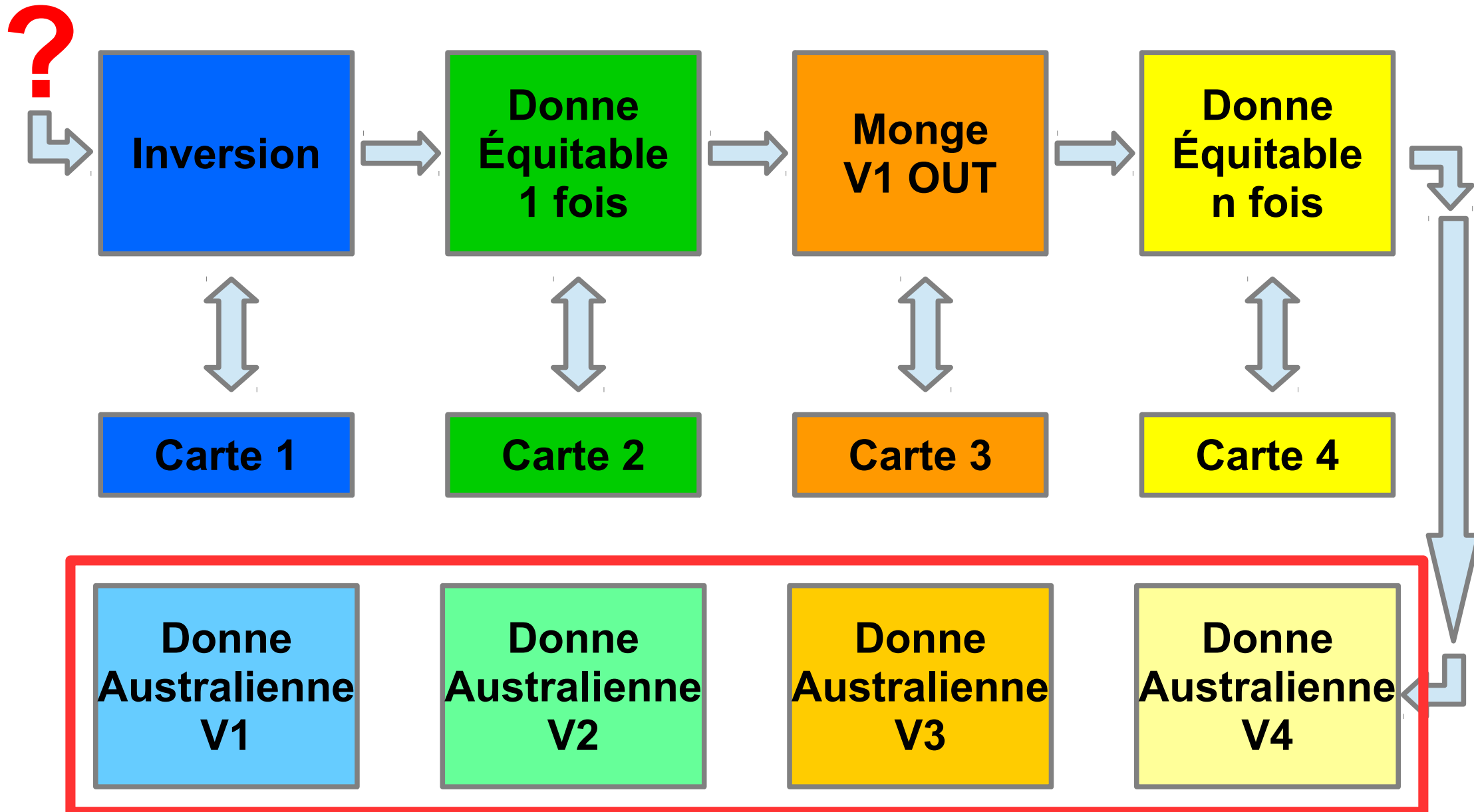
01



C'est une donne équitable et l'un des deux paquets est utilisé pour refaire une donne et ainsi de suite jusqu'à épuisement des cartes !

Cartomagie – Tour des données MMI

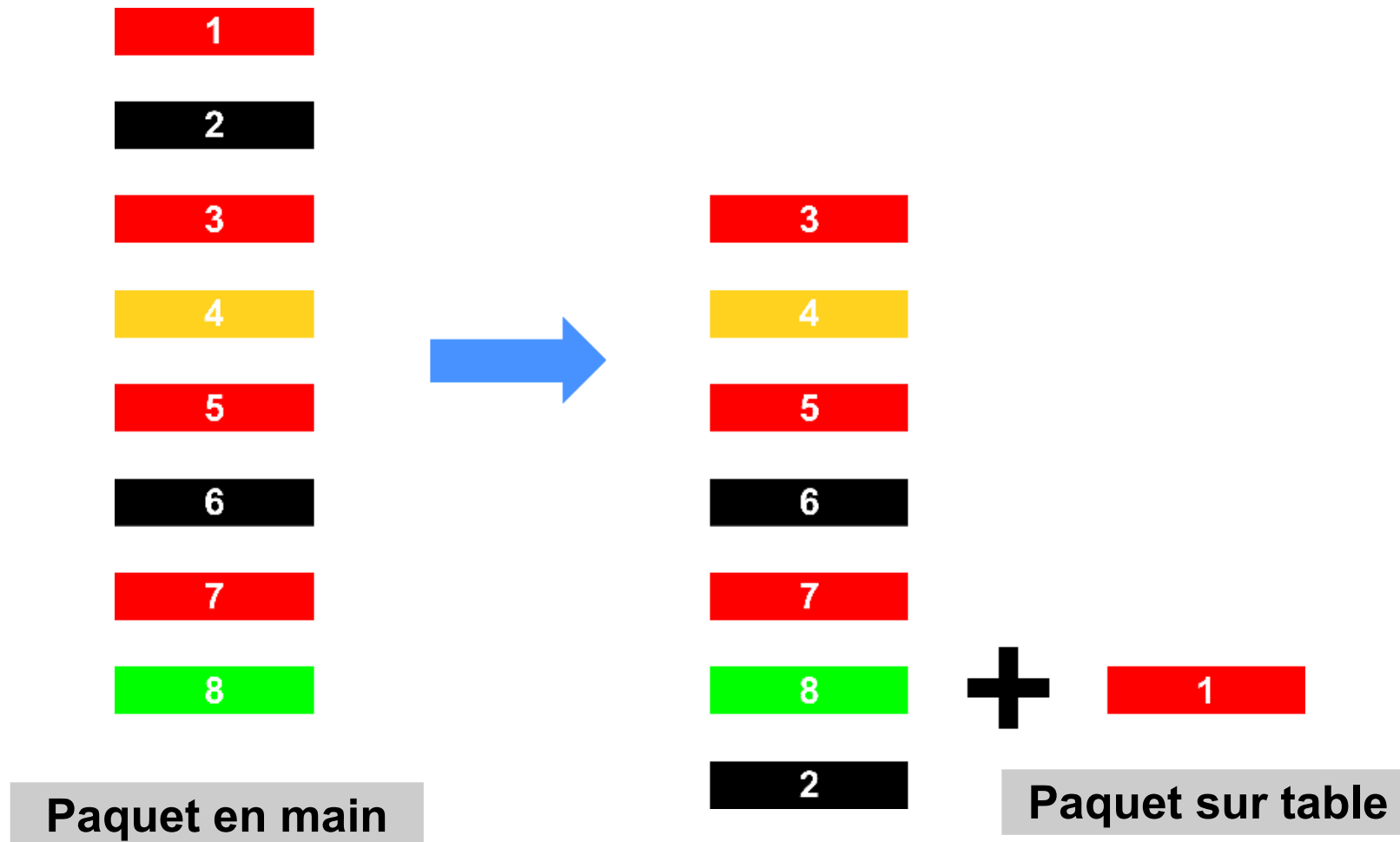
Les explications



Mélanges australien

Un mélange australien

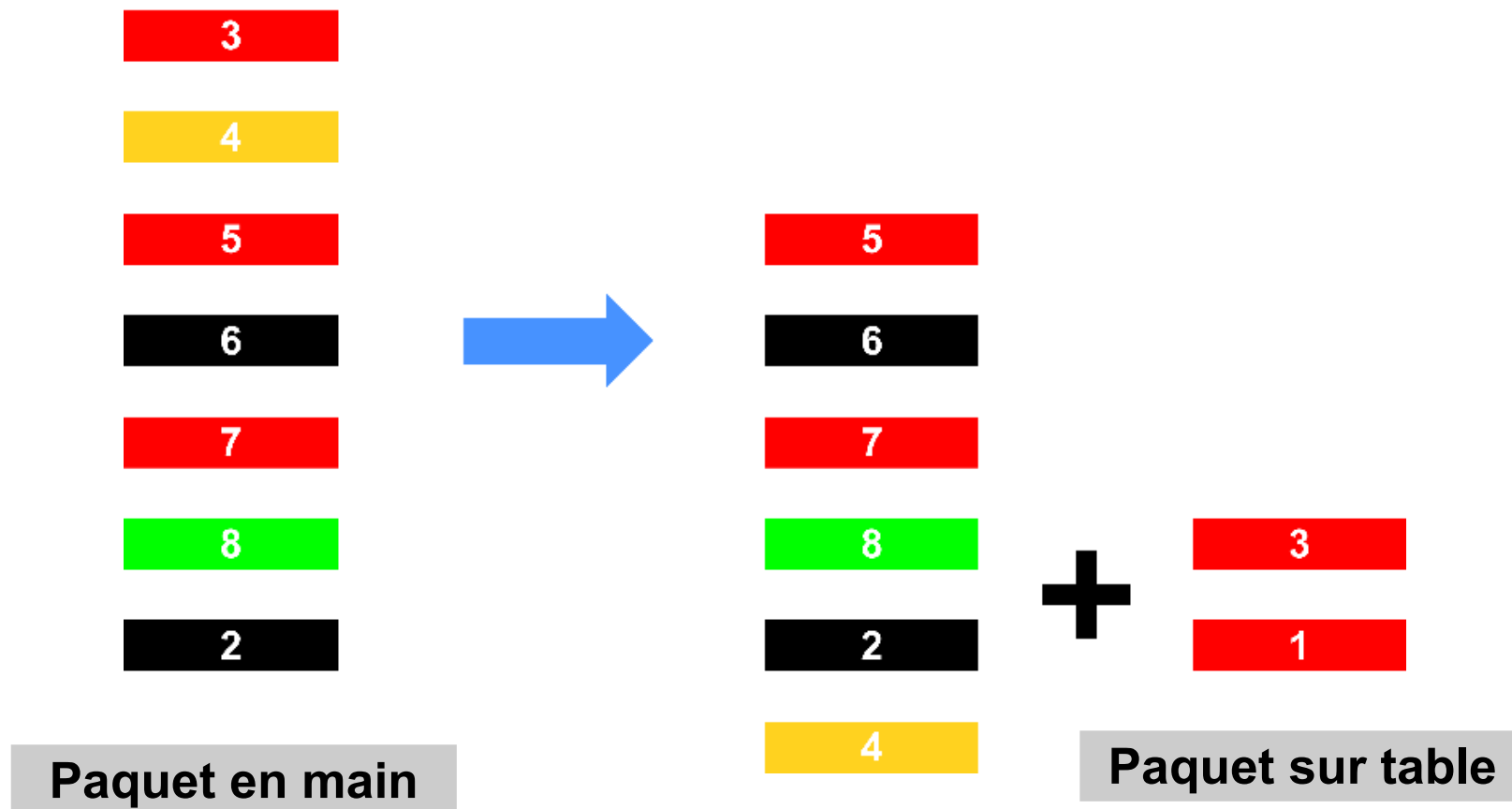
La manipulation



1^{re} étape : carte n° 1 sur table – carte n° 2 sous paquet

Un mélange australien

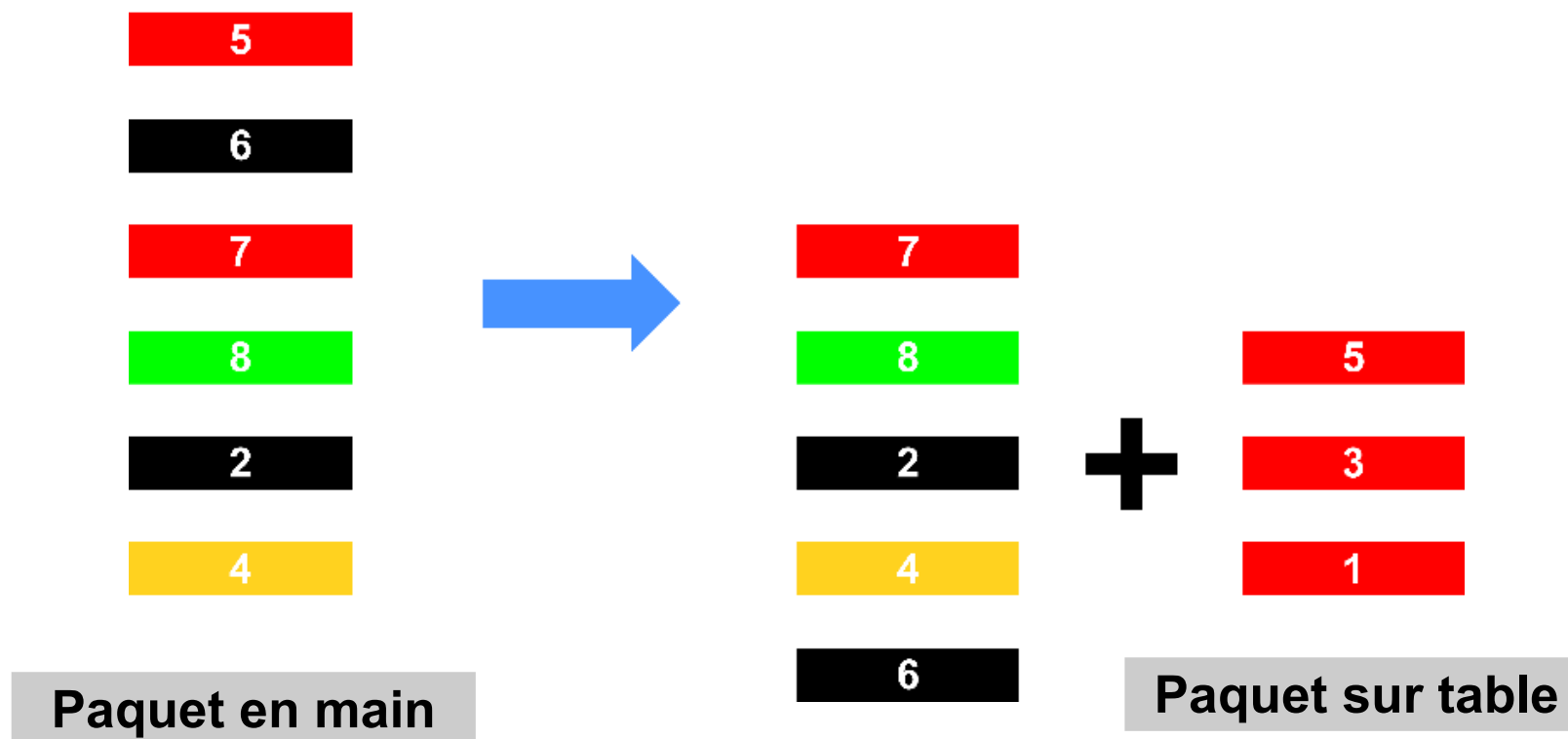
La manipulation



2^e étape : carte n° 3 sur table – carte n° 4 sous paquet

Un mélange australien

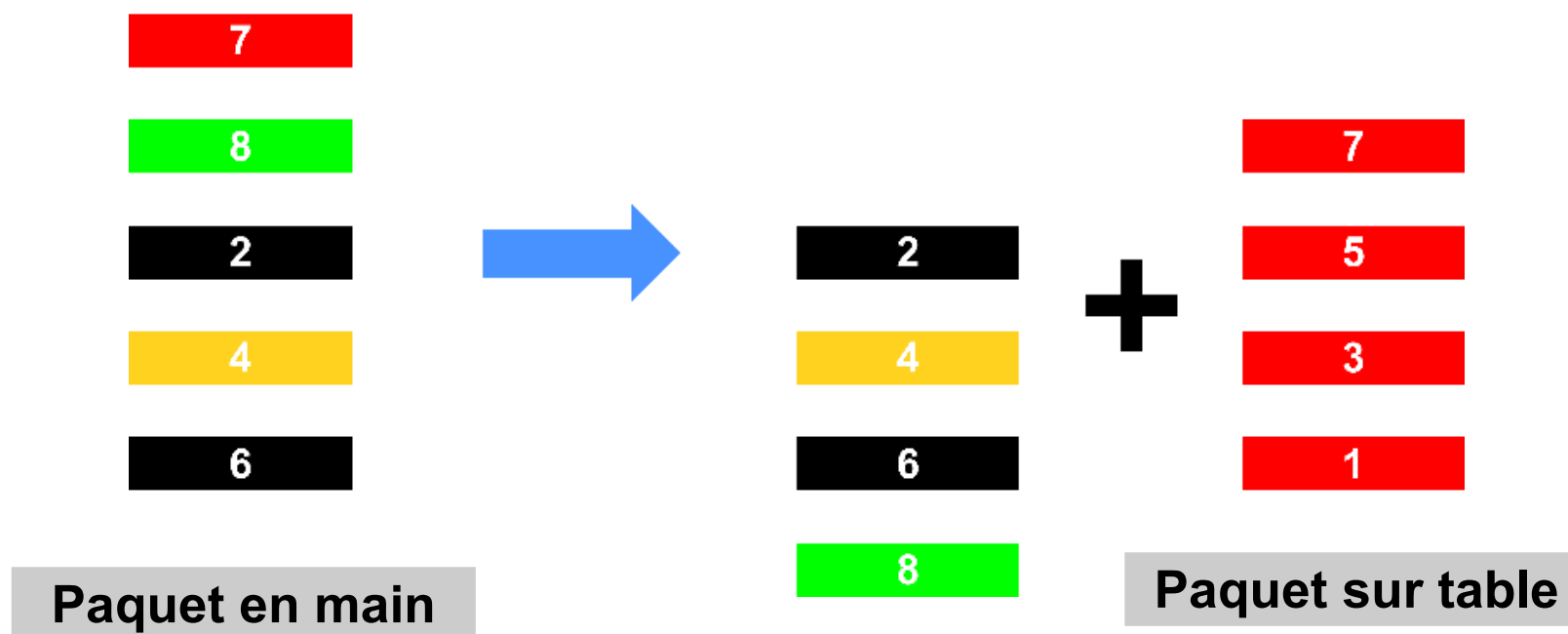
La manipulation



3^e étape : carte n° 5 sur table – carte n° 6 sous paquet

Un mélange australien

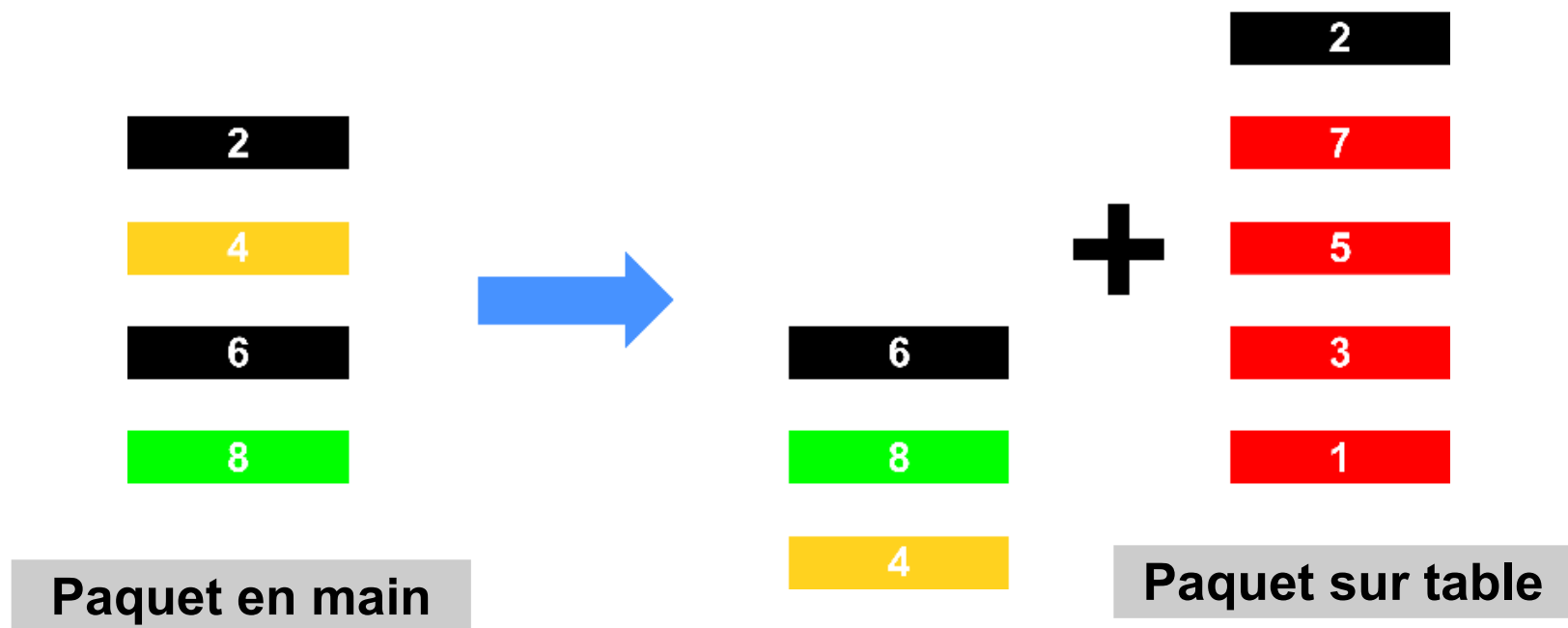
La manipulation



4^e étape : carte n° 7 sur table – carte n° 8 sous paquet

Un mélange australien

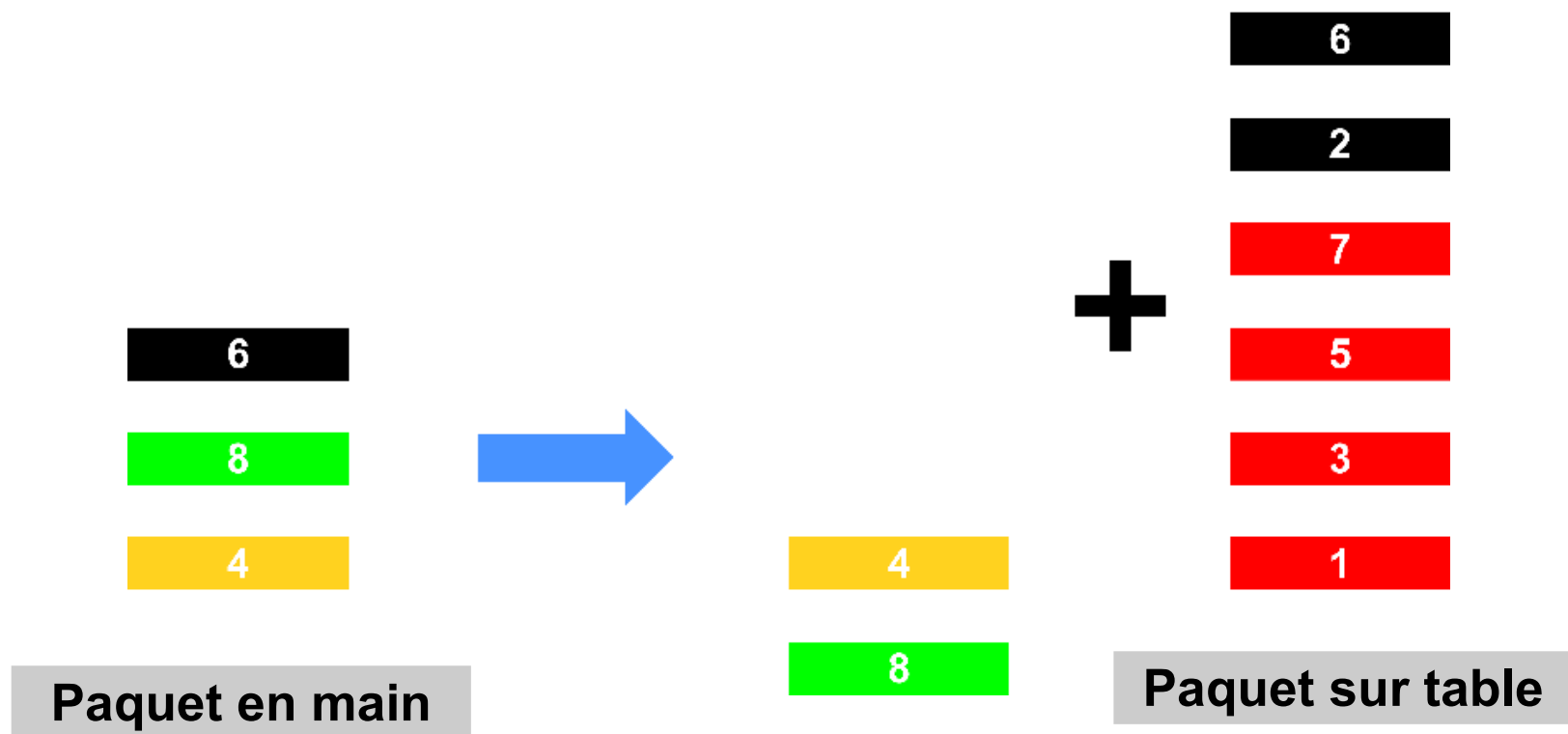
La manipulation



5^e étape : carte n° 2 sur table – carte n° 4 sous paquet

Un mélange australien

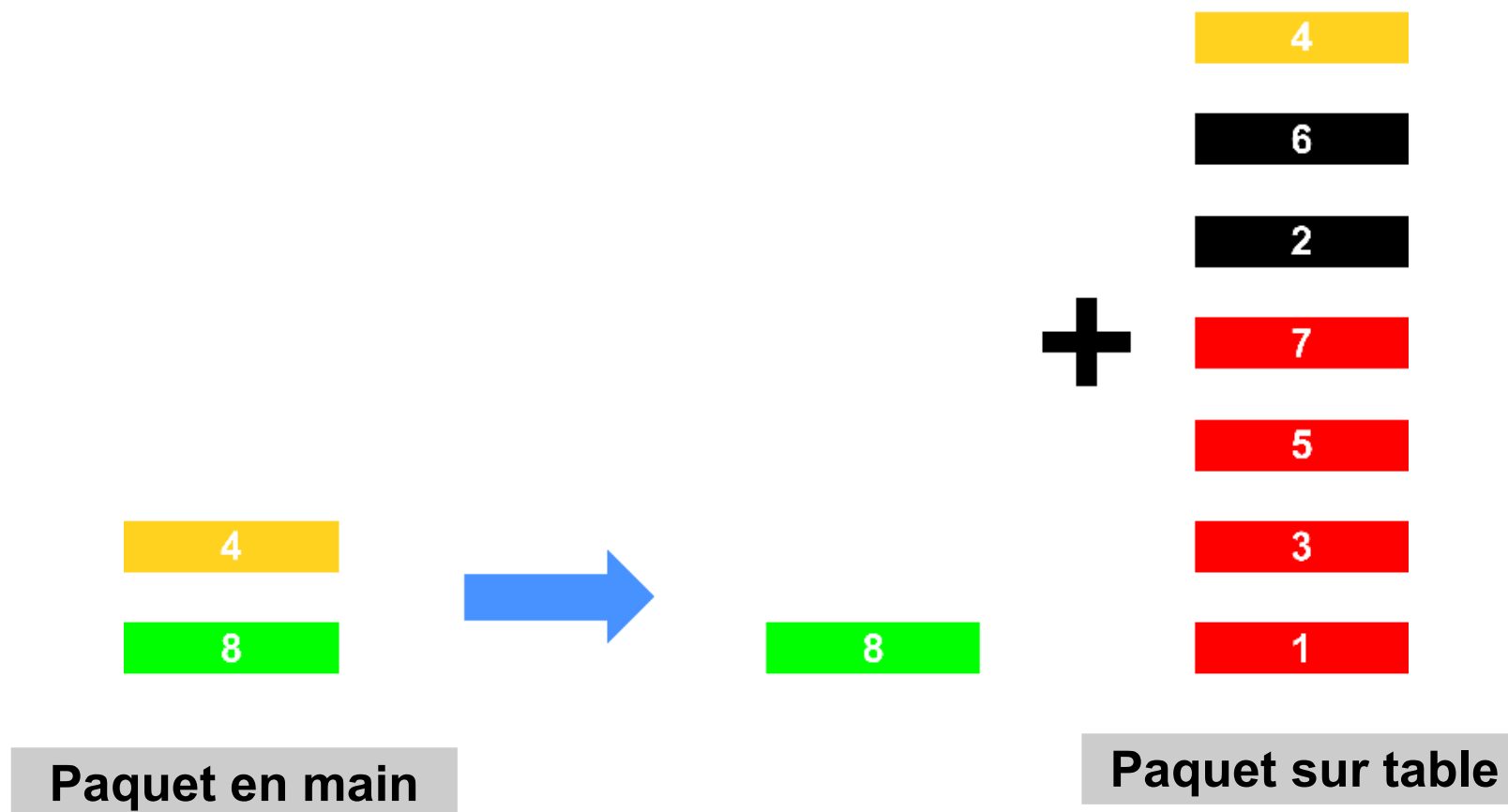
La manipulation



6^e étape : carte n° 6 sur table – carte n° 8 sous paquet

Un mélange australien

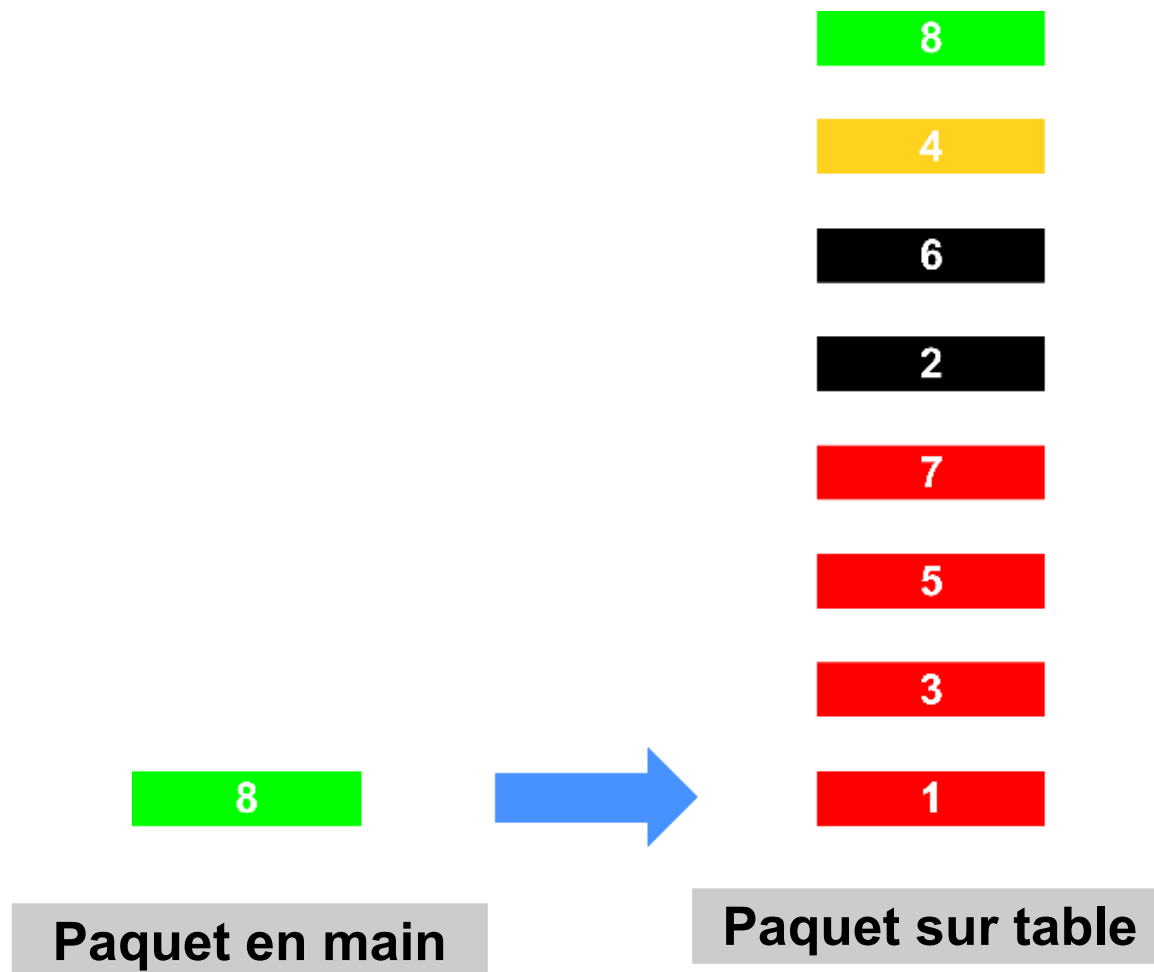
La manipulation



7^e étape : carte n° 4 sur table – carte n° 8 sous paquet

Un mélange australien

La manipulation



8^e étape : carte n° 8 sur table

Un mélange australien

La manipulation



Un mélange pour 8 cartes

Un mélange Australien

Le secret

position
avant mélange

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

↓ φ

position
après mélange

16 8 12 4 14 10 6 2 15 13 11 9 7 5 3 1

position
après mélange

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

↓ φ^{-1}

position
avant mélange

16 8 15 4 14 7 13 2 12 6 11 3 10 5 9 1

Pour 16 cartes...

Un mélange Australien

Le secret

position <i>avant</i> mélange	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
----------------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

↓ φ

position <i>après</i> mélange	16	8	12	4	14	10	6	2	15	13	11	9	7	5	3	1
----------------------------------	----	---	----	---	----	----	---	---	----	----	----	---	---	---	---	---

The diagram illustrates the recursive construction of a 16x16 Sierpinski triangle. The top row consists of 16 colored squares with numbers 16, 8, 12, 4, 14, 10, 6, 2, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1. Below this, a 2x2 grid of 4x4 blocks is shown, with the bottom-right block further subdivided into a 4x4 grid of 1x1 squares. The blocks are labeled 2x, 4x, 8x, and 16x, indicating their size relative to the smallest square.

Pour 16 cartes...

Un mélange australien

Le secret

Modélisation (16 cartes)

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = \varphi(i)$: position **après** mélange

$$\varphi(i) = \begin{cases} 33 - 2i & \text{pour } 9 \leq i \leq 16 \\ 34 - 4i & \text{pour } 5 \leq i \leq 8 \\ 36 - 8i & \text{pour } 3 \leq i \leq 4 \\ 40 - 16i & \text{pour } 2 \leq i \leq 2 \\ 16 & \text{pour } i = 1 \end{cases}$$

Un mélange australien

Le secret

position <i>après</i> mélange	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
----------------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

$\downarrow \varphi^{-1}$

position <i>avant</i> mélange	16	8	15	4	14	7	13	2	12	6	11	3	10	5	9	1
----------------------------------	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	---	---

16	–	15	–	14	–	13	–	12	–	11	–	10	–	9	–
	8	–	–	–	7	–	–	–	6	–	–	–	5	–	–
		4	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–
			2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
															1

Pour 16 cartes...

Un mélange australien

Le secret

Modélisation (16 cartes)

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = \varphi(i)$: position **après** mélange

$$\varphi^{-1}(j) = \begin{cases} (33-j)/2 & \text{pour } j = 1, 3, 5, 7, 9, \\ & 11, 13, 15 \\ (34-j)/4 & \text{pour } j = 2, 6, 10, 14 \\ (36-j)/8 & \text{pour } j = 4, 12 \\ (40-j)/16 & \text{pour } j = 8 \\ 1 & \text{pour } j = 16 \end{cases}$$

Un mélange australien

Le secret

Modélisation (N cartes)

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = \varphi(i)$: position **après** mélange

Pour un jeu de $N = 2^p$ cartes numérotées de 1 à N :

$$\varphi(i) = \begin{cases} N \left[2 - (2i - 1) / 2^{1 + E(\log_2 i)} \right] & \text{pour } i \neq 2^k \\ N/i & \text{pour } i = 2^k \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(j) = (2N + 2^k - j) / 2^{k+1} \quad \text{pour } j = 2^k(2l - 1)$$

Un mélange australien

Le secret

Modélisation (N cartes)

i : position **avant** mélange $\leftrightarrow j = \varphi(i)$: position **après** mélange

En binaire

Pour un jeu de $N = 2^p$ cartes numérotées de 0 à $N-1$:

Pour $i = (i_{p-1} i_{p-2} \dots i_1 i_0)_2$ (écriture binaire)

où les $i_l \in \{0, 1\}$ sont les bits de i et en posant $i_l^c = 1 - i_l$

et k tel que $2^k \leq i < 2^{k+1}$

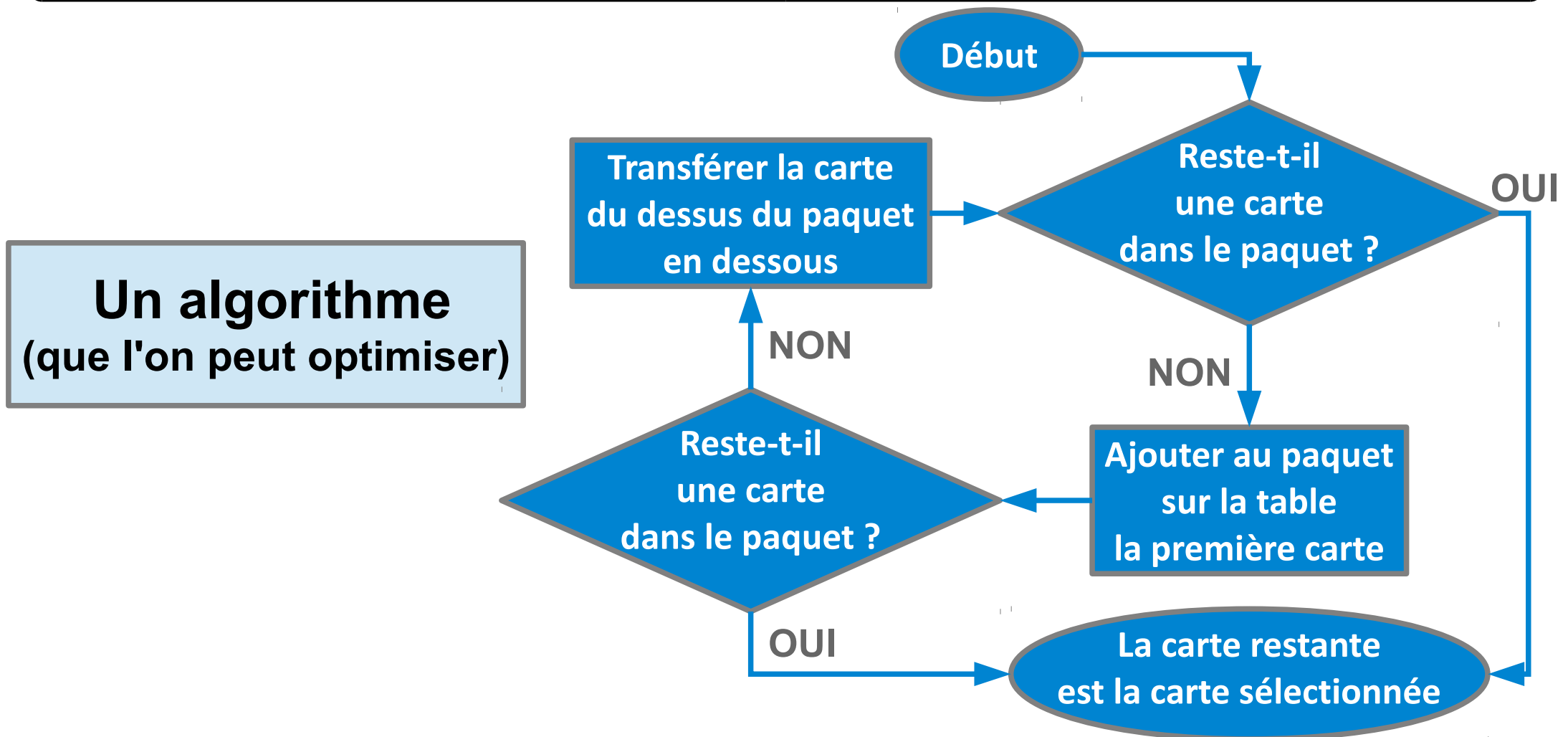
et donc $i_{p-1} = i_{p-2} = \dots = i_{k+1} = 0, i_k = 1$

$$\varphi(i) = (i_{k-1}^c i_{k-2}^c \dots i_1^c i_0^c i_k^c i_{k+1}^c \dots i_{p-2}^c i_{p-1}^c)_2$$

Un mélange australien

Le secret

On a une formule analogue pour un jeu de N cartes lorsque N n'est pas une *puissance de 2*...



Mélanges australiens

Diverses variantes

**Donne
Australienne
V1**

La 1^{re} carte
est prise
sur le paquet
et déposée
sur la table
—
La 2^e carte
est placée
sous le paquet
en main
—
Etc.

**Donne
Australienne
V2**

La 1^{re} carte
est prise
sur le paquet
et placée
sous le paquet
en main
—
La 2^e carte
est déposée
sur la table
—
Etc.

**Donne
Australienne
V3**

La 1^{re} carte
est prise
sous le paquet
et placée
sur le paquet
en main
—
La 2^e carte
est déposée
sur la table
—
Etc.

**Donne
Australienne
V4**

La 1^{re} carte
est prise
sous le paquet
et déposée
sur la table
—
La 2^e carte
est placée
sur le paquet
en main
—
Etc.

Mélanges australiens

Lien avec la donne équitable n fois

position
avant mélange

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

en main

position
après mélange V1

2 4 6 8 10 12 14 16

en main

15 13 11 9 7 5 3 1

sur table

position
après mélange V4

2 6 10 14

en main

4 8 12 16

sur table

position
après mélange V1

14 6

en main

10 2

sur table

position
après mélange V4

14

en main

6

sur table

14

sur table

position
après mélange

14 6 10 2 4 8 12 16 15 13 11 9 7 5 3 1

*Après succession de plusieurs
« 1/2-mélanges australiens » V1/V4,
on trouve
une donne équitable n fois !*

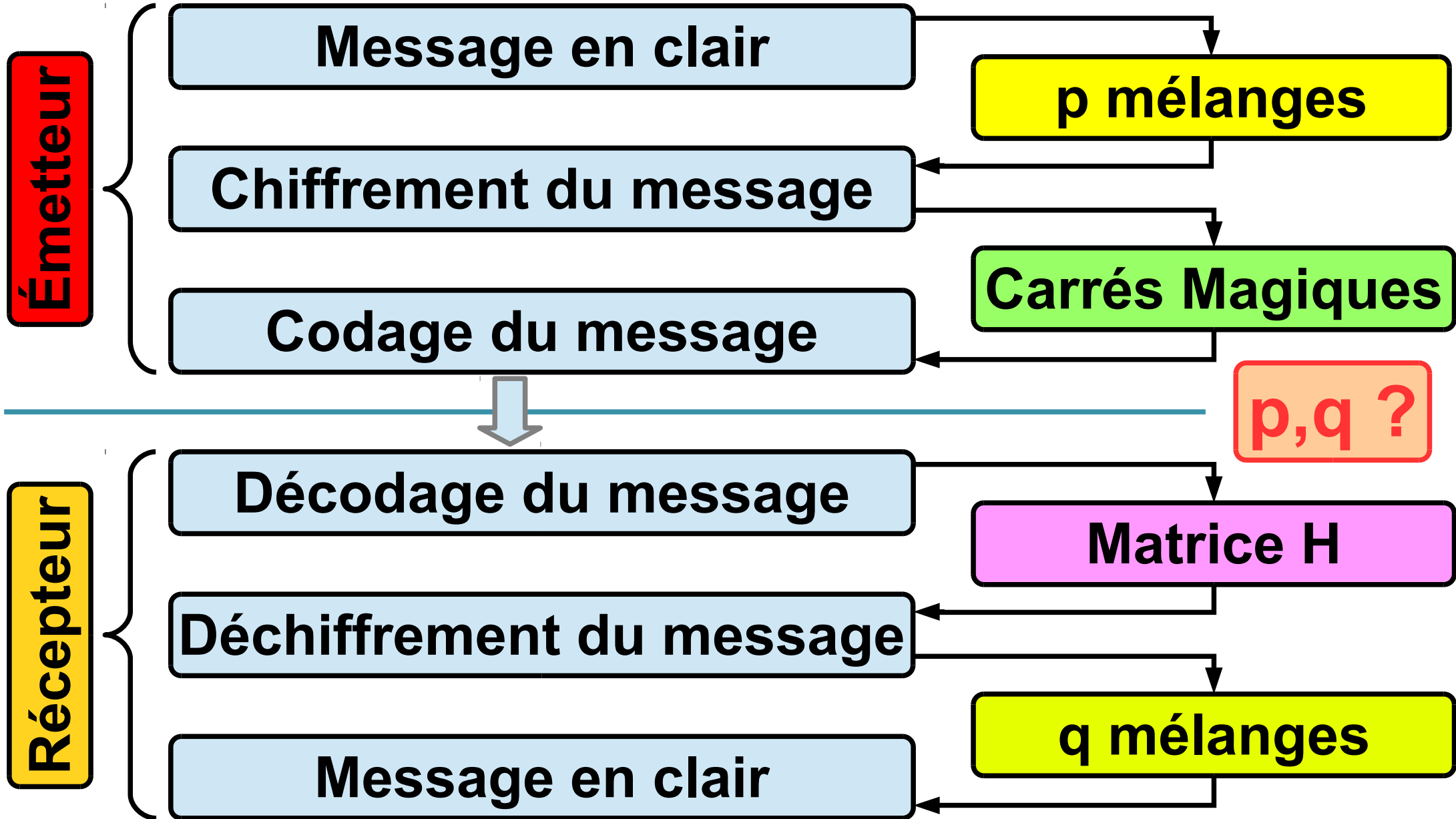
Pour 16 cartes...

III

Mélanges itérés...

Mélanges itérés

Une application : cryptographie



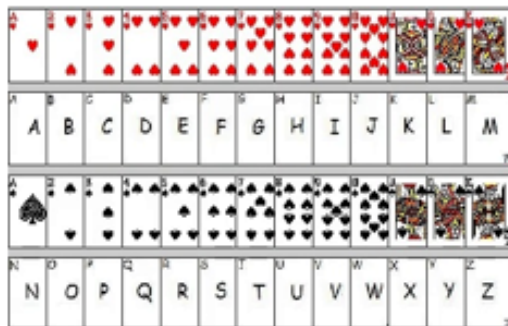
Mélanges Faros itérés

Une application : cryptographie

Concept général

Message
à envoyer

Encodage

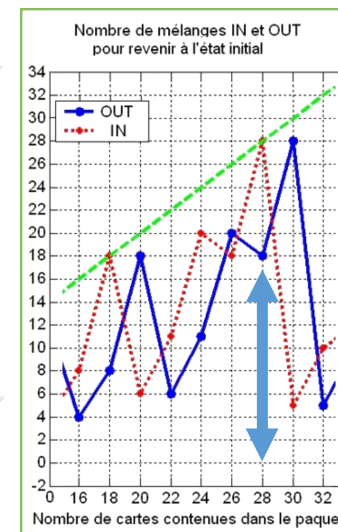


Message
reçu

Décodage



Chiffrement



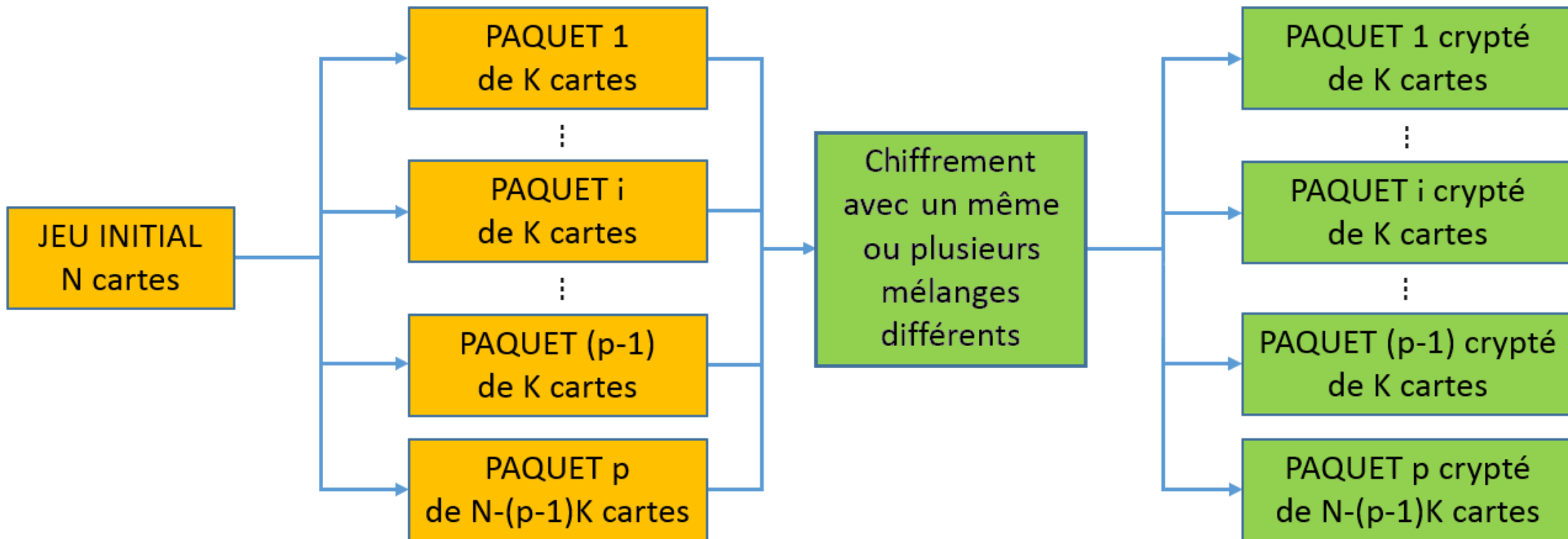
Déchiffrement



Mélanges Faros itérés

Une application : cryptographie

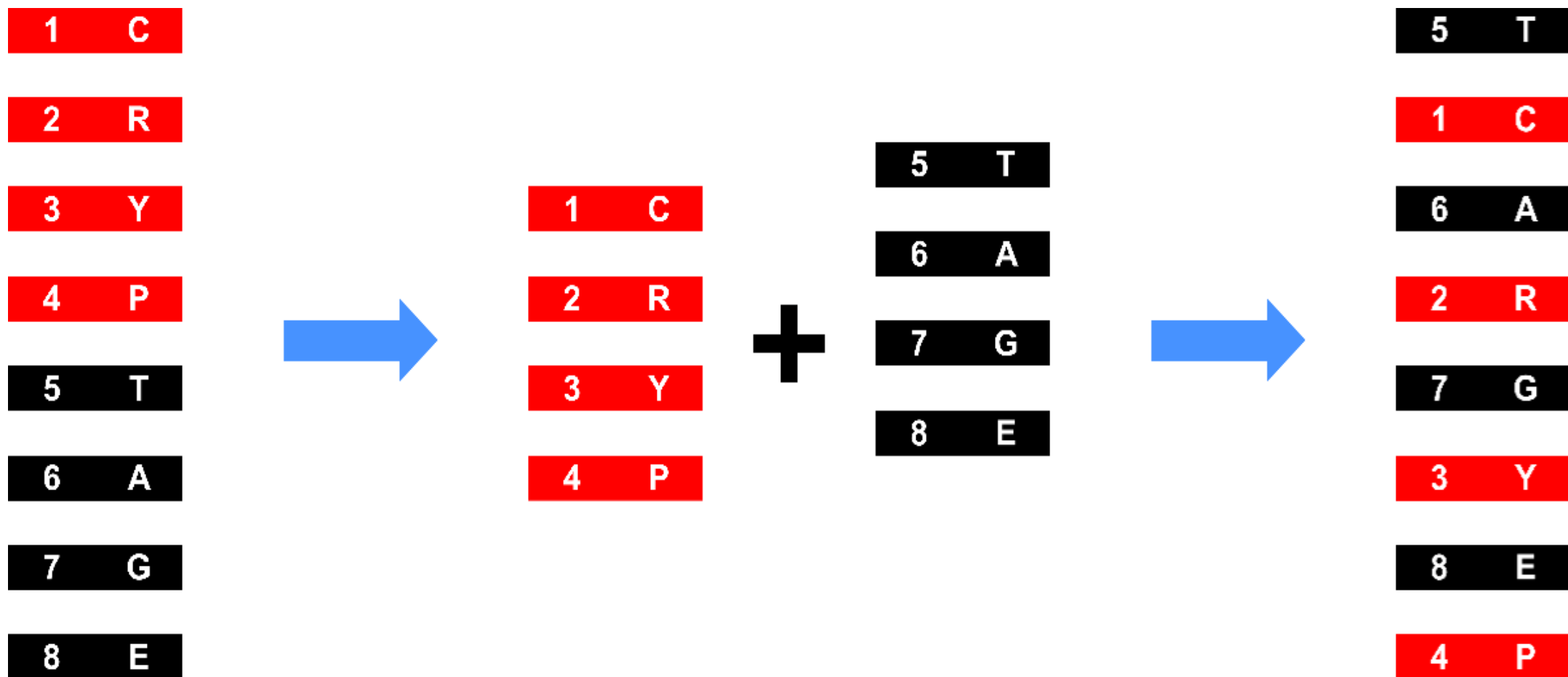
Concept général



Pour être plus réaliste, il suffit de partager une clé secrète entre l'émetteur et le récepteur qui définit le nombre de sous-paquets qui seront chiffrés puis réassemblés

Mélanges Faros itérés (IN)

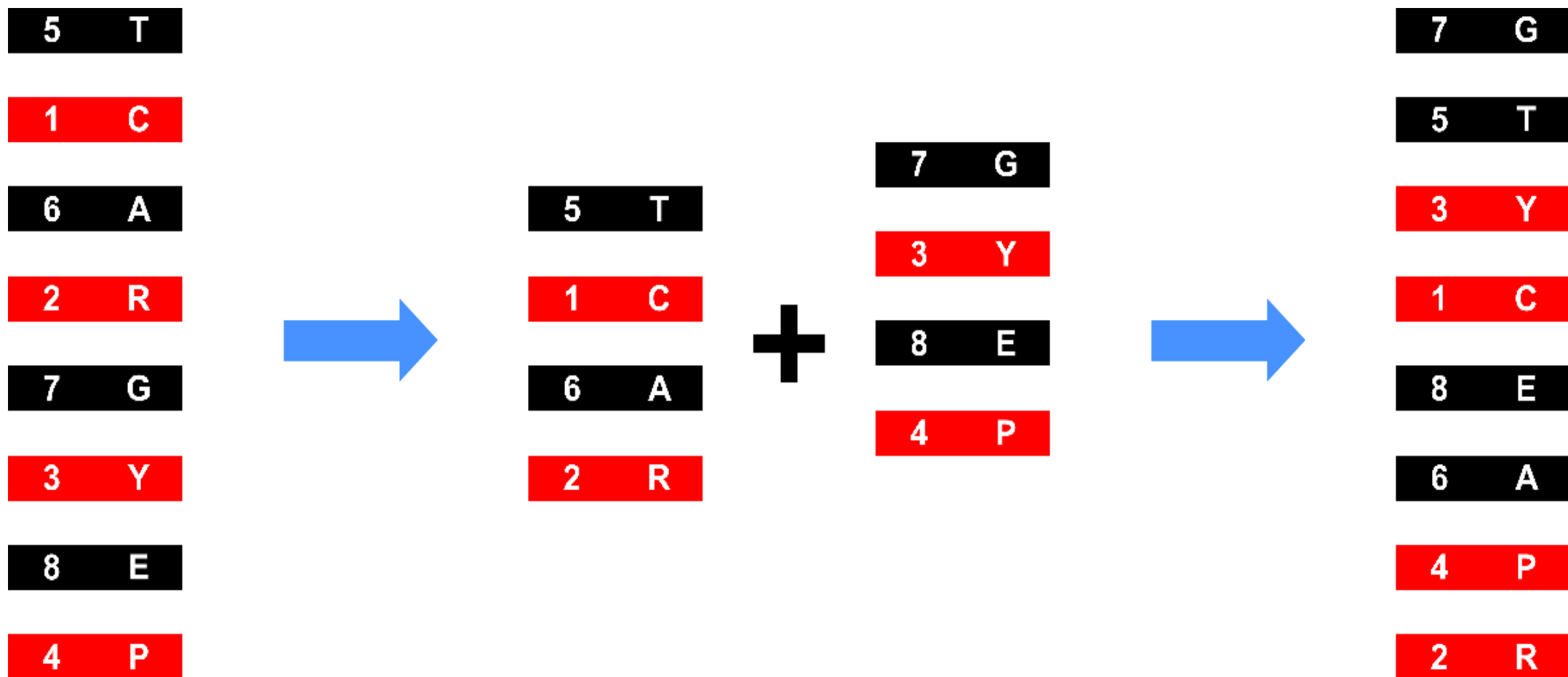
La manipulation



1^{er} mélange : carte n° 1 → position n° 2

Mélanges Faros itérés (IN)

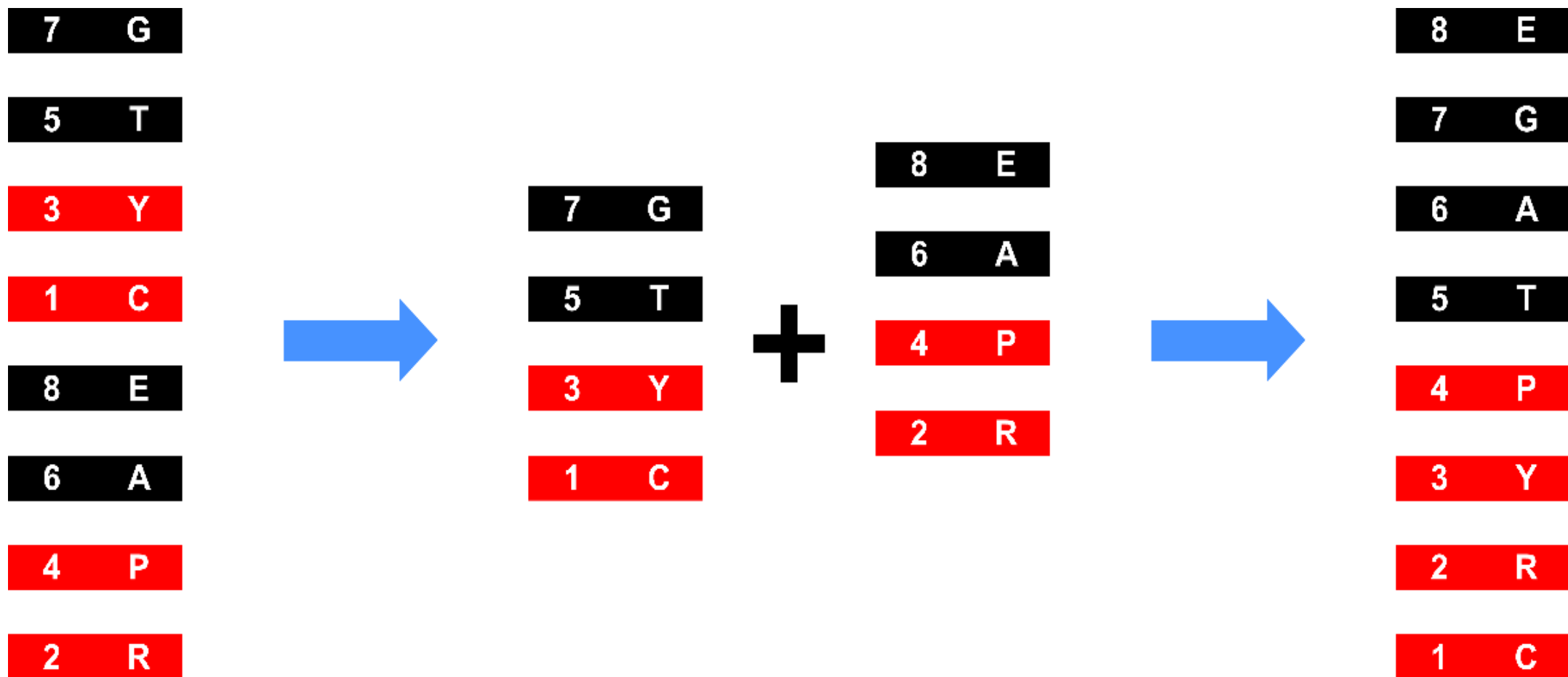
La manipulation



2^e mélange : carte n° 1 → position n° 4

Mélanges Faros itérés (IN)

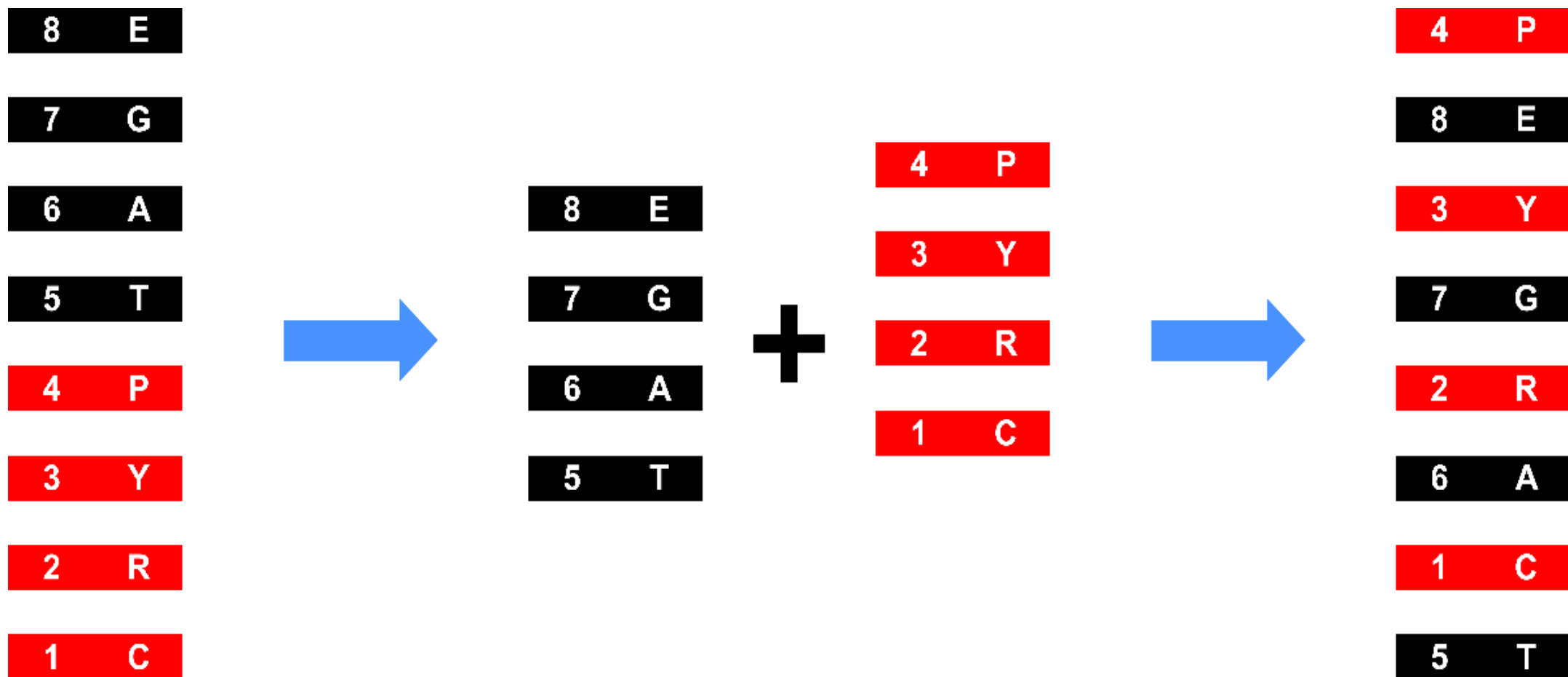
La manipulation



3^e mélange : carte n° 1 → position n° 8

Mélanges Faros itérés (IN)

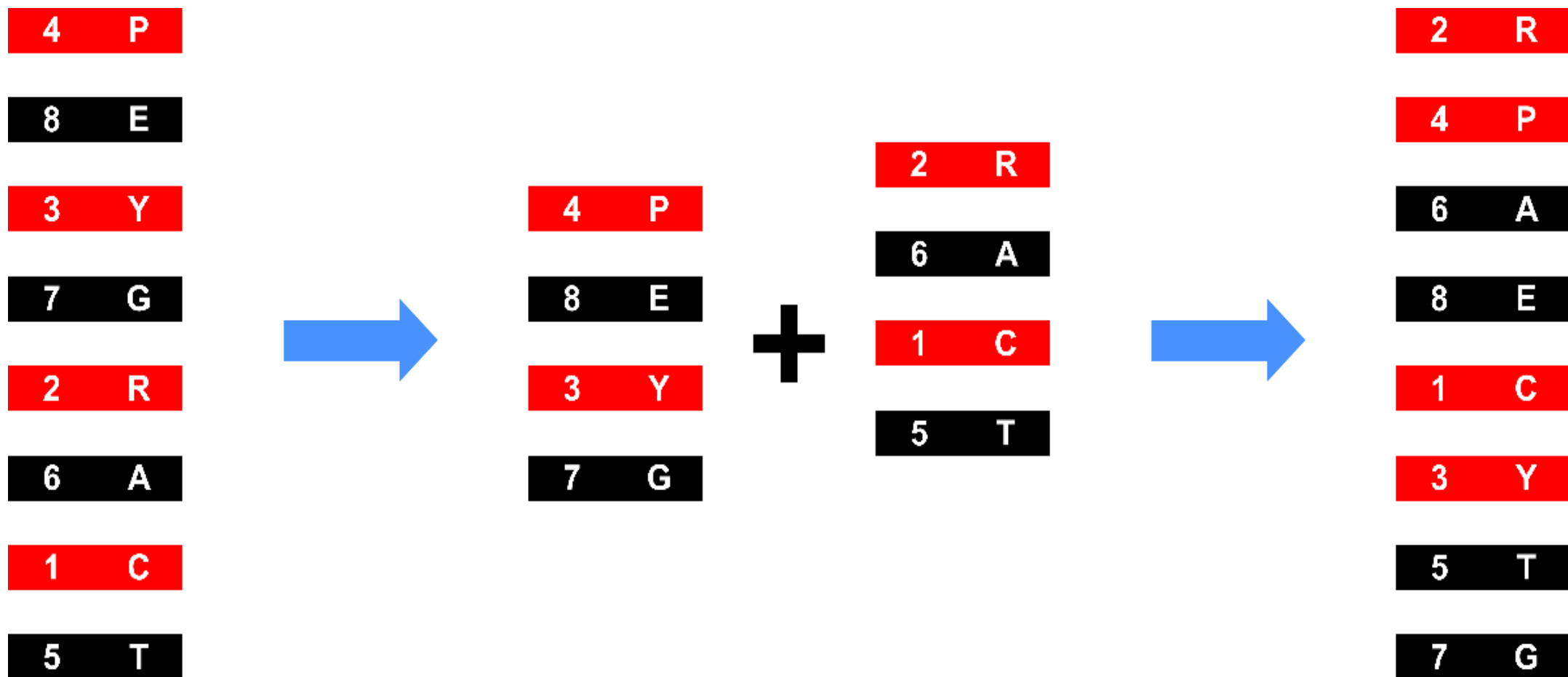
La manipulation



4^e mélange : carte n° 1 $\rightarrow$ position n° $16 \equiv 7 \pmod{9}$

Mélanges Faros itérés (IN)

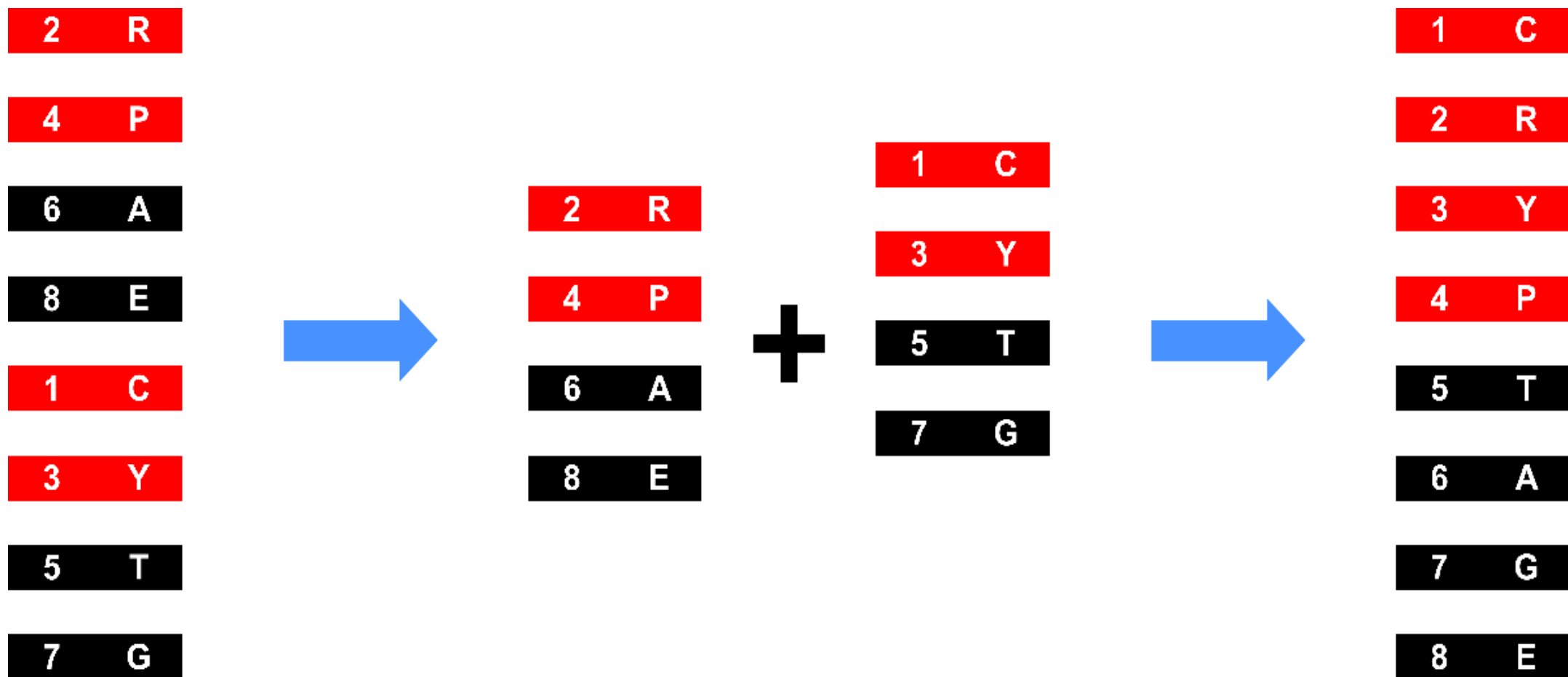
La manipulation



5^e mélange : carte n° 1 $\rightarrow$ position n° $32 \equiv 5 \pmod{9}$

Mélanges Faros itérés (IN)

La manipulation



6^e mélange : carte n° 1 $\rightarrow$ position n° 64 $\equiv$ 1 [mod 9]

Mélanges Faros itérés (IN)

Le secret

Le secret : une *période*...

$$2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow f^6 = id$$

Au passage, une *demi-période*...

$$f^{-1} = f^5 \text{ et } f^3(i) = 9 - i$$

Anti-Faro

3^e mélange : jeu *inversé*

Mélanges Faros itérés

Le secret

Théorème : pour un jeu de 2^p cartes,

- $2p$ mélanges Faros **IN** ramènent le jeu à son ordre **initial** ;
- p mélanges Faros **IN** emmènent le jeu dans un ordre **inversé** ;
- p mélanges Faros **OUT** ramènent le jeu à son ordre **initial**.



Exemple : pour un jeu de **32** cartes,
10 mélanges Faros **IN** ou **5** Faros **OUT**
ramènent le jeu à son ordre **initial**.

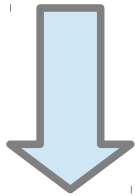
Mélanges Faros itérés

Généralisation et application à la cryptographie

Un jeu de n (pair) cartes revient à sa position **initiale** après r mélanges Faro avec $2^r \equiv 1 \pmod{n+1}$.

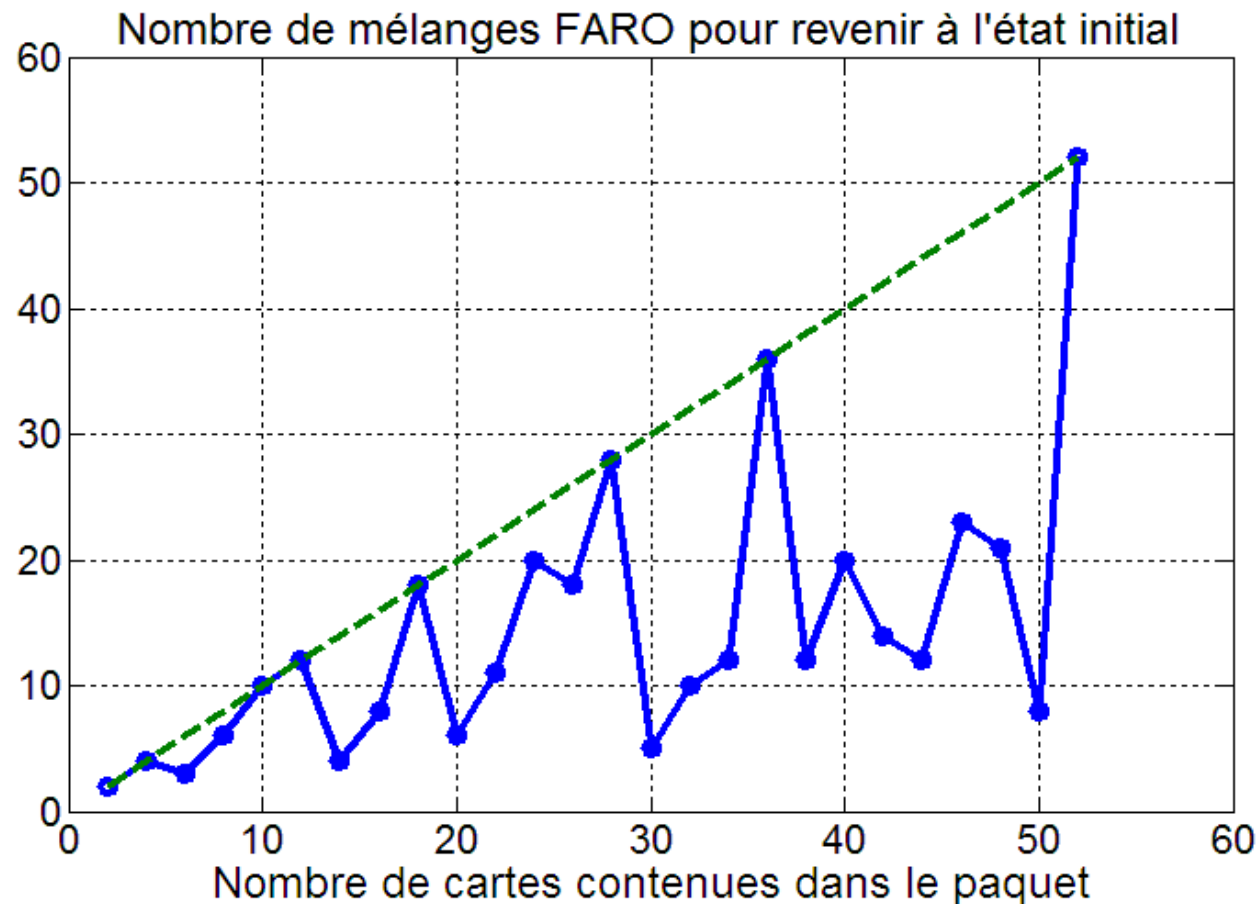
Pour le chiffrement

- Si r est pair, on chiffre avec $p = r/2$ mélanges.
- Si r est impair, on chiffre avec $p = (r+1)/2$ mélanges.



Pour le déchiffrement

- Si r est pair, on déchiffre avec $q = r - p = r/2$ mélanges.
- Si r est impair, on déchiffre avec $q = r - p = (r-1)/2$ mélanges.



Mélanges australiens itérés

La manipulation



1^{er} mélange

Mélanges australiens itérés

La manipulation



2^e mélange

Mélanges australiens itérés

La manipulation



3^e mélange

Mélanges australiens itérés

La manipulation



4^e mélange : retour à la configuration initiale

Mélanges australiens itérés

Le secret

Évolution des cartes : *orbites*

<i>jeu initial</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1 ^{er} mélange	16	8	12	4	14	10	6	2	15	13	11	9	7	5	3	1
2 ^e mélange	1	2	9	4	5	13	10	8	3	7	11	15	6	14	12	16
3 ^e mélange	16	8	15	4	14	7	13	2	12	6	11	3	10	5	9	1
4 ^e mélange	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Pour 16 cartes...

Mélanges australiens itérés

Un problème ouvert ?

Problème ouvert :
Quel est le nombre
de mélanges australiens
nécessaires pour ramener
un jeu à son ordre initial ?

Exemples :
 $N = 2^p$ pour p de 1 à 19

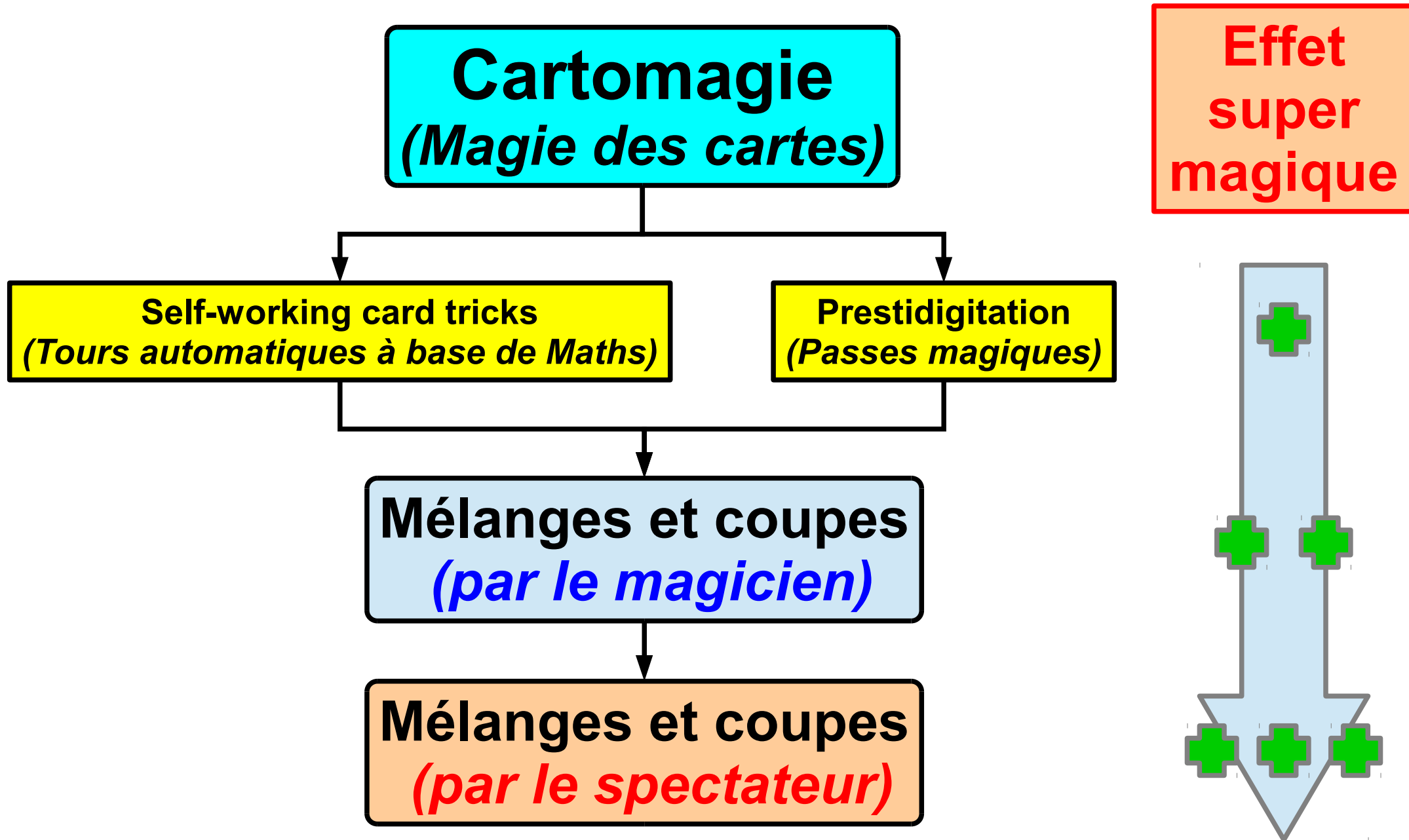
p	$N=2^p$	période	décomposition
1	2	2 =	2
2	4	2	
3	8	4 =	2^2
4	16	4	
5	32	12 =	$2^2 \times 3$
6	64	12	
7	128	24 =	$2^3 \times 3$
8	256	24	
9	512	120 =	$2^3 \times 3 \times 5$
10	1024	120	
11	2048	120	
12	4096	120	
13	8192	840 =	$2^3 \times 3 \times 5 \times 7$
14	16384	840	
15	32768	1680 =	$2^4 \times 3 \times 5 \times 7$
16	65536	1680	
17	131072	5040 =	$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$
18	262144	5040	
19	524288	5040	

IV

Des coupes...

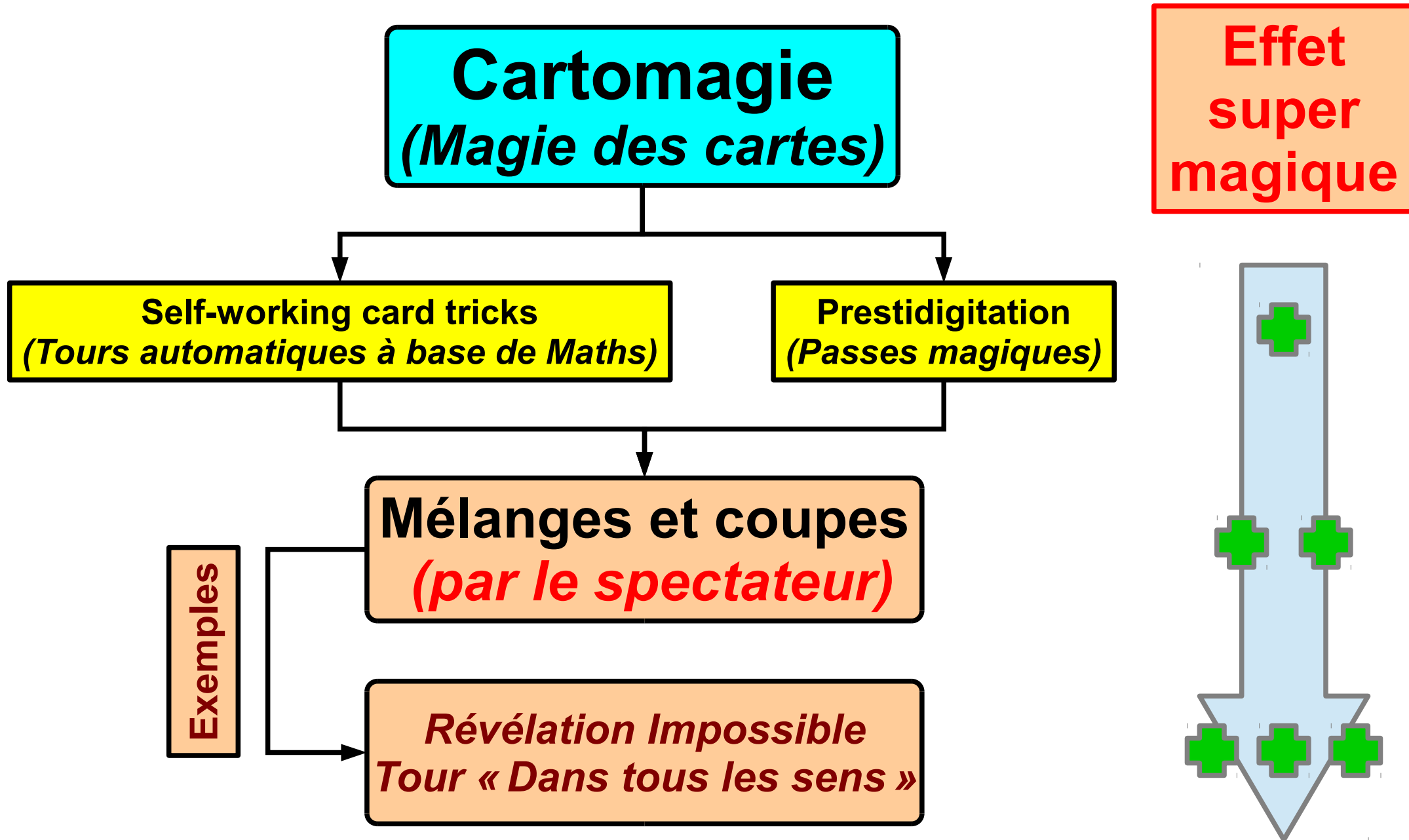
Cartomagie

Le principe



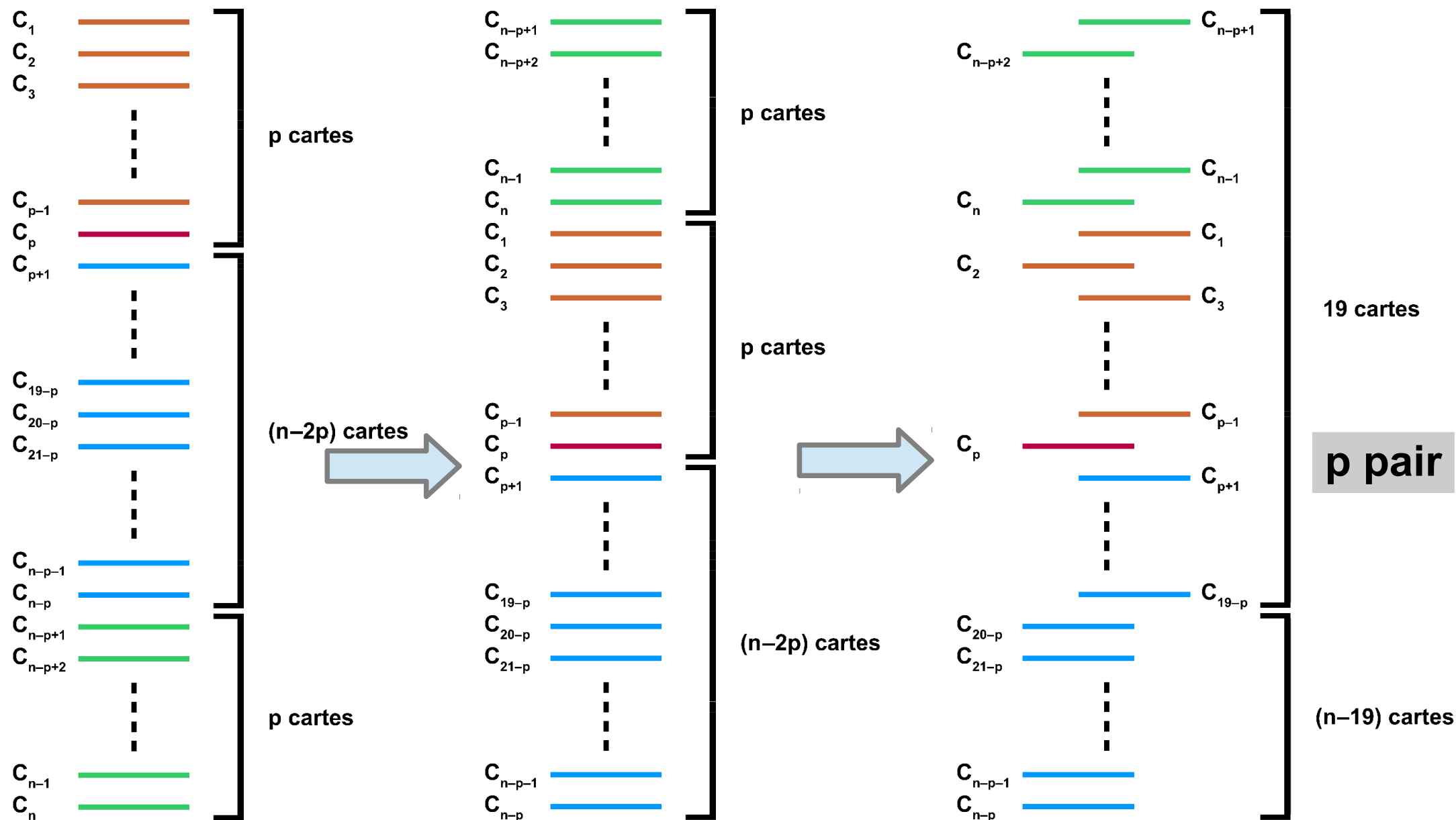
Cartomagie

Le principe



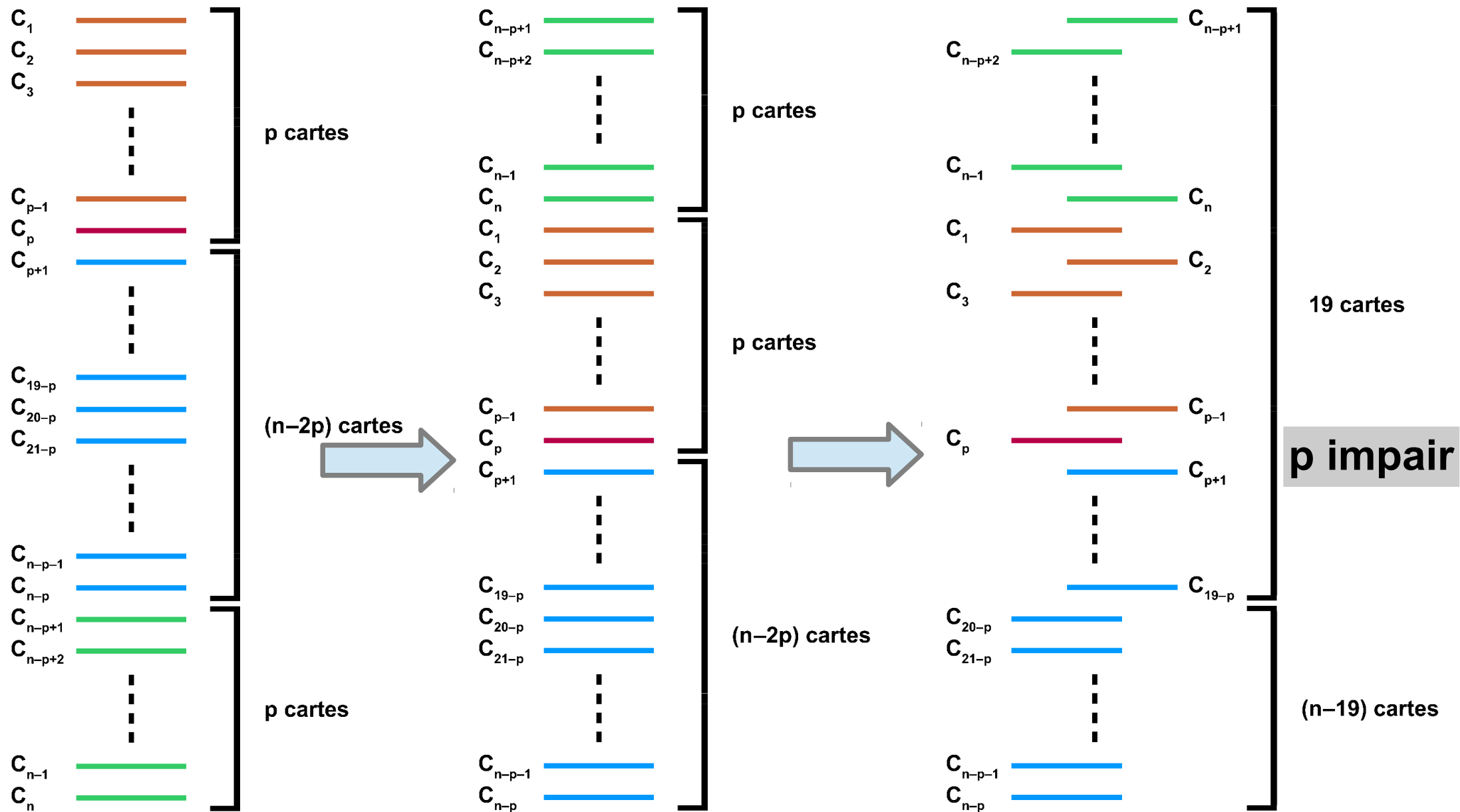
Cartomagie – Révélation impossible

Le secret



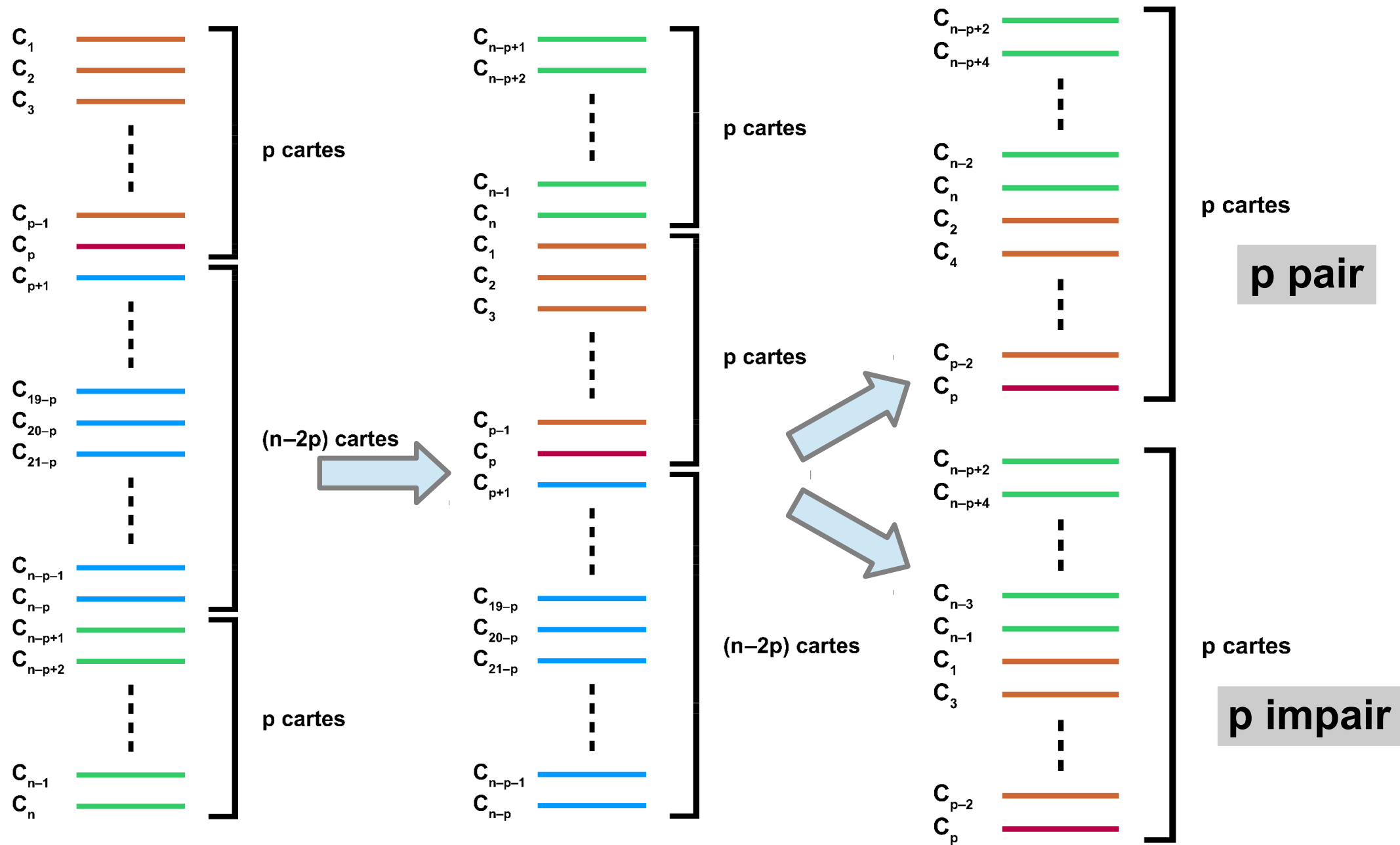
Cartomagie – Révélation impossible

Le secret



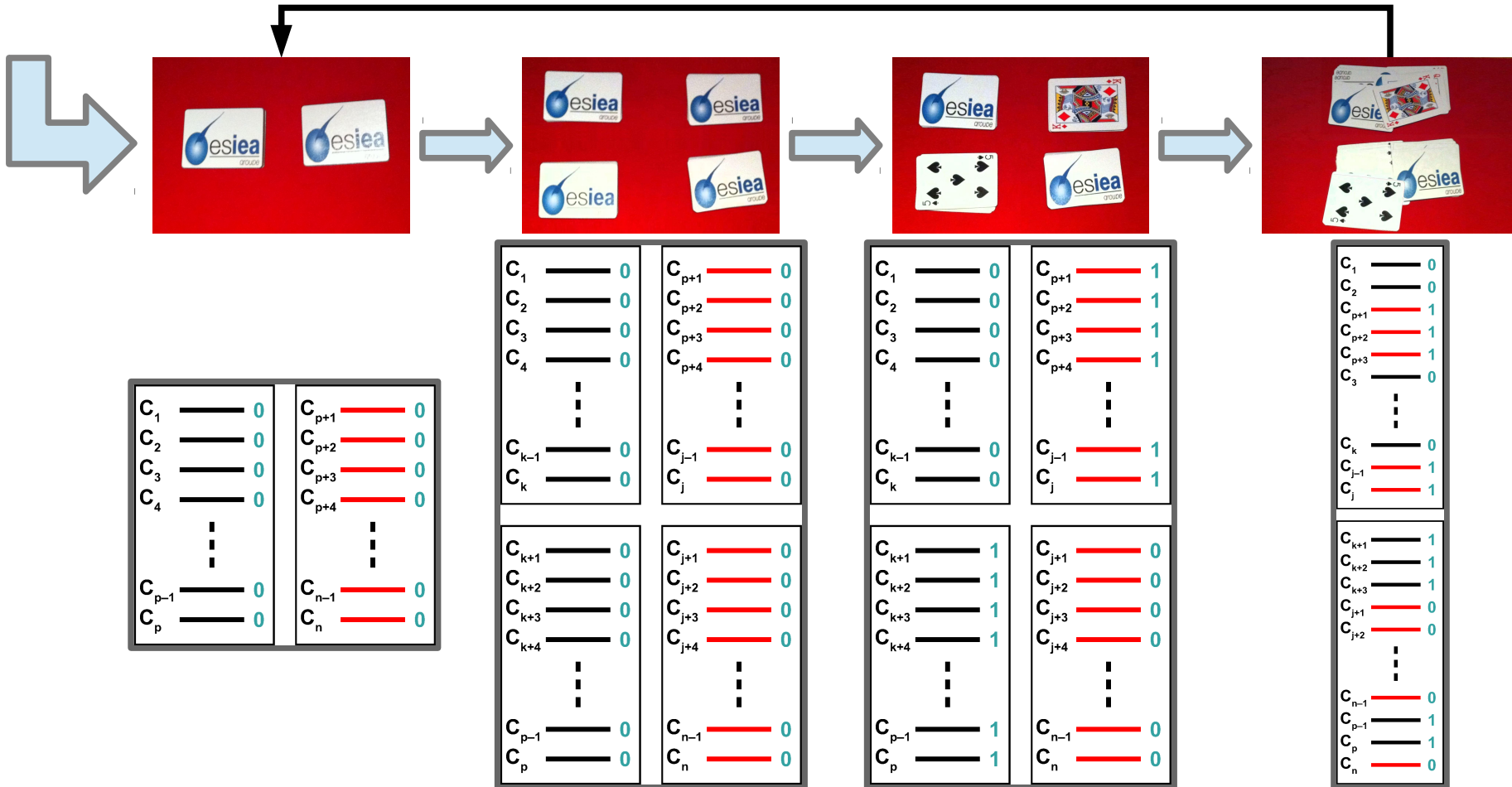
Cartomagie – Révélation impossible

Le secret



Cartomagie – Dans tous les sens

Le secret 1/2

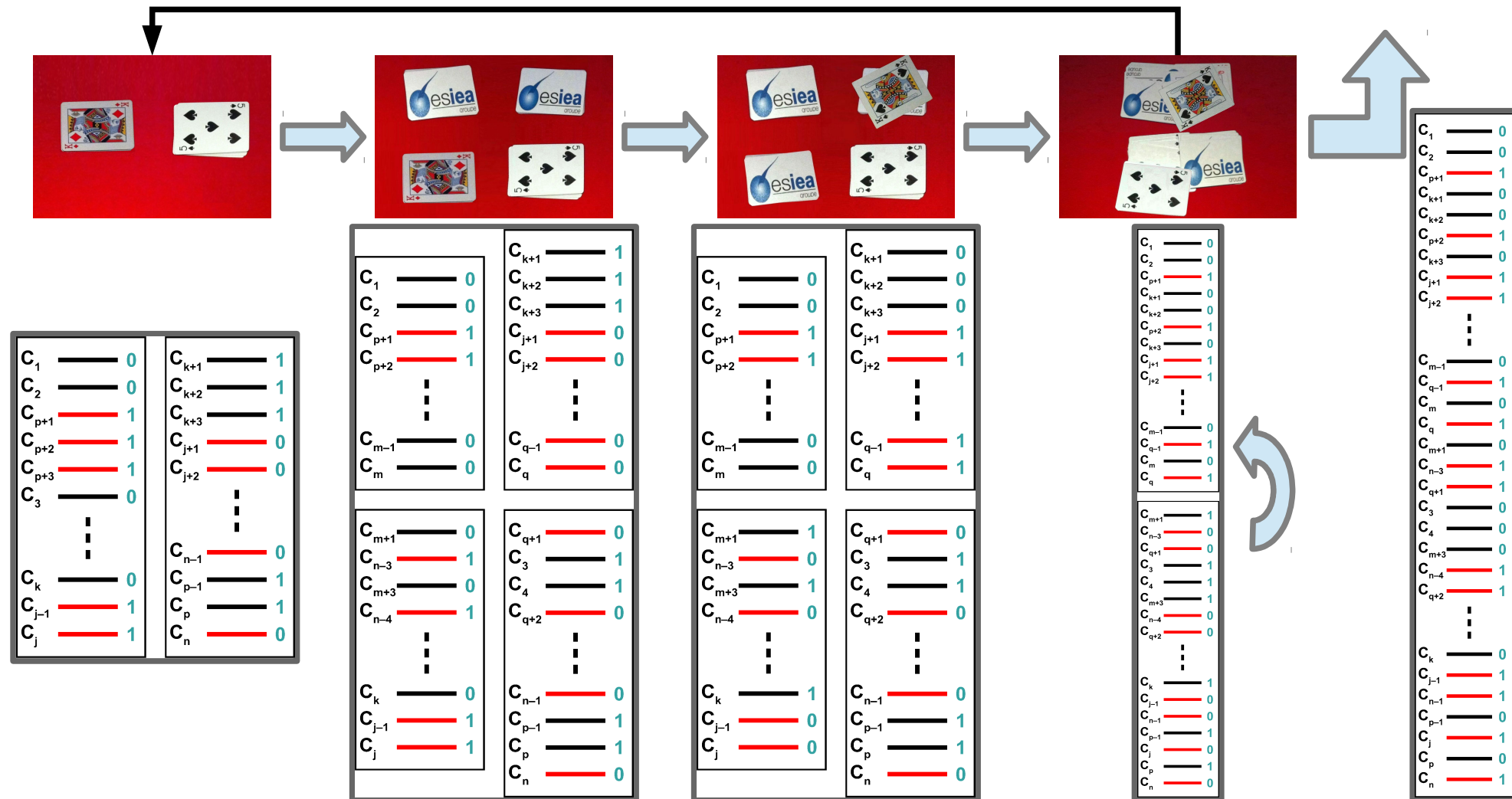


0-1 : bit d'indication du sens de la carte

Cartomagie – Dans tous les sens

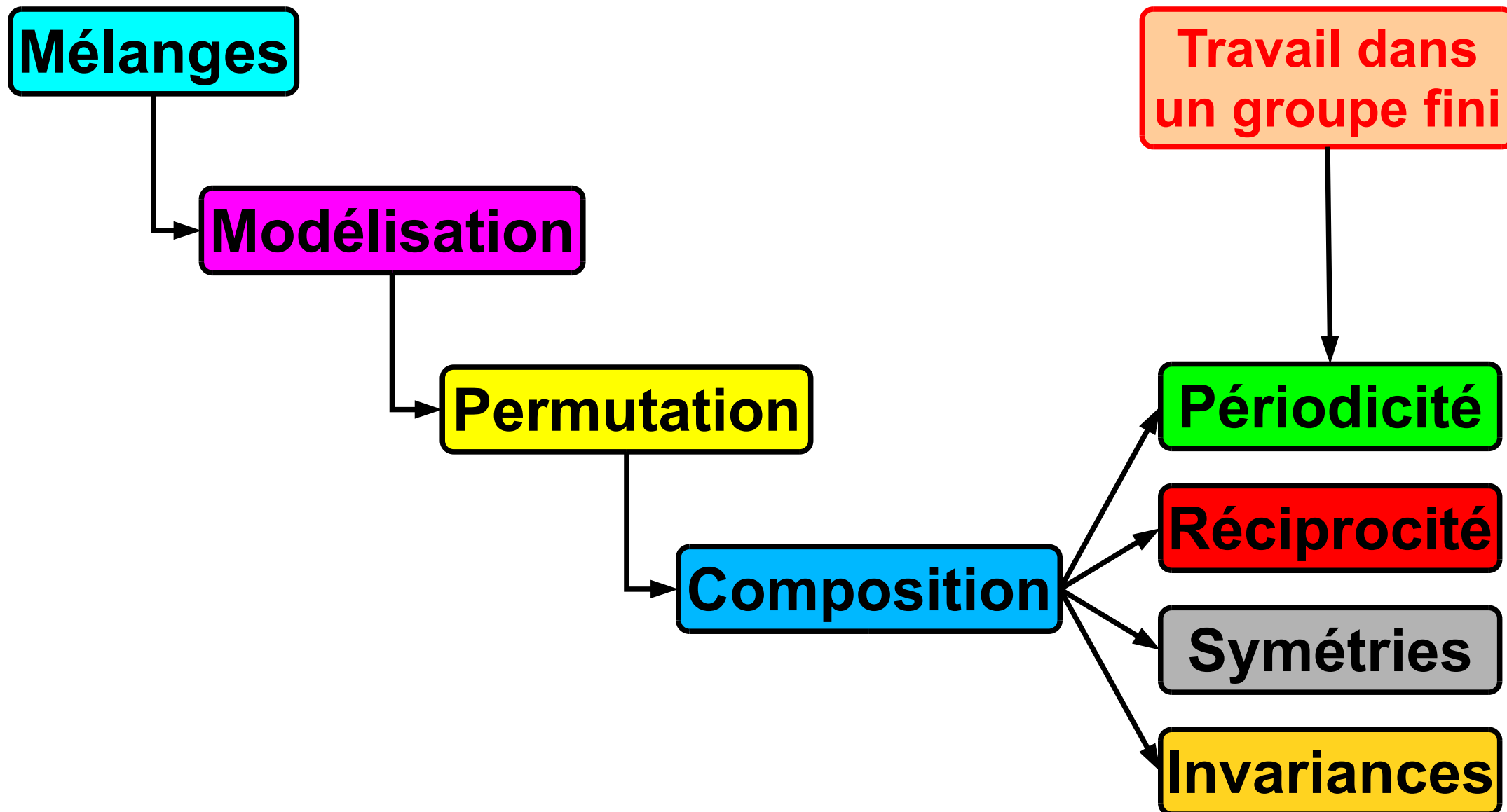
Le secret 2/2

Toutes les cartes des 2 paquets initiaux ont le même bit d'indication du sens de la carte !



Mélanges de cartes

Concepts mathématiques de base





Interlude



« 30 secondes »

Ou...

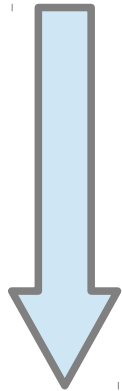
***Réfléchir plus vite
que l'ordinateur !***



Tour : 30 secondes ! (1)

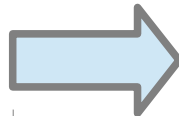
La représentation magique

**Le public donne un nombre S
compris entre 35 et 99**



Somme magique

**Le magicien remplit
un carré magique de taille 4x4
de somme magique S**



1 contrainte aléatoire...

Tour : 30 secondes ! (1)

L'explication

-1	12	6	3
2	7	9	2
11	0	4	5
8	1	1	10

8	11	0	1
-1	2	7	12
3	2	9	6
10	5	4	1

À partir de carrés magiques de somme 20...

Tour : 30 secondes ! (1)

Le secret

$A-1$	$12+x$	$6+x$	$3+x$
$2+x$	$7+x$	$9+x$	$A+2$
$11+x$	A	$4+x$	$5+x$
$8+x$	$1+x$	$A+1$	$10+x$

$8+x$	$11+x$	A	$1+x$
$A-1$	$2+x$	$7+x$	$12+x$
$3+x$	$A+2$	$9+x$	$6+x$
$10+x$	$5+x$	$4+x$	$A+1$

$$A = S - 20 - 3x$$

Tour : 30 secondes ! (2)

La représentation magique

Le public coupe
7 paquets de cartes

Consignes
• multiplier les 
• multiplier les 
• additionner les 

Carré central

Le magicien remplit
un carré magique de taille 4x4

Somme magique

Le public coupe
2 paquets de cartes

Consigne
• exponentiation
des deux cartes

5 contraintes aléatoires !

Tour : 30 secondes ! (2)

L'explication



Martin Gardner
(1914 – 2010)

	21	10	
	19	14	

Le carré central a pour somme 64
Date de naissance 21/10/1914

Tour : 30 secondes ! (2)

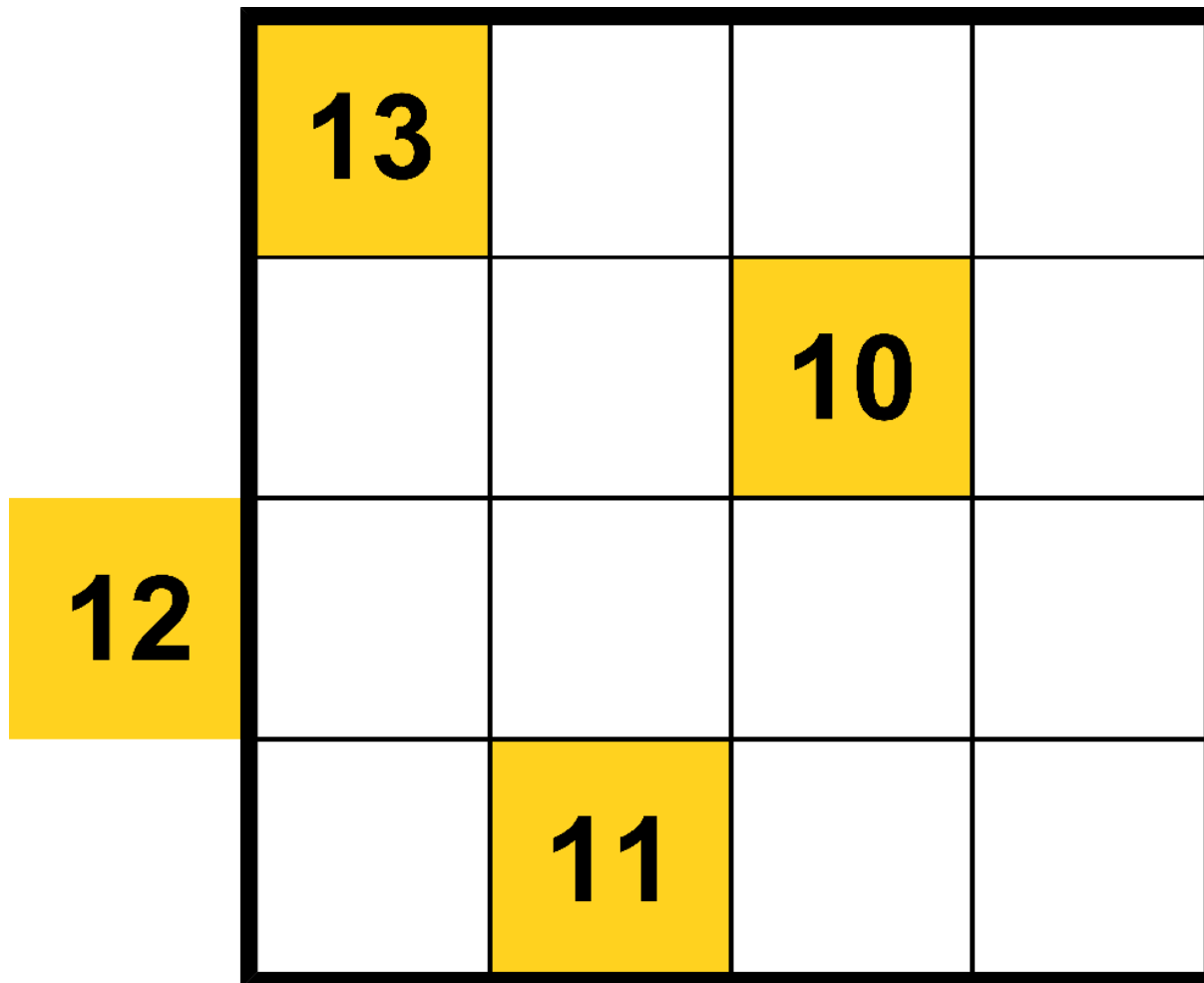
Le secret

**Un carré
magique
de somme 64**

$13+x$	$13-x$	$18-y$	$20+y$	→ 64
$17-x$	21	10	$16+x$	→ 64
$19+y$	19	14	$12-y$	→ 64
$15-y$	$11+x$	$22+y$	$16-x$	→ 64
↓ 64	↓ 64	↓ 64	↓ 64	↘ 64

Tour : 30 secondes ! (2)

L'explication



Le parcours du cavalier

Tour : 30 secondes ! (2)

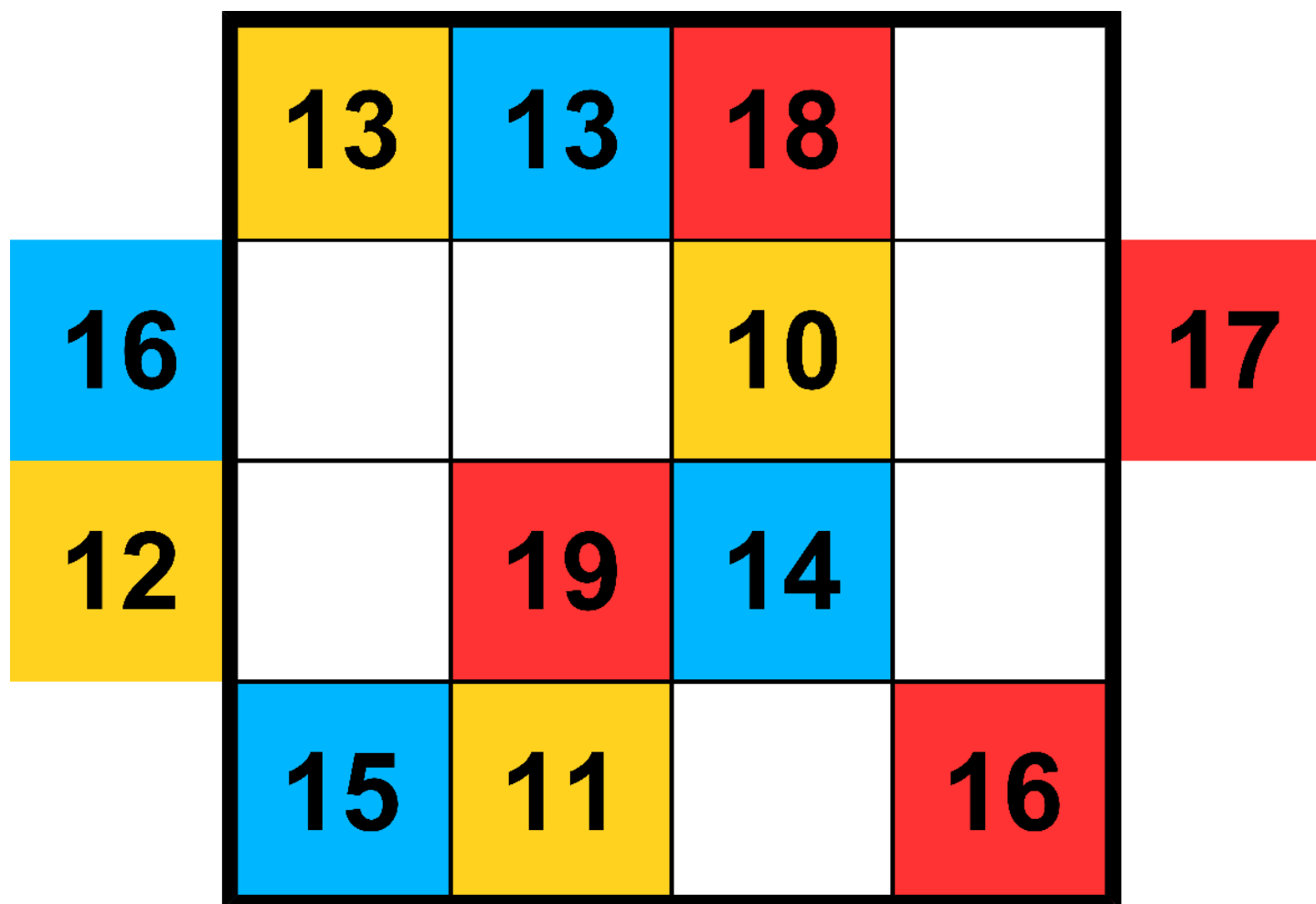
L'explication

	13	13		
16			10	
12			14	
	15	11		

Le parcours du cavalier

Tour : 30 secondes ! (2)

L'explication



Le parcours du cavalier

Tour : 30 secondes ! (2)

L'explication

	13	13	18	20	
16		21	10		17
12		19	14		19
	15	11	22	16	

Le parcours du cavalier

Tour : 30 secondes ! (2)

L'explication

13	13	18	20
17	21	10	16
19	19	14	12
15	11	22	16

Un carré magique de somme 64

MATH-INFO-MAGIE

Des personnages d'exception...



Leonhard Euler
(1707 – 1783)
Mathématicien suisse



Alan Turing
(1912 – 1954)
Mathématicien britannique
Informaticien



Martin Gardner
(1914 – 2010)
Écrivain américain
Math&magicien

MATH-INFO-MAGIE

Et leur carré magique natal associé...

2	8	20	13
18	15	04	6
14	17	07	5
9	3	12	19

Leonhard Euler
Né le 15/04/1707
Somme magique 43

9	11	18	22
17	23	06	14
21	19	12	8
13	7	24	16

Alan Turing
Né le 23/06/1912
Somme magique 60

9	16	17	22
18	21	10	15
24	19	14	7
13	8	23	20

Martin Gardner
Né le 21/10/1914
Somme magique 64

2^e partie :

***Carrés magiques
d'ordre 4***

I

***Carrés d'ordre 4
et culture***

Carrés magiques et culture

Dans l'histoire

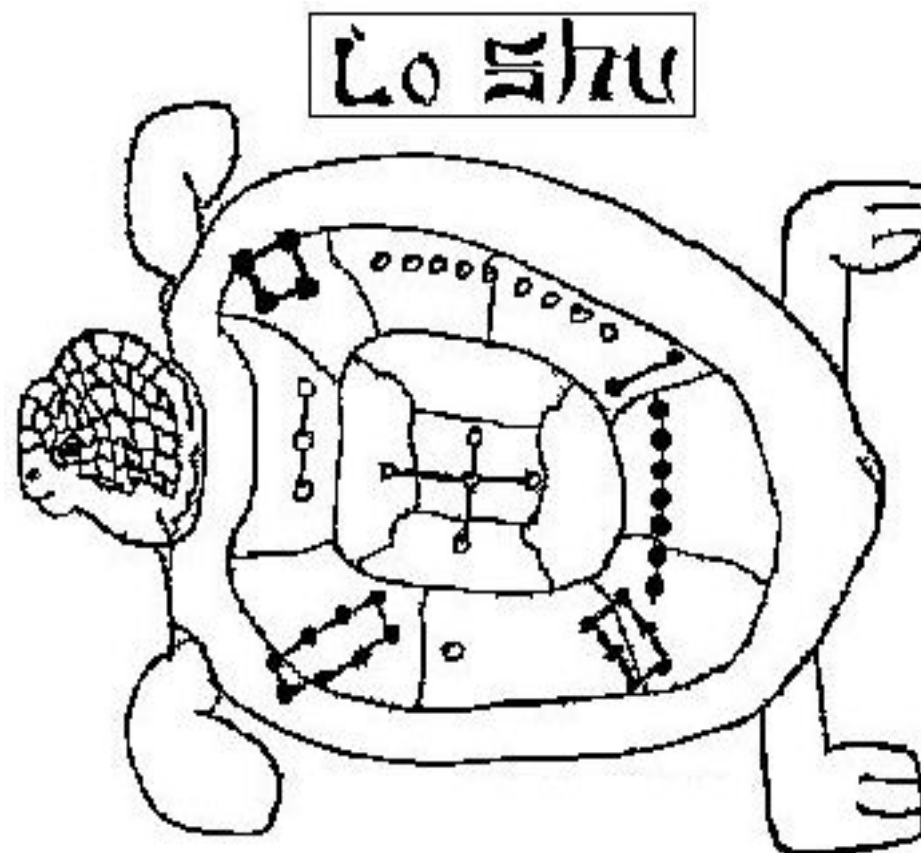
Apparition en Chine : ~ 650 av. J.-C.

→ Légende de Luo Shu

(*Le Livre de la rivière Luo* – 洛書 ,
~ 2200 av. J.-C.)

肆	仡	貳
參	伍	柒
捌	壹	陸

4	9	2
3	5	7
8	1	6



Carrés magiques et culture

Dans l'histoire

En Inde

→ Dans le temple jaïn de
Parshvanath (Khajurâho, 954)



Carrés magiques et culture

Dans l'histoire

En Perse

→ Encyclopédie des Frères de la Pureté

(*Rasā'il Ihwān al-Ṣafā'* – رسائل إخوان الصفا, Bagdad, 983).

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

د	يد	به	ا
ط	ز	و	بب
•	يا	ى	ح
يو	ب	ج	بج

٤	١٤	١٥	١
٩	٧	٦	١٢
٥	١١	١٠	٨
١٦	٢	٣	١٣

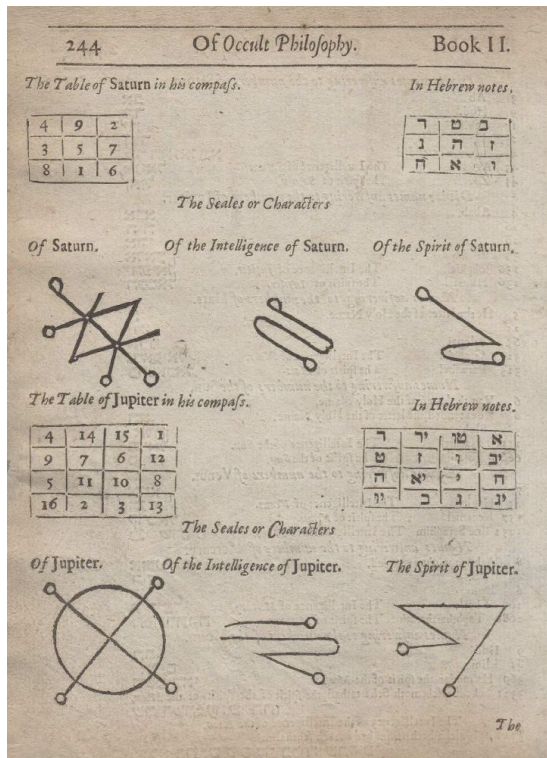
عداء
بورته
المقل
شكى

به نظر عداوة في لوح من نحاس ويحبه في النار فهو عاف

Carrés magiques et culture

Dans la religion

En Europe



4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

**Carré
polymagique
Somme
magique 34**

Carré de Jupiter



**Henri Corneille Agrippa
(1486 – 1535)
Écrivain occultiste, théologien, astrologue
et alchimiste allemand**

→ **De Occulta Philosophia
(Cologne, 1531)**

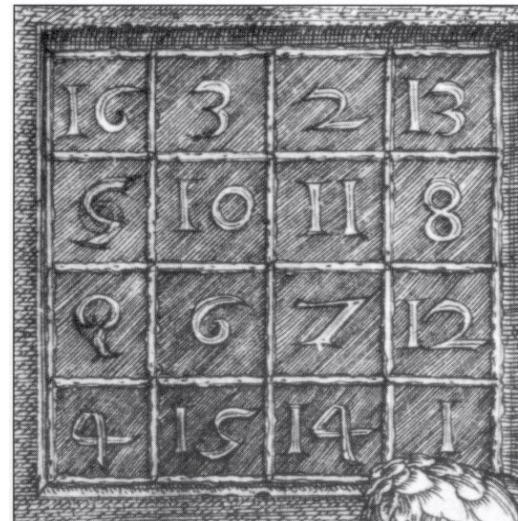
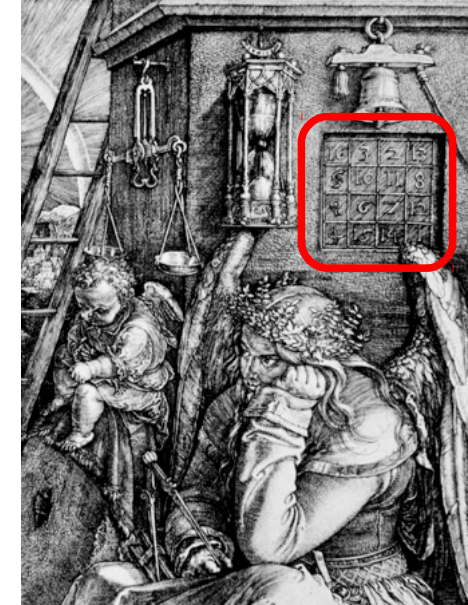
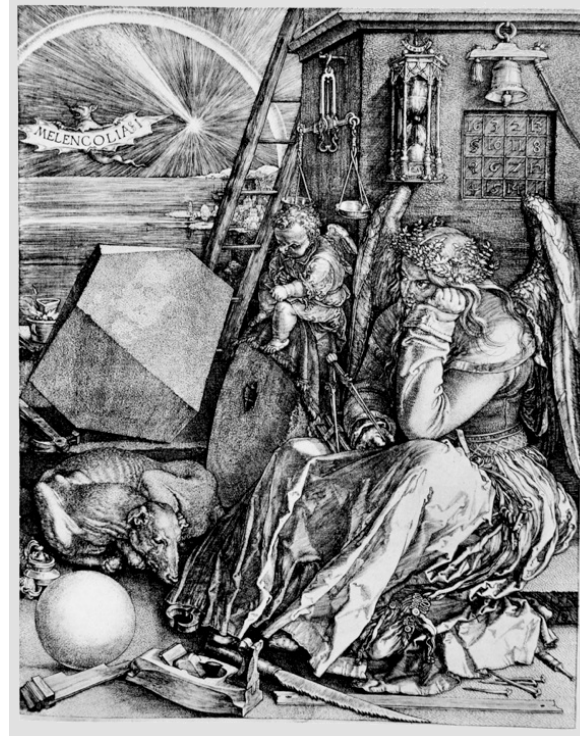
Carrés magiques et culture

Dans l'art



Albrecht Dürer
(1471 – 1528)
Peintre et graveur allemand

→ *Melencolia*
(Nuremberg, 1514)



*Carré
polymagique*

**Somme
magique 34**

Carrés d'ordre 4 dans l'art

Dans l'art



Antoni Gaudí i Cornet
(1852 – 1926)
Architecte catalan

→ ***Basilique de la Sagrada Familia***
(Barcelone, démarrée en 1987)

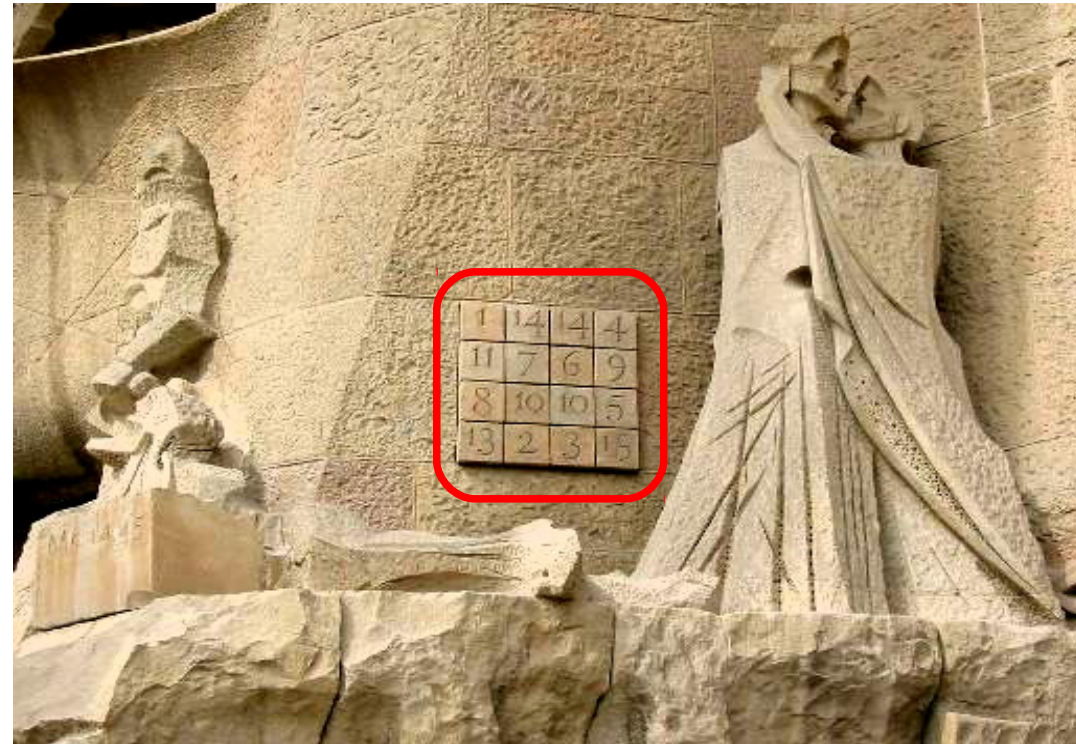


Josep Maria Subirachs
(1927 – 2014)
Sculpteur et peintre catalan

→ ***Façade de la Passion***
(Basilique de la Sagrada Familia)

Carrés d'ordre 4 dans l'art

Dans l'art



1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

***Carré
polymagique***

**Somme
magique 33**

II

***Construction
de carrés magiques
d'ordre 4***

Construction

Le carré central

X	X	X	X
X	A	B	X
X	C	D	X
X	X	X	X

*Remarque
préliminaire*

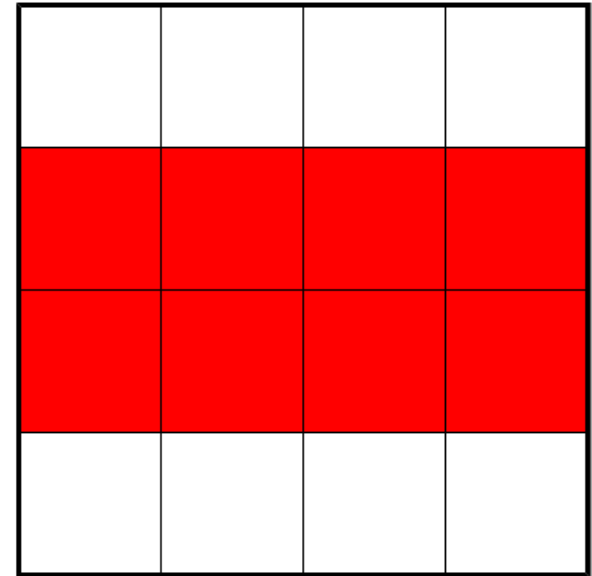
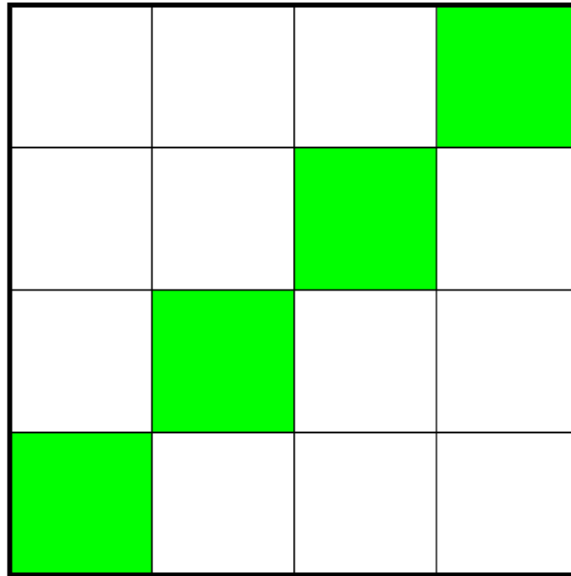
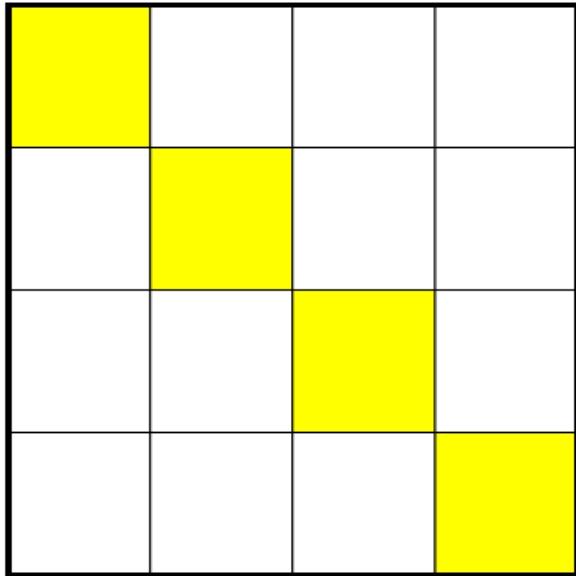
*La somme magique
vaut*

nécessairement

$$**S = A + B + C + D**$$

Construction

L'explication



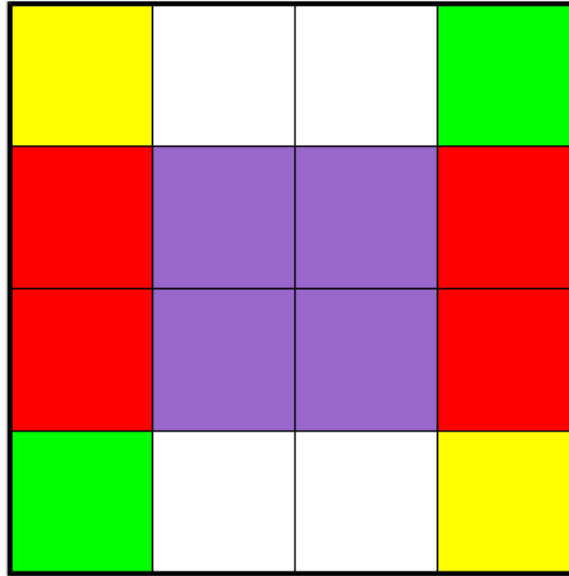
A diagram illustrating the construction of a 4x4 grid. It shows three components added together:

- A yellow anti-diagonal (squares (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)).
- A green main diagonal (squares (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)).
- A red 2x2 block (squares (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)).

The equation is: $\text{Yellow Anti-Diagonal} + \text{Green Main Diagonal} + \text{Red 2x2 Block} = 4S$

Construction

L'explication



+

+

 2 $= 2S + 2$ $= 4S$

$\Rightarrow$

$= S$

Construction

Remplissage progressif

	A	B	
	C	D	

À partir du
carré central
→ **A,B,C,D**

Construction

Remplissage progressif

C+a			
	A	B	
	C	D	
			B-a

1 paramètre
→ **a**

Construction

Remplissage progressif

$C+a$			$D+b$
	A	B	
	C	D	
$A-b$			$B-a$

2 paramètres
→ a, b

Construction

Remplissage progressif

$C+a$	$B-a-c$	$A-b+c$	$D+b$
	A	B	
	C	D	
$A-b$			$B-a$

3 paramètres
→ a, b, c

Construction

Remplissage progressif

$C+a$	$B-a-c$	$A-b+c$	$D+b$
	A	B	
	C	D	
$A-b$	$D+a+c$	$C+b-c$	$B-a$

3 paramètres
→ a, b, c

Construction

Remplissage progressif

$C+a$	$B-a-c$	$A-b+c$	$D+b$
$D-a+d$	A	B	
$B+b-d$	C	D	
$A-b$	$D+a+c$	$C+b-c$	$B-a$

4 paramètres
→ a, b, c, d

Construction

Remplissage progressif

$C+a$	$B-a-c$	$A-b+c$	$D+b$
$D-a+d$	A	B	$C+a-d$
$B+b-d$	C	D	$A-b+d$
$A-b$	$D+a+c$	$C+b-c$	$B-a$

4 paramètres
→ a, b, c, d

Construction

Une formule explicite

$C+a$	$B-a-c$	$A-b+c$	$D+b$
$D-a+d$	A	B	$C+a-d$
$B+b-d$	C	D	$A-b+d$
$A-b$	$D+a+c$	$C+b-c$	$B-a$

Carré de somme magique $A+B+C+D$
→ Espace vectoriel de dimension 8



Ernest Bergholt
(1856 – 1925)
*Auteur anglais d'ouvrages
sur les jeux de cartes*

Construction

Une formule explicite

$C+a$	$B-a-c$	$A-b+c$	$D+b$
$D+c$	A	B	$C-c$
$B-a$ $+b-c$	C	D	$A+a$ $-b+c$
$A-b$	$D+a+c$	$C+b-c$	$B-a$

En choisissant $d = a+c$
→ Carré « *polymagique* »



Ernest Bergholt
(1856 – 1925)
*Auteur anglais d'ouvrages
sur les jeux de cartes*

Construction

Carrés polymagiques

$C+a$	$B-a-c$		
$D+c$	A		

		$A-b+c$	$D+b$
		B	$C-c$

$B-a$ $+b-c$	C		
$A-b$	$D+a+c$		

		D	$A+a$ $-b+c$
		$C+b-c$	$B-a$

$C+a$		$A-b+c$	
$B-a$ $+b-c$		D	

	$B-a-c$		$D+b$
	C		$A+a$ $-b+c$

$D+c$		B	
$A-b$		$C+b-c$	

	A		$C-c$
	$D+a+c$		$B-a$

$C+a$			$D+b$
$A-b$			$B-a$

	A	B	
	C	D	

	$B-a-c$		
$D+c$			
			$A+a$ $-b+c$
		$C+b-c$	

		$A-b+c$	
			$C-c$
$B-a$ $+b-c$			
	$D+a+c$		

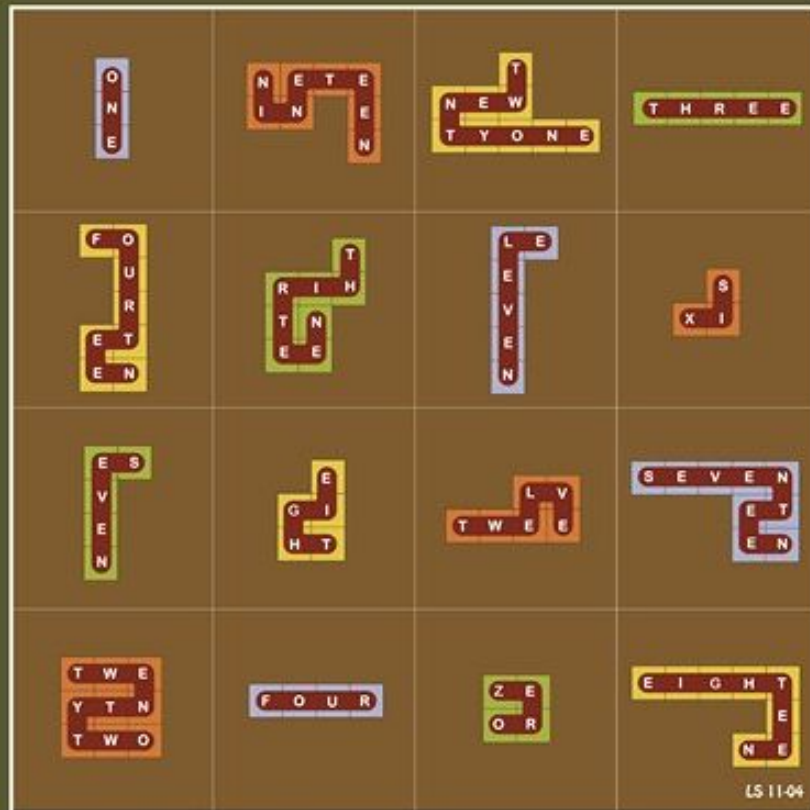
III

***Des carrés
artistiques***

Carrés artistiques

Carrés alpha-magiques

An alpha-geomagic square
Any four shapes in a straight line tile the square;
the numbers they bear sum to 44



3	8	9	5
8	8	6	3
5	5	6	9
9	4	4	8

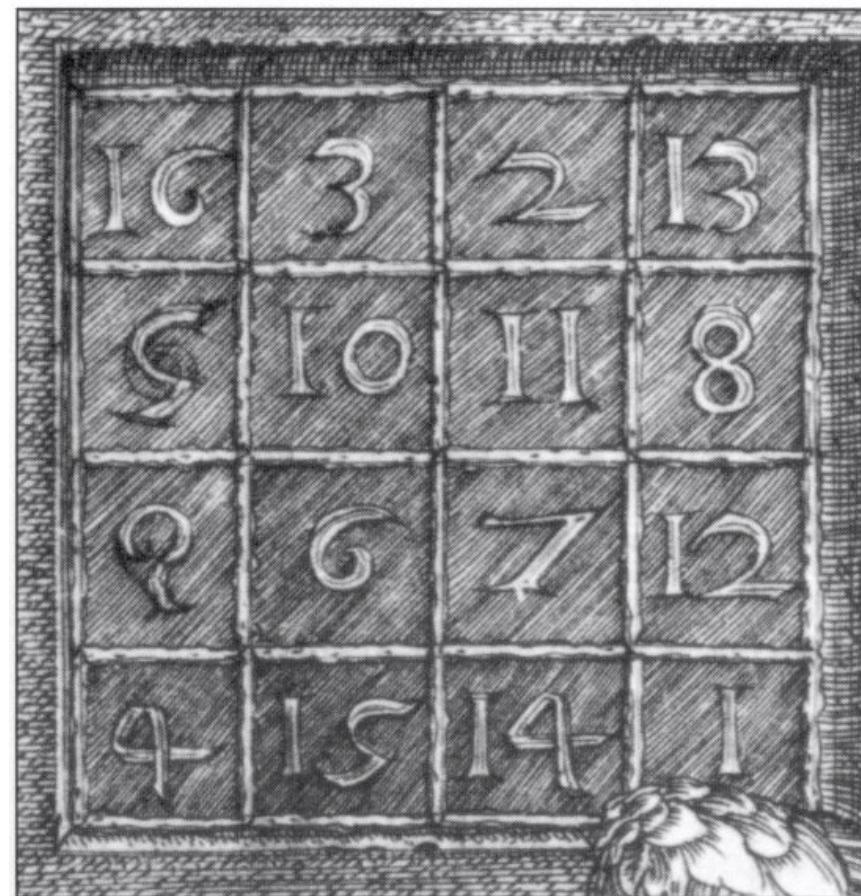
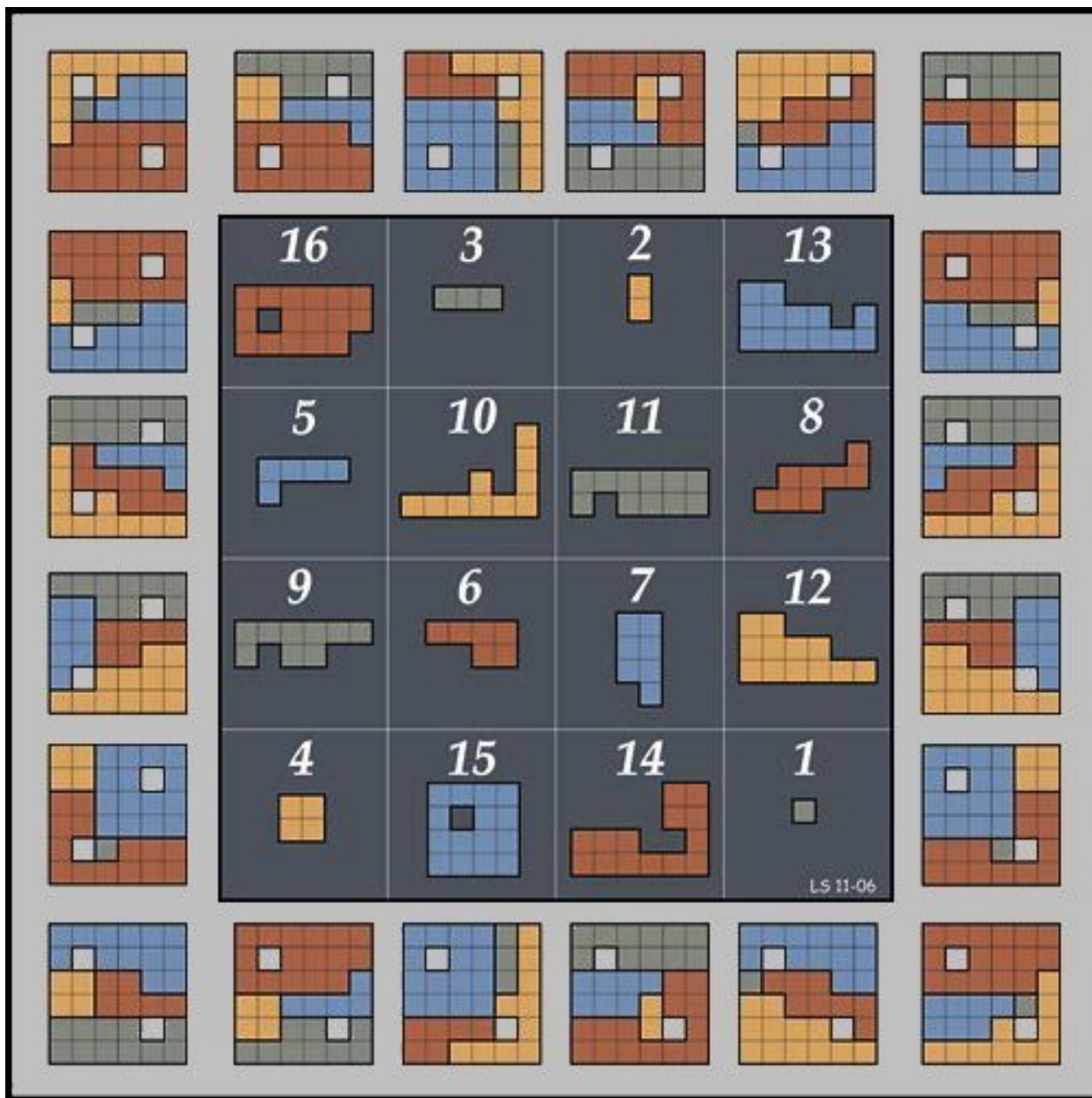
Carré *alphabétique*
→ magique de somme 44

1	19	21	3
14	13	11	6
7	8	12	17
22	4	0	18

Carré *numérique*
→ magique de somme 25

Carrés artistiques

Carrés géo-magiques



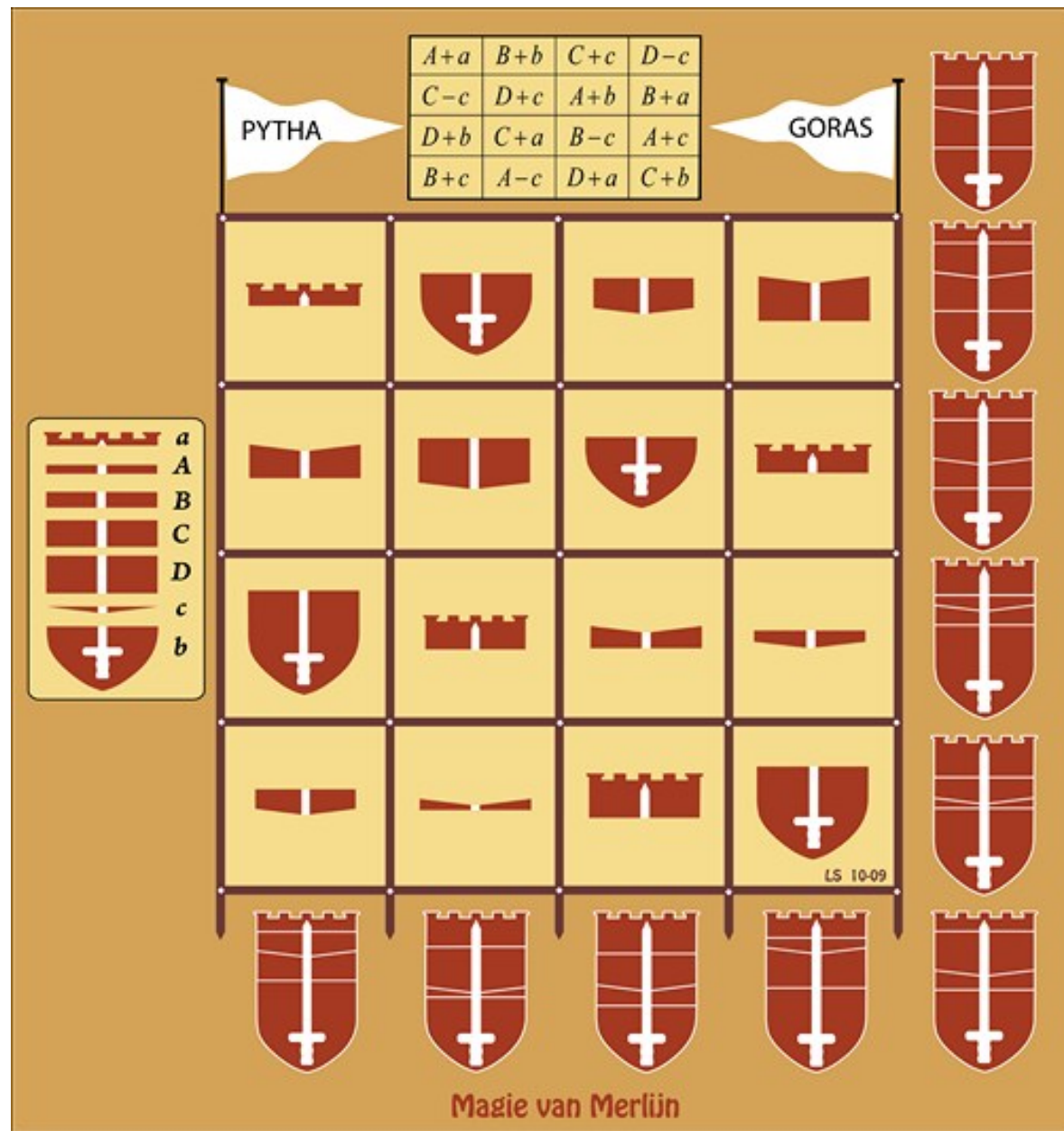
Carré de Dürer

Carrés artistiques

L'explication

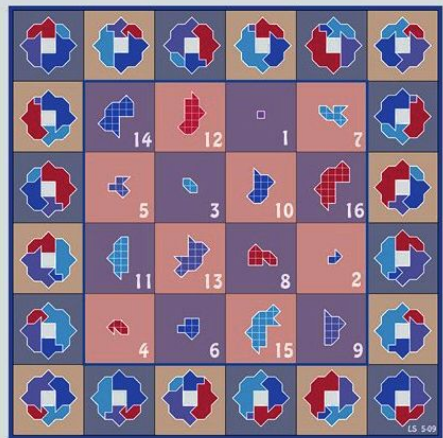
$A+a$	$B+b$	$C+c$	$D-c$
$C-c$	$D+c$	$A+b$	$B+a$
$D+b$	$C+a$	$B-c$	$A+c$
$B+c$	$A-c$	$D+a$	$C+b$

Une variante à 7 paramètres
de la formule de Bergholt

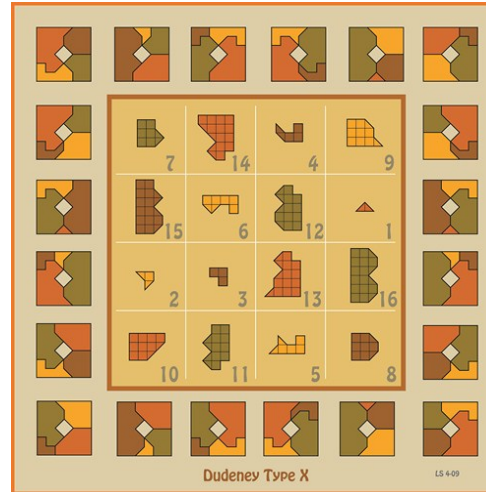
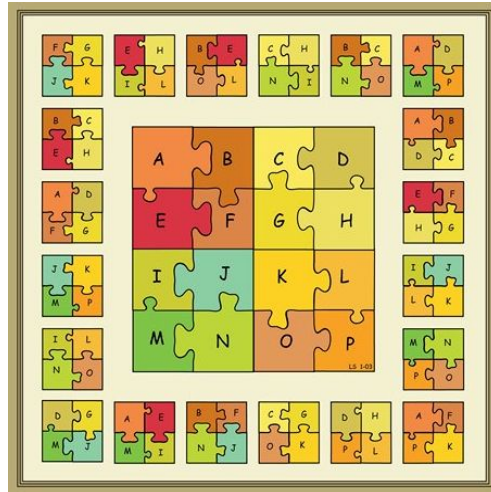


Carrés artistiques

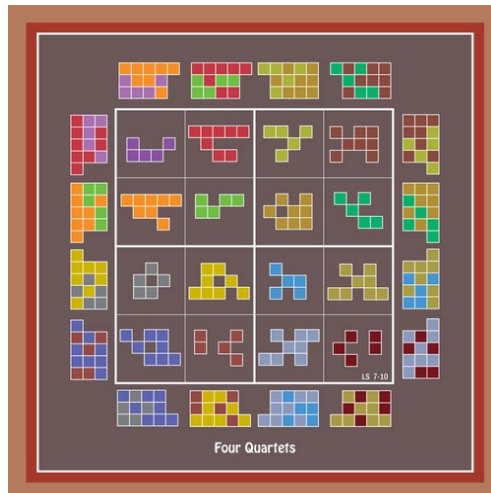
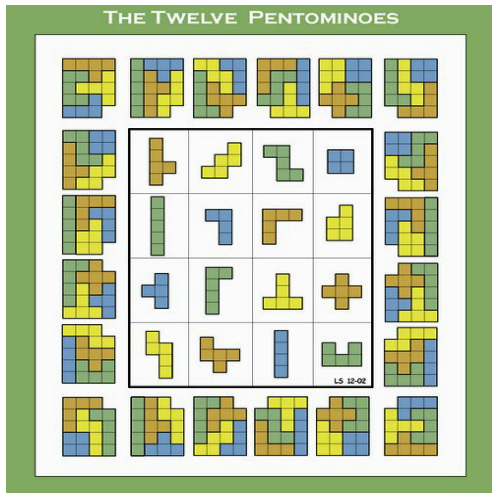
Carrés alpha- et géo-magiques



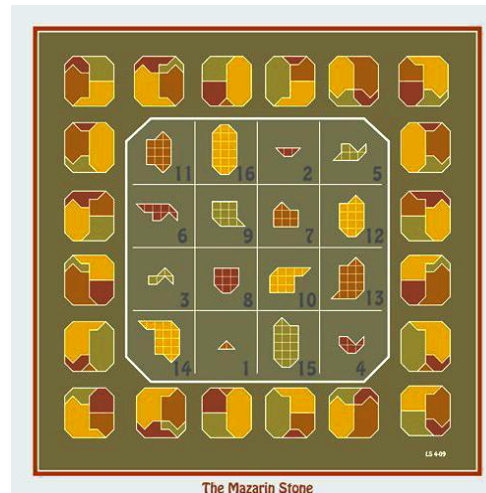
ABRACADABRA



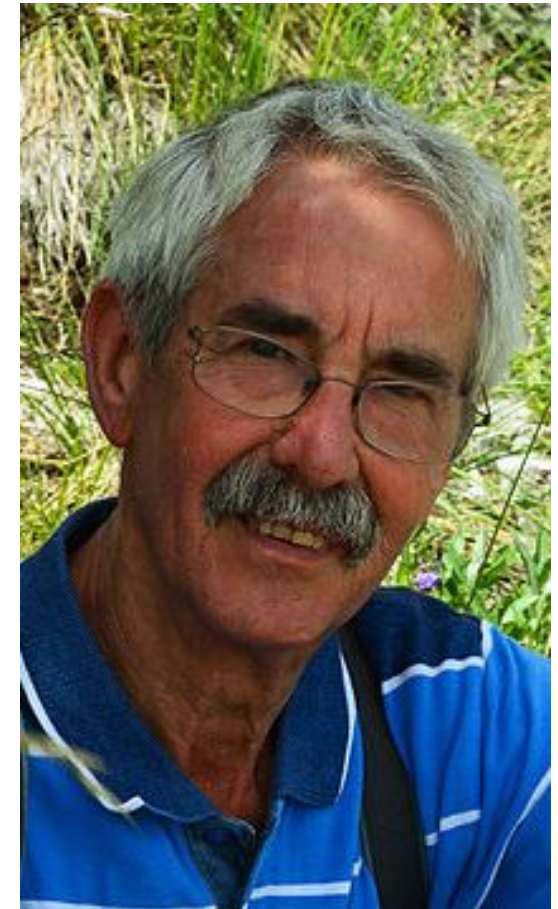
Dudeney Type X



Four Quartets



The Mazarin Stone



Lee Cecil Fletcher Sallows
(1944 –)
Ingénieur électronicien anglais



CONCLUSION



Nos créations – La Magie est Mathématique

Des posters – http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/creer_votre_tour.pdf



Aimé LACHAL

aime.lachal@insa-lyon.fr

<http://math.univ-lyon1.fr/~alachal>



CRÉEZ VOTRE TOUR DE CARTES !



Pierre SCHOTT

pierre.schott@esiea.fr

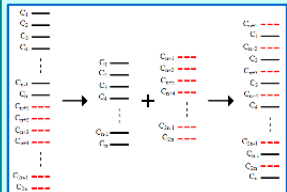
<http://magicalacarte.free.fr>

Inventez, décrivez et tournez une vidéo de **votre** tour !

Envoyez vos documents et liens dropbox à magie.carte@laposte.net

Concept 1 – Les donnes

Exemple – La donne Faro (« IN-shuffle »)



Avec le paquet faces en bas :

- Couper le jeu en 2 parties égales
- Imbriquer chaque carte d'un paquet entre 2 cartes de l'autre paquet

Très difficile à faire !

- x est la position dans le paquet AVANT le Faro
- $f(x)$ est la position dans le paquet APRÈS le Faro

$$f: \{1, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, \dots, 2n\}$$
$$x \mapsto 2x \bmod (2n+1)$$

Le résultat de la donne est **déterministe** !
Les nouvelles positions de chaque carte sont connues d'avance

Propriété fondamentale

Il existe toujours un nombre fini de donnes Faro à faire pour que le jeu revienne à sa configuration initiale.
Plus on mélange et plus le jeu redevient classé !

Exemple – Positions successives au cours des donnes Faro de la carte en position 4 d'un jeu de 16 cartes (Valet – Dame – Roi – As) :
4 – 8 – 16 – 15 – 13 – 9 – 1 – 2 – 4

Le magicien sait toujours où se trouve une carte choisie !

Propriété – Un mélange Faro n'altère ni le caractère palindromique d'un jeu ni un chapelet mathématique !

Pour aller plus loin : utiliser le programme SciLab

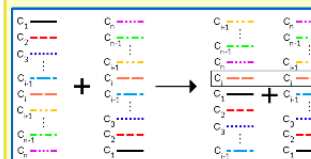
- Lancer le programme "creation_tour_cartes.sce"
- Choisir LE jeu de cartes numérotées
- Essayer les donnes de Faro, Monge, Klondike, équitables et dessus-dessous pour trouver le mode opératoire en visualisant le résultat pour les donnes



Concept 3 – Le jeu palindromique

Définition – Un jeu de N cartes est **palindromique** si les cartes en position i et $(N+1-i)$ sont « les mêmes »

Le paquet neuf ci-dessus est un jeu palindromique en considérant les valeurs faciales des cartes et les couples (Cœur ↔ Pique) et (Carreau ↔ Trèfle)



Avec 2 jeux en miroir :

- Couper UN des paquets
- Retourner la carte de coupe
- La replacer sur le sous-paquet
- Refermer la coupe
- Regarder la carte du dessus de chaque paquet puis refaire avec les cartes suivantes

Facile à faire !

Effet magique – Seule la carte retournée est jumelle avec l'autre paquet !

Concept 4 – Le chapelet

Définition – Un **chapelet** est un ordonnancement d'un jeu qui permet de connaître l'identité d'une carte en fonction de sa position (et inversement)

Pour certains chapelets, il existe une relation mathématique simple entre la position et l'identité de la carte. Pour le jeu neuf, on a :

$$\text{couleur-valeur} \quad \{0, 1, 2, 3\} \times \{1, \dots, 13\} \rightarrow \{1, \dots, 52\}$$
$$(c, v) \mapsto \begin{cases} 13c+v & \text{si Cœur } (c=0) \text{ ou Trèfle } (c=1) \\ 13c+14-v & \text{si Carreau } (c=2) \text{ ou Pique } (c=3) \end{cases}$$

Pour aller plus loin : utiliser le programme SciLab

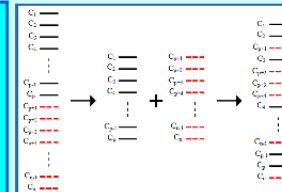
- Lancer le programme "creation_tour_cartes.sce"
- Choisir un chapelet
- Trouver les équations mathématiques !

Concept 2 – Les mélanges

Exemple – Le « riffle shuffle »

- Avec le paquet faces en bas :
- Couper le jeu en 2 parties égales
 - Effeuiller chaque paquet pour intercaler de manière aléatoire les cartes d'un paquet dans l'autre

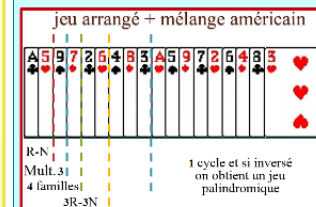
Assez facile à faire !



Le résultat du mélange est **aléatoire** !
Les nouvelles positions de chaque carte NE sont PAS connues d'avance

MAIS certaines propriétés globales ne sont pas altérées par le(s) mélange(s)...

Concept 5 – Principes de Gilbreath



- Arranger un jeu avec une (des) fenêtr(e)s glissant(e)s
- Paquet faces en bas : mettre la carte du paquet tenu en main sur la table, puis la suivante, etc.
- Avec les 2 paquets ainsi formés, mélanger avec le riffle shuffle

Effet magique – Globalement, chaque tas de k cartes admet la même propriété qu'au départ dans la fenêtre de longueur k

Nos créations – La Magie est Mathématique

Des posters – http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/enseigner_par_la_magie.pdf



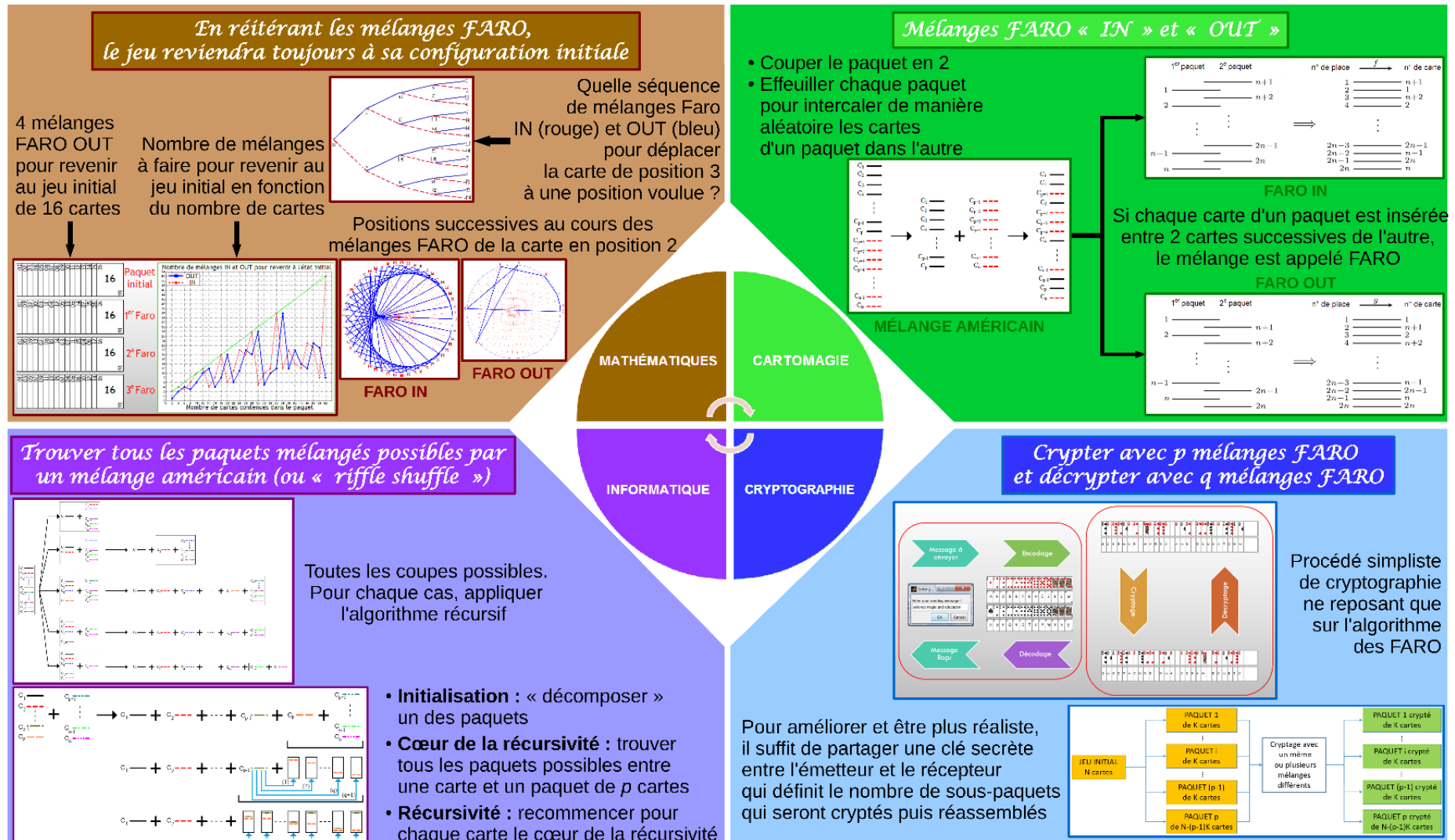
Aimé LACHAL
aime.lachal@insa-lyon.fr
<http://math.univ-lyon1.fr/~alachal>

ENSEIGNER PAR LA MAGIE...



Pierre SCHOTT
pierre.schott@esiea.fr
<http://magicalacarte.free.fr>

Utilisation du mélange américain (nommé aussi « riffle shuffle »)



Nos créations – La Mathématique est Magique

Des posters – http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/les_carres_magiques1.pdf



Aimé LACHAL
aimé.lachal@insa-lyon.fr
<http://math.univ-lyon1.fr/~alachal>

LES CARRÉS MAGIQUES



Pierre SCHOTT
pierre.schott@esiea.fr
<http://magiealacarte.free.fr>

Histoire, culture, religion et art – De l'Antiquité à nos jours

De l'Antiquité au Moyen-Âge

Le carré « Lo Shu »

La légende chinoise
du « Luo Shu »
2200 av. J.-C.



Apparitions mystérieuses
d'une tortue divine portant
le premier carré magique
de la création (d'ordre 3)
sur sa carapace lors
des crues diluviennes
de la rivière Luo

Le carré « SATOR »



Carré mystique
aux interprétations
diverses dont la plus
ancienne copie se trouve
dans les ruines de Pompei
79 ap. J.-C.

Le carré de Parshvanath



Carré magique d'ordre 4
gravé dans le temple jain
de Parshvanath
Khajuraho – 954

Le carré d'Ayasofya

Carré magique d'ordre 6
extrait du manuscrit
« Ayasofya »
Istanbul – XIII^e s.



Le carré du Pape Léon III



Pape Leonis III
750–816



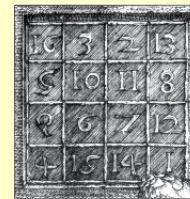
Carré magique
d'ordre 9 inséré
dans le grimoire
« Enchiridion
Leonis Papae »
Rome – 795

La renaissance

Le carré de Dürer



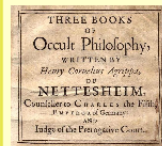
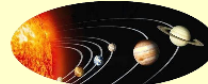
Albrecht Dürer
Peintre allemand
1471–1528



Carré polymagique d'ordre 4
de somme 34 inséré dans la gravure
« Melencolia »
Nuremberg – 1514



Les carrés planétaires



Association de carrés magiques
aux 7 planètes connues de l'époque
et attribution de vertus talismaniques
dans le traité d'occultisme
« De Occulta Philosophia »
Cologne – 1510



Heinrich Cornelius Agrippa
Ecrivain ésotériste, théologien
et astrologue allemand
1486–1535

Saturne 15

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Jupiter 34

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Mars 65

11	24	7	20	33
4	21	25	6	16
10	3	13	31	4
10	18	1	13	22
23	8	18	2	15

Soleil 111

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Vénus 175

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Mercure 260

8	38	59	5	4	62	63	1
40	15	14	52	53	41	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	23	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Lune 369

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	68	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

De nos jours

Le carré de Gaudí



Antoni Gaudí
Architecte catalan
1852–1926



Josep Subirachs
Sculpteur catalan
1927–2014



Carré polymagique d'ordre 4
de somme 33 sculpté sur la façade
de la Passion de la basilique
« la Sagrada Família »
Barcelone, 1987–

Les carrés de Sallows



Lee Sallows
Ingénieur anglais
1944–



Carrés géomagiques
et alphamagiques

Nos créations – La Mathématique est Magique

Des posters – http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/les_carres_magiques2.pdf



Aimé LACHAL

aimelachal@insa-lyon.fr

<http://math.univ-lyon1.fr/~alachal>



LES CARRÉS MAGIQUES



esiea
ÉCOLE D'INGÉNIEURS
DU MONDE NUMÉRIQUE

Pierre SCHOTT

pierre.schott@esiea.fr

<http://magiealacarte.free.fr>

Classification et quelques méthodes de construction

Ordre doublement pair $4p$

Méthode de pointage et de superposition

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Méthode des diagonales

Méthode des quadrants

Un tour de magie

Deux carrés de référence

0	12	6	3
2	7	9	3
11	1	4	5
8	1	2	10

À partir de deux carrés *magiques* particuliers...

8	11	0	1
-1	2	7	12
3	2	9	6
8	5	4	1

A	12+x	6+x	3+x
2+x	7+x	9+x	A+3
11+x	A+1	4+x	5+x
8+x	1+x	A+2	10+x

Ces deux carrés sont *magiques* de somme voulue S quels que soient les choix de A et x !

8+x	11+x	A	1+x
A-1	2+x	7+x	12+x
3+x	A+2	9+x	6+x
8+x	5+x	4+x	A+1

$$A = S - 21 - 3x$$

$$A = S - 20 - 3x$$

Ordre impair $2p+1$

Remplissage en diagonale

1	2	3
4	5	6
7	8	9

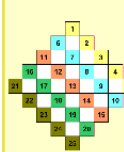
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Méthode siamoise



Simon de La Loubère
1642–1729



Méthode des terrasses



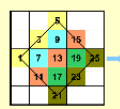
Leonhard Euler
1707–1783

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Marche du cavalier



Méthode du losange

Ordre simplement pair $4p+2$

Remplissage par bordures

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36



Michael Stifel
1487–1567

Méthode des enceintes

Remplissage à partir d'un motif

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36



Ralph Strachey
1868–1923

Méthode de Strachey

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36



John Conway
1937–

Méthode LUX

Pour aller plus loin : utiliser le programme SciLab

- Lancer le programme "creation_carres_magiques.sce"
- Entrer l'ordre du carré
- Entrer les algorithmes choisis

Regarder les carrés se créer pas à pas !

Nos créations – La Mathématique est Magique

Un diaporama en ligne — http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/carres_magiques_diaporama.pdf



CARRÉS MAGIQUES

Aimé LACHAL & Pierre SCHOTT
Exposition « Magimatique »

Maison des Mathématiques et de l'Informatique
Lyon – 2016/2017

Nos créations – Math-Info-Magie

Des programmes informatiques sous Scilab



Nos créations – Math-Info-Magie

Des programmes informatiques sous Scilab



Nos créations – Math-Info-Magie

Des programmes informatiques sous Scilab

Carrés Magiques - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)

Carrés magiques d'ordre 3 et 4 — Carrés magiques d'ordre supérieur ou égal à 5

Ordre doublement pair $4p$

Méthode de pointage et de superposition



Méthode des diagonales



Méthode des quadrants

Un tour de magie

Deux carrés de référence

0	12	6	3
2	7	9	3
11	1	4	5
8	1	2	10

À partir de deux carrés *magiques* particuliers...

8	11	0	1
-1	2	7	12
3	2	9	6
8	5	4	1

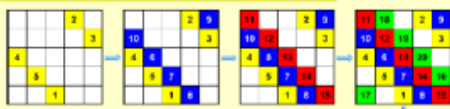
Ces deux carrés sont *magiques* de somme voulue S quels que soient les choix de A et x !

$$A = S - 21 - 3x$$

$$A = S - 20 - 3x$$

Ordre impair $2p+1$

Remplissage en diagonale



Méthode siamoise



Simon de La Loubère
1642–1729



Méthode des terrasses



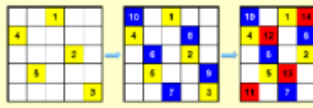
Marche du cavalier



Claude-Gaspard Bachet
dit de Méziriac
1581–1638



Leonhard Euler
1707–1783



Marche du cavalier



Méthode du losange

Ordre simplement pair $4p+2$

Remplissage par bordures



Michael Stifel
1487–1567



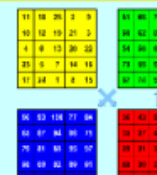
Quadratus mirabilis

Méthode des enceintes

Remplissage à partir d'un motif



Ralph Strachey
1868–1923



Méthode de Strachey



John Conway
1937–

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Méthode LUX

Pour aller plus loin : utiliser le programme SciLab

- Lancer le programme "creation_carres_magiques.sce"
- Entrer l'ordre du carré
- Entrer les algorithmes choisis

Regarder les carrés se créer pas à pas !

Nos créations – Math-Info-Magie

Des programmes informatiques sous Scilab

Carrés Magiques - Exposition Magimatique - MMI 2016/2017 (Aimé LACHAL et Pierre SCHOTT)

Carrés magiques d'ordre 3 et 4 — Carrés magiques d'ordre supérieur ou égal à 5

Ordre doublement pair

Méthode de pointage et de superposition

Méthode siamoise

Méthode des diagonales

Méthode des quadrants

Un tour de magie

Deux carrés de référence

À partir de deux carrés magiques particuliers...

Ces deux carrés sont magiques de somme voulue S quels que soient les choix de A et X !

$A = S - 21 - 3x$

$A = S - 20 - 3x$

Carré magique d'ordre impair ($n=2p+1$)

Carré magique d'ordre pair ($n=2p$)

Carré magique d'ordre simplement pair ($n=4p+2$)

Carré magique d'ordre doublement pair ($n=4p$)

Vérification du carré construit

Fermer les fenêtres

Méthode siamoise de De La Loubère

Méthode du cavalier d'Euler

Méthode des terrasses de Bachet

Méthode du losange d'Al Isfazari

Méthode des bordures de Yunis

Méthode des bordures de Stifel

Méthode des bordures d'Al Buni

Simon de La Loubère 1642-1729

Méthode des terrasses

Claude-Gaspard Bachet dit de Méziriac 1581-1638

Marche du cavalier

Leonhard Euler 1707-1783

Méthode du losange

Michael Stifel 1487-1567

Quadratus mirabilis

Méthode des enceintes

Remplissage à partir d'un motif

Ralph Strachey 1868-1923

Méthode de Strachey

Méthode LUX

John Conway 1937-

Pour aller plus loin : utiliser le programme SciLab

- Lancer le programme "creation_carres_magiques.sce"
- Entrer l'ordre du carré
- Entrer les algorithmes choisis

Regarder les carrés se créer pas à pas !

Nos créations – Math-Info-Magie

Des publications

- **A. Lachal : Mélanges parfaits de cartes (I). In-shuffles et out-shuffles.** Quadrature 76 (2010)
- **A. Lachal : Mélanges parfaits de cartes (II). Mélanges de Monge.** Quadrature 77 (2010)
- **A. Lachal & P. Schott : Cartomagie : principes de Gilbreath (I). Dénombrement de mélanges américains.** Quadrature 85 (2012)
- **A. Lachal & P. Schott : Cartomagie : principes de Gilbreath (II). Quelques applications.** Quadrature 86 (2012)
- **A. Lachal & P. Schott : Cartomagie : principes de Gilbreath (III). Diverses démonstrations.** Quadrature 87 (2013)
- **A. Lachal : Un tour de magie autour de Fibonacci, Lucas et Chebyshev.** Quadrature 93 (2014)





Merci de votre attention !

Diaporama en ligne :

<http://math.univ-lyon1.fr/~alachal>

<http://magiealacarte.free.fr>



aime.lachal@insa-lyon.fr

pierre.schott@esiea.fr