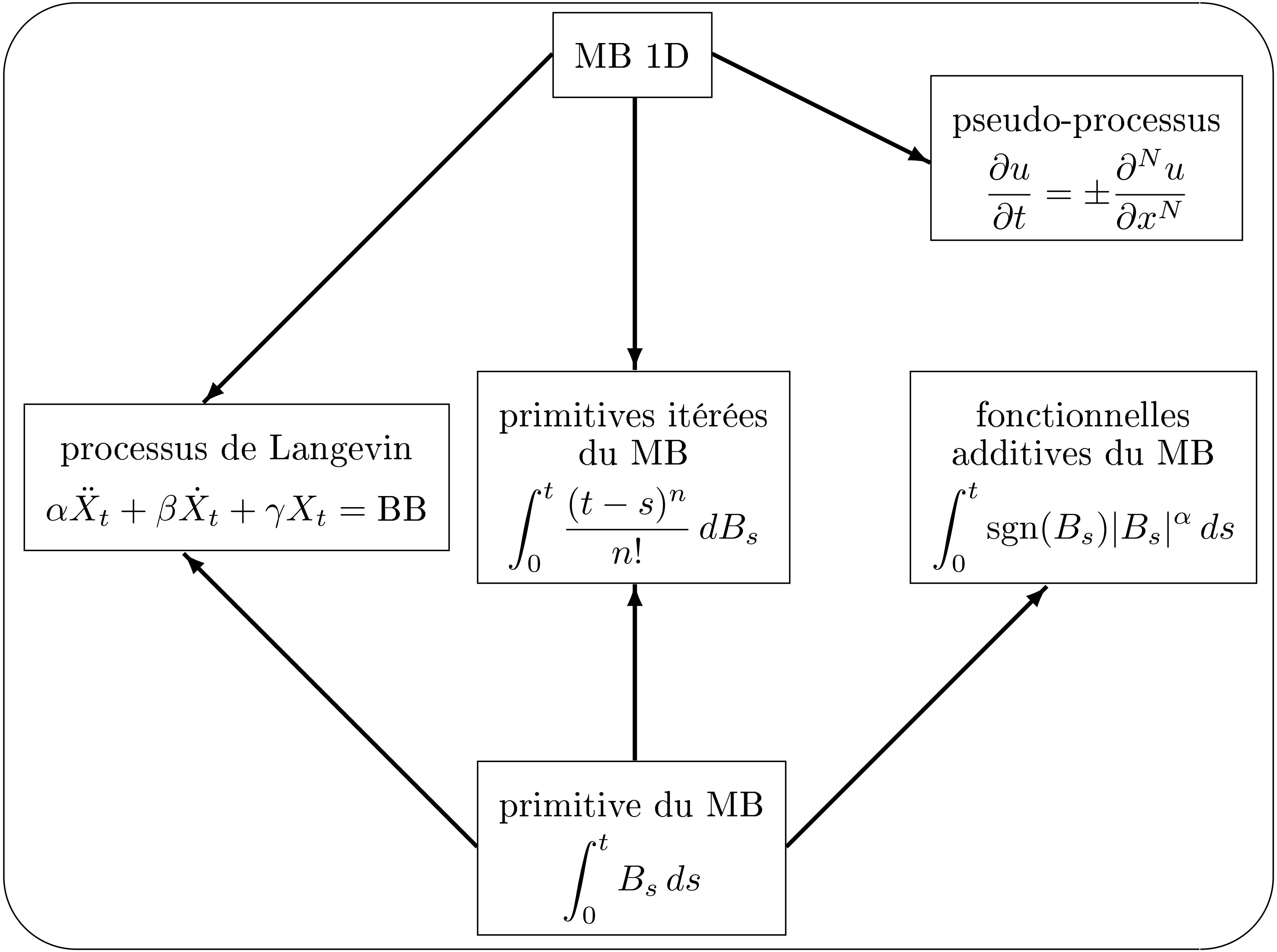
# Quelques problèmes de temps de passage pour certains processus non nécessairement markoviens

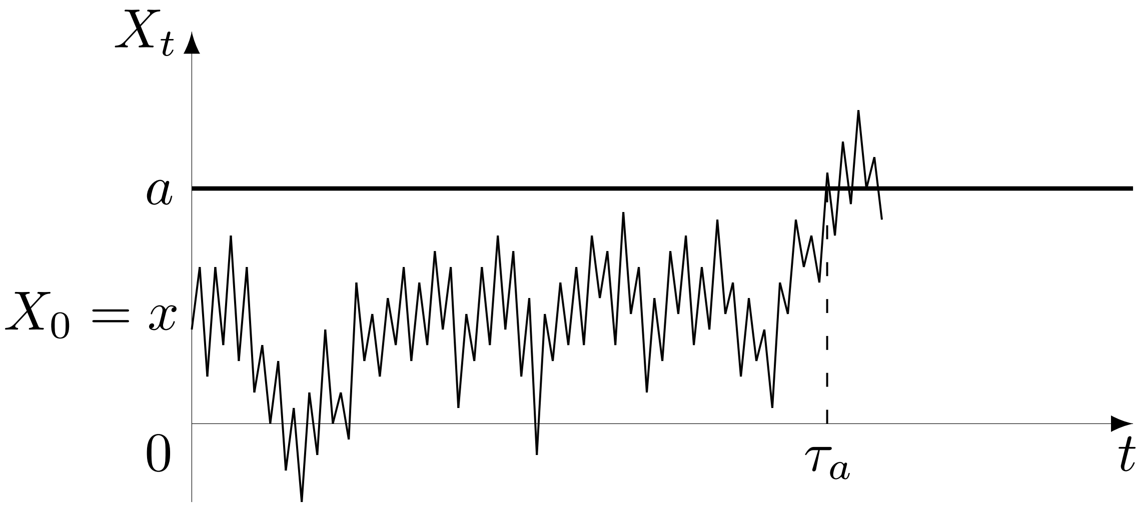
Aimé LACHAL

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon*
*INSA de Lyon*


MB 1D
pseudo-processus
$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm \frac{\partial^N u}{\partial x^N}$
processus de Langevin
$\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \mathrm{BB}$
primitives itérées du MB
$\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \, dB_s$
fonctionnelles additives du MB
$\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) |B_s|^\alpha \, ds$
primitive du MB
$\int_0^t B_s \, ds$

# Des problèmes

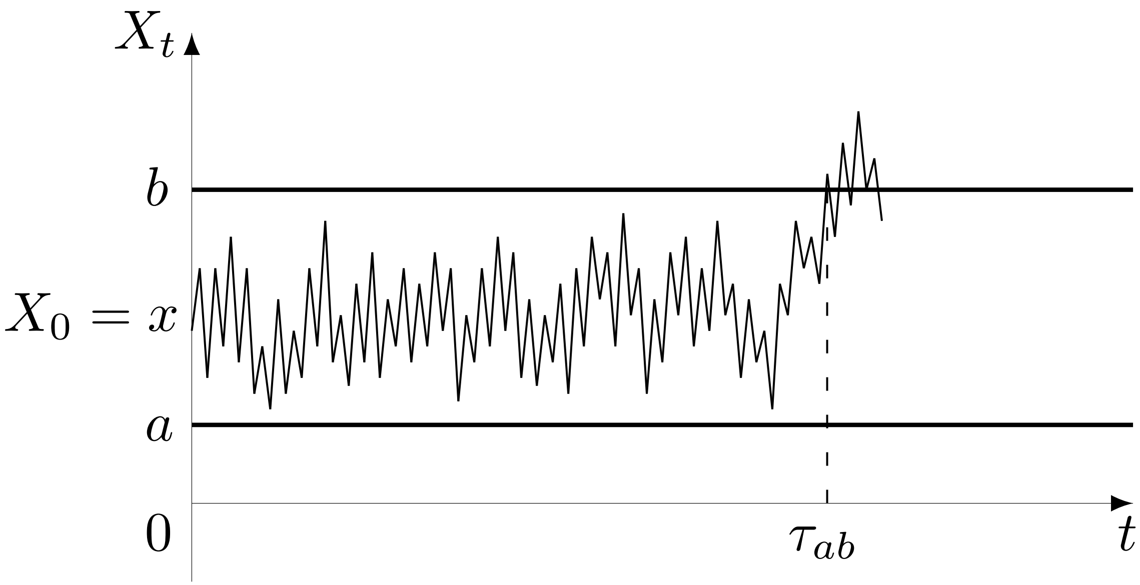
- Barrière simple : $\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant a\}}$




$\longrightarrow$ Problème associé : *loi de* $\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$ ?

$$\mathbb{P}\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s < a\} = \mathbb{P}\{\tau_a > t\}$$

- Barrière double : $\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin ]a, b[\}}$




$\longrightarrow$ Problème associé : *loi conjointe de* $\inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$ *et* $\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$ *?*

$$\mathbb{P}\{a < \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s \leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s < b\} = \mathbb{P}\{\tau_{ab} > t\}$$

- Barrière mobile : $\boxed{\tau_f = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant f(t)\}}$

- Passages successifs, excursions...

# Des techniques

- Équations différentielles, EDP, équations intégrales
  (Kolmogorov, Fokker-Planck, Feynman-Kac)

- Martingales
  (formule d'Itô, théorème d'arrêt de Doob)

- Approximation par échantillonage
  (lemme de Spitzer)

- Formule de Cameron-Martin-Girsanov

- Décomposition fines des trajectoires
  (excursions)...

# 1 Cas du mouvement brownien

Soient $\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \geqslant a\}}$ et $\begin{cases} u(x,t) &= \mathbb{P}_x\{\tau_a \in dt\}/dt \\ U_\lambda(x) &= \mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a}) \end{cases}$

## 1.1 EDP, équation différentielle

La fonction $u$ vérifie $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \text{ pour } x < a \\ u(a^-,t) = \delta,\ u(x,0^+) = 0 \end{cases}$

donc $U_\lambda$ vérifie $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 U_\lambda}{dx^2}(x) = \lambda U_\lambda(x) \text{ pour } x < a \\ U_\lambda(a^-) = 1,\ U_\lambda \text{ bornée} \end{cases}$

Solution : $\boxed{U_\lambda(x) = e^{\sqrt{2\lambda}(x-a)},\ x < a}$

## 1.2 Formule de Feynman-Kac

Soient $\boxed{T_{a,t} = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s \geqslant a\}}\, ds}$ et $V_{\lambda,\mu}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x(e^{-\mu T_{a,t}})\, dt.$

- La fonction $V_{\lambda,\mu}$ vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d^2V_{\lambda,\mu}}{dx^2}(x) = \begin{cases} (\lambda+\mu)V_{\lambda,\mu}(x) - 1 & \text{si } x > a \\ \lambda V_{\lambda,\mu}(x) - 1 & \text{si } x < a \end{cases} \\ V_{\lambda,\mu}(x)\ C^1 \text{ en } a \text{ et bornée} \end{cases}$$

- Solution : $V_{\lambda,\mu}(x) = \begin{cases} \alpha_{\lambda,\mu}\, e^{\sqrt{2(\lambda+\mu)}(x-a)} + \dfrac{1}{\lambda+\mu} & \text{si } x \geqslant a \\ \beta_{\lambda,\mu}\, e^{\sqrt{2(\lambda+\mu)}(x-a)} + \dfrac{1}{\lambda} & \text{si } x \leqslant a \end{cases}$

- Puis $\mathbb{E}_x(e^{-\mu T_{a,t}}) = \mathbb{E}_x[e^{-\mu T_{a,t}}\mathbb{1}_{\{\tau_a \leqslant t\}}] + \mathbb{P}_x\{\tau_a > t\} \underset{\mu\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_x\{\tau_a > t\}$

  et enfin : $\boxed{U_\lambda(x) = 1 - \lambda \lim_{\mu\to+\infty} V_{\lambda,\mu}(x) = e^{\sqrt{2\lambda}(x-a)} \text{ pour } x < a}$

## 1.3 Martingales

Soient $f(x,t) = e^{-\lambda t + \sqrt{2\lambda}\, x}$ et $M_t = f(B_t, t) = e^{-\lambda t + \sqrt{2\lambda}\, B_t}$.

- La formule d'Itô et la relation $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0$

$$\Longrightarrow (M_t)_{t \geqslant 0} \text{ est une martingale locale.}$$

- Théorème d'arrêt de Doob :

$$\liminf_{t \to +\infty} \mathbb{E}(M_t\, \mathbb{1}_{\{\tau_a > t\}}) = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}_x(M_{\tau_a}) = \mathbb{E}_x(M_0)$$

- Résultat : $\boxed{U_\lambda(x) = e^{\sqrt{2\lambda}(x-a)},\ x < a}$

## 1.4 Équation intégrale

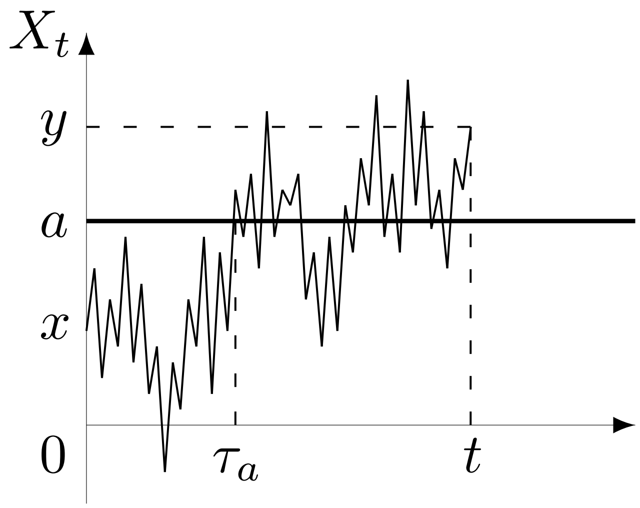
Soient $p_t(x,y) = \mathbb{P}_x\{B_t \in dy\}/dy$ et $\Phi_\lambda(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, p_t(x,y)\, dt$.

- Pour $x < a < y$ :

$$p_t(x,y) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\tau_a < t\}}\, \mathbb{P}_a\{B_{t-\tau_a} \in dy\}/dy] = \int_0^t \mathbb{P}_x\{\tau_a \in ds\} p_{t-s}(a,y)$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(x,y) &= U_\lambda(x)\Phi_\lambda(a,y) \\ \Longrightarrow \quad U_\lambda(x) &= \frac{\Phi_\lambda(x,y)}{\Phi_\lambda(a,y)} \\ \text{avec} \quad \Phi_\lambda(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\, e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|} \end{aligned}$$




- Résultat : $\boxed{U_\lambda(x) = e^{\sqrt{2\lambda}(x-a)},\ x < a}$

## 1.5 Approximation par échantillonage dyadique

Soit $B_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k/2^n}\, \mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(t)$.

On a

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x[e^{-\mu \sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s^{(n)}}]\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x[e^{-\mu \max_{0\leqslant j\leqslant k} B_{j/2^n}}]$$

$$= \quad \frac{1-e^{-\lambda/2^n}}{\lambda}\, e^{-\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda/2^n})^k \mathbb{E}_0[e^{-\mu \max_{0\leqslant j\leqslant k} B_{j/2^n}}]$$

(Lemme de Spitzer)

$$= \quad \frac{e^{-\mu x}}{\lambda}\, \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}[1-\mathbb{E}_0(e^{-\mu B^+_{k/2^n}})]\, \frac{(e^{-\lambda/2^n})^k}{k}\right]$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{e^{-\mu x}}{\lambda}\, \exp\left[-\int_0^\infty [1-\mathbb{E}_0(e^{-\mu B_t^+})]\, \frac{e^{-\lambda t}}{t}\, dt\right] = \frac{2\, e^{-\mu x}}{\sqrt{2\lambda}(\sqrt{2\lambda}+\mu)}$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s \in dy\}/dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \text{ pour } y > x}$$

## 1.6 Excursions

$$\boxed{U_\lambda(x) = e^{\sqrt{2\lambda}(x-a)},\ x < a}$$

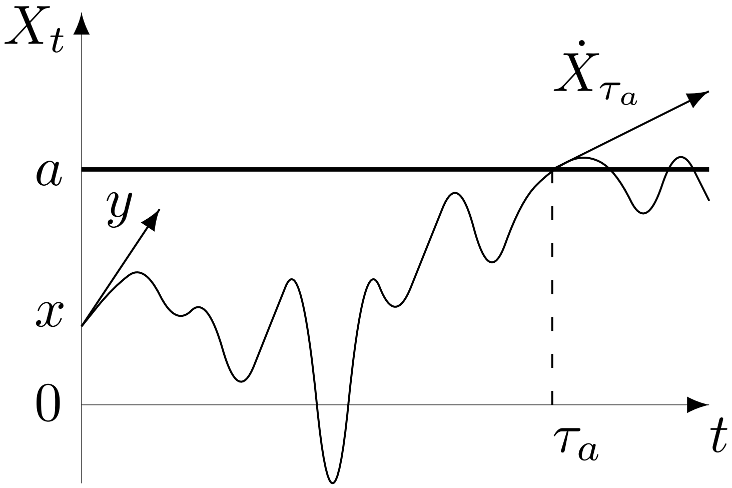
# 2 Processus de Langevin

Soit le processus régi par $\boxed{\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \text{bruit blanc.}}$

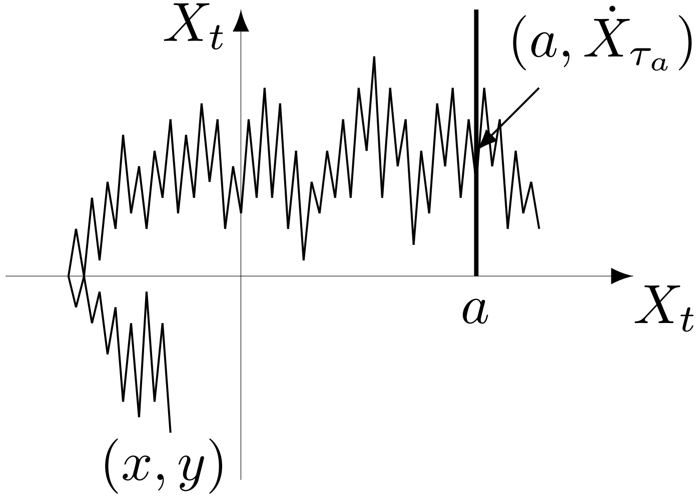
- Loi du couple $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$ : *problème ouvert excepté quelques cas.*

- Difficulté : $(X_t)_{t \geqslant 0}$ *est un processus* ***non-markovien*** *en général.*

  $\longrightarrow$ *Introduction du couple markovien* $(X_t, \dot{X}_t)$ *(diffusion 2D).*




Loi horaire $t \longmapsto X_t$




Courbe $t \longmapsto (X_t, \dot{X}_t)$

Position et vitesse initiales : $(X_0, \dot{X}_0) = (x, y)$

# La primitive du mouvement brownien ($\beta = \gamma = 0$)

Soient $\boxed{X_t = \int_0^t B_s \, ds}$ et $U(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda \tau_a + i\mu B_{\tau_a}}]$.

- La fonction $U$ vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) + y\,\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lambda\, U(x,y) \text{ pour } x < a \\ U(a^-, y) = e^{i\mu y} \text{ pour } y > 0 \end{cases}$$

- Résolution à l'aide de la transformation de Kontorovich-Lebedev :

$$\hat{f}(\zeta) = \int_0^\infty K_{i\zeta}(z)\, f(z)\; dz, \quad f(z) = \frac{2}{\pi z^2}\int_0^\infty K_{i\zeta}(z)\, \hat{f}(\zeta)\, \zeta \, \sinh(\pi\zeta)\, d\zeta$$

- Résultat partiel (McKean, 1963) ; pour $yz < 0$ :

$$\boxed{\mathbb{P}_{(a,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\}/dt\, dz = \frac{3|z|}{\pi\sqrt{2}\, t^2}\, e^{-2(y^2 - |yz| + z^2)/t} \int_0^{4|yz|/t} e^{-3\theta/2}\, \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}}$$

$\longrightarrow$ *Problème entièrement résolu.*

Réf. : McKean (1963), Lachal(1990–...)

## 2.1 La primitive du processus d'Ornstein-Uhlenbeck ($\gamma = 0$)

Soit $\boxed{X_t = \int_0^t O_s\, ds}$ où $O_t = \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\, dB_s$.

- Problème : *loi du couple* $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$ ?
- Solution : *série...*

  Réf. : Doering, Hagan & Levermore, Marshall & Watson

## 2.2 La primitive du mouvement brownien changée de temps ($\alpha = -4\gamma, \beta = 3\gamma$)

Soit $\boxed{X_t = e^{-\gamma t} Y_{(e^{3\gamma t}-1)/\gamma}}$ où $Y_t = \int_0^t B_s\, ds$.

- Problème : *loi du couple* $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$ ?
- Solution : *fonctions elliptiques...*

  Réf. : Rice, Shepp, Slepian, Wong

# 3 Les primitives itérées du MB

Soit $\boxed{X_t^{(n)} = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\, dB_s}$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Loi de $\tau_a$ : *problème ouvert pour $n \geqslant 2$.*

**Application : statistiques de Kolmogorov-Smirnov intégrées**

Soit $U_1, \ldots, U_N$ un échantillon de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

- On a la convergence de processus

$$\left(\sqrt{N}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{\{U_k \leqslant t\}} - t\right]\right)_{t\in[0,1]} \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{loi}} \text{pont brownien}$$

puis

$$\text{processus empiriques intégrés} \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{loi}} \begin{cases} \text{primitives du pont brownien} \\ \text{ou} \\ \text{pont des primitives du MB} \end{cases}$$

# Exemple : pont de la primitive itérée du MB

$$Y_t^{(n)} = \left( X_t^{(n)} \middle| \begin{array}{l} X_0^{(n-1)} = X_0^{(n-2)} = \cdots = X_0^{(1)} = B_0 = 0 \\ X_1^{(n-1)} = X_1^{(n-2)} = \cdots = X_1^{(1)} = B_1 = 0 \end{array} \right), \ t \in [0,1].$$

- On a l'identité $Y_t^{(n)} \stackrel{\text{loi}}{=} t^{2n+1}\, X_{1/t-1}^{(n)}$. On a besoin de

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\} = \mathbb{P}\{\sup_{t\geqslant 0}[X_t^{(n)} - x(t+1)^{2n+1}] < 0\}$$

$\longrightarrow$ *Problème de frontière mobile pour* $(X^{(n)})_{t\geqslant 0}$.

- On a

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\} = \mathbb{Q}^x\{\sup_{t\geqslant 0} X_t^{(n)} < 0\} = \mathbb{Q}^x\{\tau_0 = +\infty\}$$

où $\mathbb{Q}^x$ est une densité de Cameron-Martin-Girsanov.

- Cas $n = 1$ (primitive du mouvement brownien) :

$$\boxed{\mathbb{Q}^x\{\tau_0 = +\infty\} = 1 - e^{-6x^2}\, \mathbb{E}_{(-3x,x)}\left[e^{-6x^2(\tau_0+1)^3 - 6x(\tau_0+1)B_{\tau_0}}\right]}$$

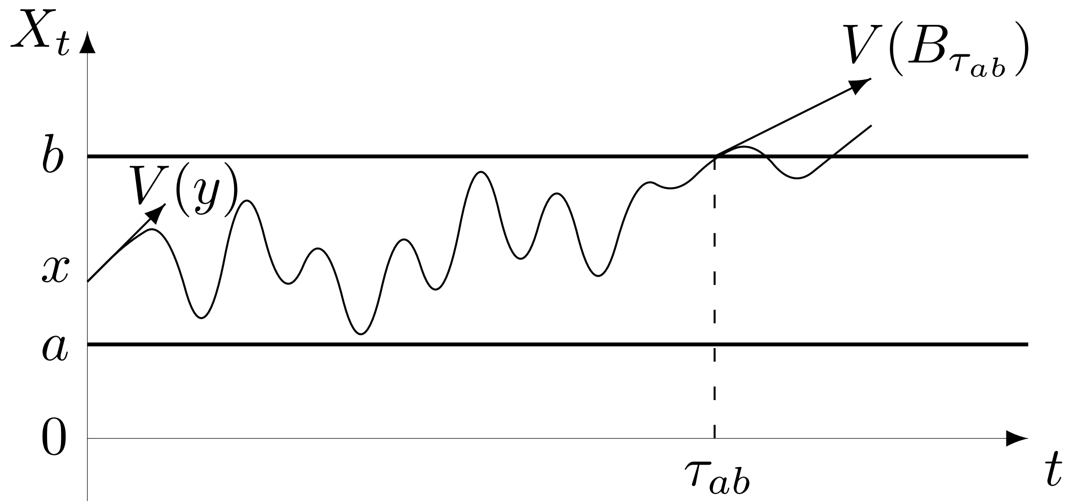
Réf. : Henze & Nikitin (2000), Lachal (2001)

# 4 Fonctionnelles additives du MB

Soit $\boxed{X_t = \int_0^t V(B_s)\,ds}$ où $V(y) = \begin{cases} y^\gamma & \text{si } y \geqslant 0 \\ -K\,|y|^\gamma & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$ et $K, \gamma > 0$.

- Problème : *loi de* $(\tau_{ab}, B_{\tau_{ab}})$ ?

$(X_0, B_0) = (x, y)$




- Résolution : *EDP+excursions+équation d'Abel généralisée.*

- Résultats partiels (Lachal, 2000) ; pour $x \in ]a,b[$ :

$$\boxed{\mathbb{P}_{(x,0)}\{B_{\tau_{ab}} \in dz\}/dz = \begin{cases} \text{constante} \times \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{-\alpha} \dfrac{z^{\gamma-\alpha(\gamma+2)}}{(b-x)^{1-\alpha-1/(\gamma+2)}} \\ \times e^{-z^{\gamma+2}/A(b-x)}\, M\Big(-\alpha; 1-\alpha; \dfrac{x-a}{b-x}\, \dfrac{z^{\gamma+2}}{A(b-a)}\Big) \\ \qquad\qquad \text{pour } z > 0 \\ \text{expression similaire pour } z < 0 \end{cases}}$$

où $\alpha = -\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arccot}\left[\dfrac{K^{-1/(\gamma+2)} + \cos\frac{\pi}{\gamma+2}}{\sin\frac{\pi}{\gamma+2}}\right].$

$$\boxed{\mathbb{P}_{(x,0)}\{\tau_b < \tau_a\} = \text{constante} \times \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{-\alpha} {}_2F_1\Big(-\alpha, \frac{\gamma+1}{\gamma+2} - \alpha; 1-\alpha; \frac{x-a}{b-a}\Big)}$$

Réf. : Franklin & Rodemich (1968), Masoliver & Porrà (1995), Lachal (2000)

# 5 Pseudo-processus browniens

Considérons l'équation de la chaleur d'ordre $N > 2$ : $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \pm \dfrac{\partial^N u}{\partial x^N}}$

- La solution fondamentale $p(t, x)$ est caractérisée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} p(t, x)\, dx = e^{\pm t(iu)^N}.$$

- Définition d'un processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ selon

$$\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = p_t(x, y)\, dy = p(t, x - y)\, dy$$

et pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $x_0 = x$,

$$\mathbb{P}_x(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_n} \in dx_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i)\, dx_i.$$

- Difficulté : *pseudo-processus markovien gouverné par une mesure signée de variation totale infinie (qui **n'est pas** une probabilité)*
$\longrightarrow$ *Définition « correcte » pour les distributions fini-dimensionnelles.*

# Définition par discrétisation du temps

Processus échantillonné $X_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/2^n} \, \mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(t)$.

- Formule de Spitzer (en temps continu) :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \, \mathbb{E}_x[e^{-\mu \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s + i\nu X_t}] \, dt$$
$$= \frac{e^{(-\mu+i\nu)x}}{\lambda} \exp\left[ - \int_0^\infty [1 - \mathbb{E}_0[e^{-\mu X_t^+ + i\nu X_t}] \, \frac{e^{-\lambda t}}{t} \, dt \right]$$

- Inversion de la transformée de Laplace-Fourier en $\mu$ et $\nu$ ; pour $x, z \leqslant y$ :

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dt \, \mathbb{P}_x\{ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \in dy, X_t \in dz\}/dy \, dz = \sum_{\substack{\Re(\theta_k)>0 \\ \Re(\theta_l)<0}} c_k e^{\theta_k \lambda^{1/N}(x-y) + \theta_k \lambda^{1/N}(y-z)}}$$

où $\theta_k^N = \theta_l^N = \pm 1$ et les $c_k$ sont des constantes.

$\longrightarrow$ *« loi » conjointe du couple* $(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s, X_t)$.

- Puis relation entre les couples $(\tau_a, X_{\tau_a})$ et $(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s, X_t)$ :

$$\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a+i\mu X_{\tau_a}}) = e^{i\mu x} - [\lambda \pm (i\mu)^N] \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x\left[e^{i\mu X_t}\, \mathbb{1}_{\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant a\}}\right] dt$$

- Inversion de la transformée de Fourier en $\mu$ (Lachal, 2004) ; pour $x > a$ :

$$\boxed{\mathbb{E}_x(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy)/dy = \sum_{0\leqslant j\leqslant N/2} \left[\sum_{\Re(\theta_k)<0} e^{\theta_k \lambda^{1/N}(x-a)}\right] \frac{\delta_a^{(j)}(dy)}{\lambda^{j/N}}}$$

$\longrightarrow$ *« loi » conjointe « distributionnelle » du couple* $(\tau_a, X_{\tau_a})$.

- Pour $\lambda = 0$ : $\boxed{\mathbb{P}_x\{X_{\tau_a} \in dy\}/dy = \sum_{0\leqslant j\leqslant N/2} (-1)^j \frac{(x-a)^j}{j!}\, \delta_a^{(j)}(dy)}$

Remarque : *beaucoup de calculs formels...*

Réf. : Hochberg (1978), Orsingher et al. (1991–...), Nishioka (1997–...), Lachal (2002–...)