

**Mouvement brownien
Pseudo-mouvement brownien
et EDP. Applications**

Aimé LACHAL

Institut Camille Jordan

INSA DE LYON

Première partie :

**Mouvement brownien
et**

EDP d'ordre 2

1 De la chaleur au mouvement brownien

1 De la chaleur au mouvement brownien

- Équation de la chaleur (normalisée) en dimension d

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) = \frac{1}{2} \Delta u(t; x) \\ u(0; x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}$ est le laplacien d -dimensionnel.

1 De la chaleur au mouvement brownien

- *Solution élémentaire (noyau de la chaleur)*

$$p(t; x) = \frac{e^{-\|x\|^2/(2t)}}{(2\pi t)^{d/2}}$$

1 De la chaleur au mouvement brownien

- *Solution élémentaire (noyau de la chaleur)*

$$p(t; x) = \frac{e^{-\|x\|^2/(2t)}}{(2\pi t)^{d/2}}$$

—→ *définit la densité de probabilité d'une v.a. gaussienne B_t (à t fixé)*

$$\mathbb{P}\{B_t \in dx\}/dx \stackrel{\text{déf}}{=} p(t; x)$$

1 De la chaleur au mouvement brownien

- Solution élémentaire (noyau de la chaleur)

$$p(t; x) = \frac{e^{-\|x\|^2/(2t)}}{(2\pi t)^{d/2}}$$

—→ **définit la densité de probabilité d'une v.a. gaussienne B_t (à t fixé)**

$$\mathbb{P}\{B_t \in dx\}/dx \stackrel{\text{déf}}{=} p(t; x)$$

—→ **définit un processus de Markov $(B_t)_{t \geq 0}$ (à temps continu)**

$$\mathbb{P}\{B_{t_1} \in dx_1, \dots, B_{t_n} \in dx_n\}/dx_1 \dots dx_n \\ \stackrel{\text{déf}}{=} p(t_1; x_1)p(t_2 - t_1; x_2 - x_1) \dots p(t_n - t_{n-1}; x_n - x_{n-1})$$

1 De la chaleur au mouvement brownien

- Solution élémentaire (noyau de la chaleur)

$$p(t; x) = \frac{e^{-\|x\|^2/(2t)}}{(2\pi t)^{d/2}}$$

→ définit la densité de probabilité d'une v.a. gaussienne B_t (à t fixé)

$$\mathbb{P}\{B_t \in dx\}/dx \stackrel{\text{déf}}{=} p(t; x)$$

→ définit un processus de Markov $(B_t)_{t \geq 0}$ (à temps continu)

$$\mathbb{P}\{B_{t_1} \in dx_1, \dots, B_{t_n} \in dx_n\}/dx_1 \dots dx_n \\ \stackrel{\text{déf}}{=} p(t_1; x_1)p(t_2 - t_1; x_2 - x_1) \dots p(t_n - t_{n-1}; x_n - x_{n-1})$$

→ définit des densités de transition

$$q(t; x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{P}_x\{B_t \in dy\}/dy = \mathbb{P}\{B_{s+t} \in dy | B_s = x\}/dy = p(t; y-x)$$

1 De la chaleur au mouvement brownien

- Équations de Kolmogorov (1931)

1 De la chaleur au mouvement brownien

- Équations de Kolmogorov (1931)

- *rétrograde (backward)* :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t; x, y) = \frac{1}{2} \Delta_x q(t; x, y)$$

1 De la chaleur au mouvement brownien

- Équations de Kolmogorov (1931)

– *rétrograde (backward)* :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t; x, y) = \frac{1}{2} \Delta_x q(t; x, y)$$

– *progressive (forward, alias Fokker-Planck)* :

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t; x, y) = \frac{1}{2} \Delta_y^* q(t; x, y)$$

où Δ^* est l'adjoint de Δ (ici $\Delta^* = \Delta$).

En passant par la diffusion...

En passant par la diffusion...

- EDS en dimension 1

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

En passant par la diffusion...

- EDS en dimension 1

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

- Équations de Kolmogorov

La densité de transition $q(t; x, y) = \mathbb{P}_x\{X_t \in dy\} / dy$ vérifie

En passant par la diffusion...

- EDS en dimension 1

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

- Équations de Kolmogorov

La densité de transition $q(t; x, y) = \mathbb{P}_x\{X_t \in dy\} / dy$ vérifie

– l'éq. rétrograde : soit $\mathcal{D}_x \varphi(x) = \frac{1}{2} \sigma(x)^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) + b(x) \frac{d\varphi}{dx}(x)$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t; x, y) = \mathcal{D}_x q(t; x, y)$$

En passant par la diffusion...

- EDS en dimension 1

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

- Équations de Kolmogorov

La densité de transition $q(t; x, y) = \mathbb{P}_x\{X_t \in dy\} / dy$ vérifie

– l'éq. rétrograde : soit $\mathcal{D}_x \varphi(x) = \frac{1}{2} \sigma(x)^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(x) + b(x) \frac{d\varphi}{dx}(x)$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t; x, y) = \mathcal{D}_x q(t; x, y)$$

– l'éq. progressive : soit $\mathcal{D}_y^* \varphi(y) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} [\sigma(y)^2 \varphi(y)] - \frac{d}{dy} [(b(y) \varphi(y))]$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t; x, y) = \mathcal{D}_y^* q(t; x, y)$$

2 Du mouvement brownien au laplacien

2 Du mouvement brownien au laplacien

- Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

2 Du mouvement brownien au laplacien

- Problème de Dirichlet

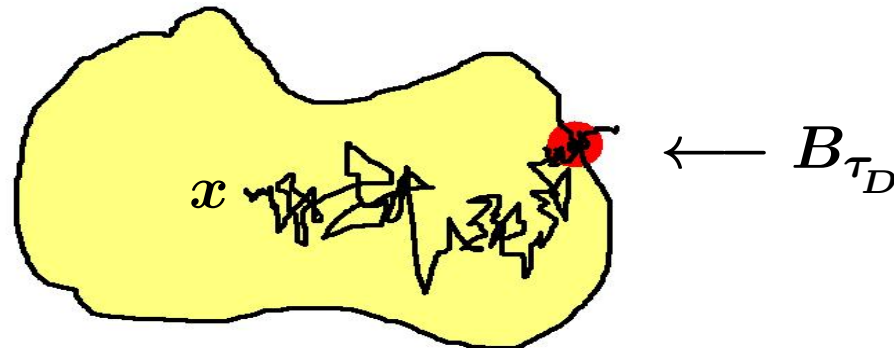
$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

→ **solution :**

$$u(x) = \mathbb{E}_x [\varphi(B_{\tau_D})]$$

où τ_D est le premier instant de sortie du MB de D :

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : B_t \notin D\} = \inf\{t > 0 : B_t \in \partial D\}$$



2 Du mouvement brownien au laplacien

- Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

→ **solution :**

$$u(x) = \mathbb{E}_x [\varphi(B_{\tau_D})]$$

où τ_D est le premier instant de sortie du MB de D :

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : B_t \notin D\} = \inf\{t > 0 : B_t \in \partial D\}$$

→ **simulation par méthode de Monte-Carlo :**

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_1 + \dots + \Phi_n}{n}$$

où $\Phi_i = \varphi(B_{\tau_i}^i)$, les B^1, B^2, \dots étant des mouvements browniens indépendants et τ_1, τ_2, \dots les temps de sortie de D associés.

2 Du mouvement brownien au laplacien

- Problème de Poisson

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta v(x) = -\psi(x), & x \in D \\ v(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

2 Du mouvement brownien au laplacien

- Problème de Poisson

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta v(x) = -\psi(x), & x \in D \\ v(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

→ **solution :**

$$v(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_D} \psi(B_t) dt \right]$$

2 Du mouvement brownien au laplacien

- Problème de Poisson

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta v(x) = -\psi(x), & x \in D \\ v(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

→ **solution :**

$$v(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_D} \psi(B_t) dt \right]$$

Exemple : $\psi(x) = 1$

$$v(x) = \mathbb{E}_x(\tau_D) \text{ vérifie } \begin{cases} \frac{1}{2} \Delta v(x) = -1, & x \in D \\ v(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

En passant par le laplacien itéré...

En passant par le laplacien itéré...

- *Problème de Riquier*

Soit $v_n(x) = \mathbb{E}_x(\tau_D^n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

En passant par le laplacien itéré...

- *Problème de Riquier*

Soit $v_n(x) = \mathbb{E}_x(\tau_D^n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

→ v_n est solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta v_n(x) = -n v_{n-1}(x), & x \in D \\ v_n(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

En passant par le laplacien itéré...

• Problème de Riquier

Soit $v_n(x) = \mathbb{E}_x(\tau_D^n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

→ v_n est solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta v_n(x) = -n v_{n-1}(x), & x \in D \\ v_n(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

et par itération :

$$\boxed{\begin{cases} (\frac{1}{2} \Delta)^n v_n(x) = (-1)^n n!, & x \in D \\ v_n(x) = \Delta v_n(x) = \dots = \Delta^{n-1} v_n(x) = 0, & x \in \partial D \end{cases}}$$

En passant par le laplacien itéré...

- Problème de Lauricella

Un problème d'élasticité : déformations des poutres et des plaques encastées.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^n u(x) = \varphi(x), & x \in D \\ u(x) = \psi_0(x), & x \in \partial D \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x) = \psi_1(x), & x \in \partial D \\ \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial^{n-1} \vec{\nu}}(x) = \psi_{n-1}(x), & x \in \partial D \end{array} \right.$$

où $\vec{\nu}$ est la normale extérieure à D .

3 Du laplacien au lois browniennes

3 Du laplacien au lois browniennes

- Premier temps d'atteinte de ∂D

Soit $\tau_D = \inf\{t > 0 : B_t \in \partial D\}$ et $u(x) = \mathbb{E}_x [e^{-\lambda \tau_D} \varphi(B_{\tau_D})]$.

La fonction $u(x)$ caractérise la loi conjointe de (τ_D, B_{τ_D}) .



3 Du laplacien au lois browniennes

- Premier temps d'atteinte de ∂D

Soit $\tau_D = \inf\{t > 0 : B_t \in \partial D\}$ et $u(x) = \mathbb{E}_x [e^{-\lambda\tau_D} \varphi(B_{\tau_D})]$.

La fonction $u(x)$ caractérise la loi conjointe de (τ_D, B_{τ_D}) .

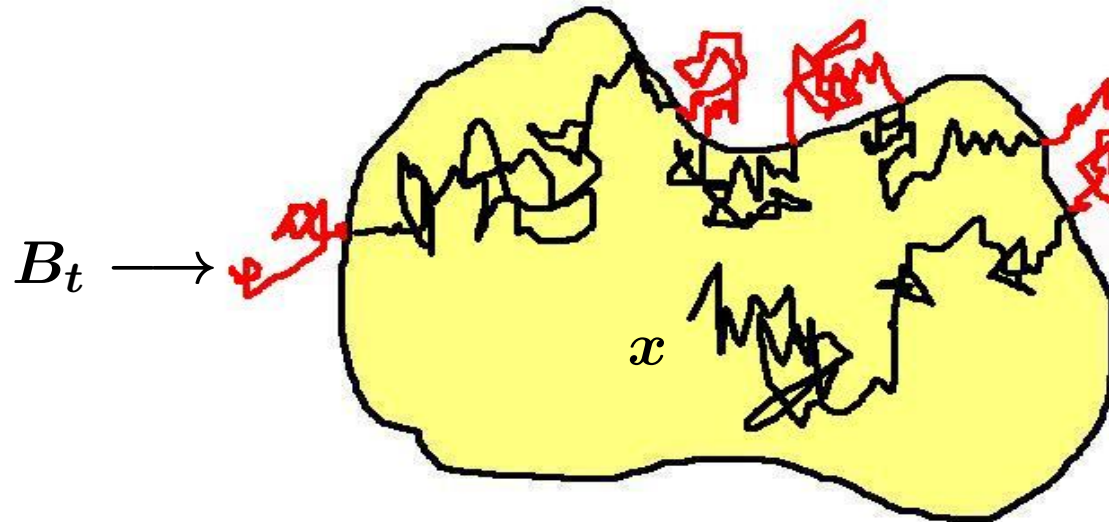
→ u est solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in D \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial D \end{cases}$$

3 Du laplacien au lois browniennes

- Temps de séjour dans D

Soit $T_{D,t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : B_s \in D\}$ et $u(t; x) = \mathbb{E}_x[e^{-\mu T_{D,t}} \varphi(B_t)]$.
La fonction $u(t; x)$ caractérise la loi conjointe de $(T_{D,t}, B_t)$.



3 Du laplacien au lois browniennes

- Temps de séjour dans D

Soit $T_{D,t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : B_s \in D\}$ et $u(t; x) = \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{D,t}} \varphi(B_t)]$.

La fonction $u(t; x)$ caractérise la loi conjointe de $(T_{D,t}, B_t)$.

—→ u est solution de l'équation de Feynman-Kac (1949)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) = \frac{1}{2} \Delta u(t; x) - \mu \mathbb{1}_D(x) u(t; x), & x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial D \\ u(0; x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

3 Du laplacien au lois browniennes

- Temps de séjour dans D

Soit $T_{D,t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : B_s \in D\}$ et $u(t; x) = \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{D,t}} \varphi(B_t)]$.
La fonction $u(t; x)$ caractérise la loi conjointe de $(T_{D,t}, B_t)$.

→ u est solution de l'équation de Feynman-Kac (1949)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) = \frac{1}{2} \Delta u(t; x) - \mu \mathbb{1}_D(x) u(t; x), & x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial D \\ u(0; x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Soit $U(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(t; x) dt$.

→ U est solution de

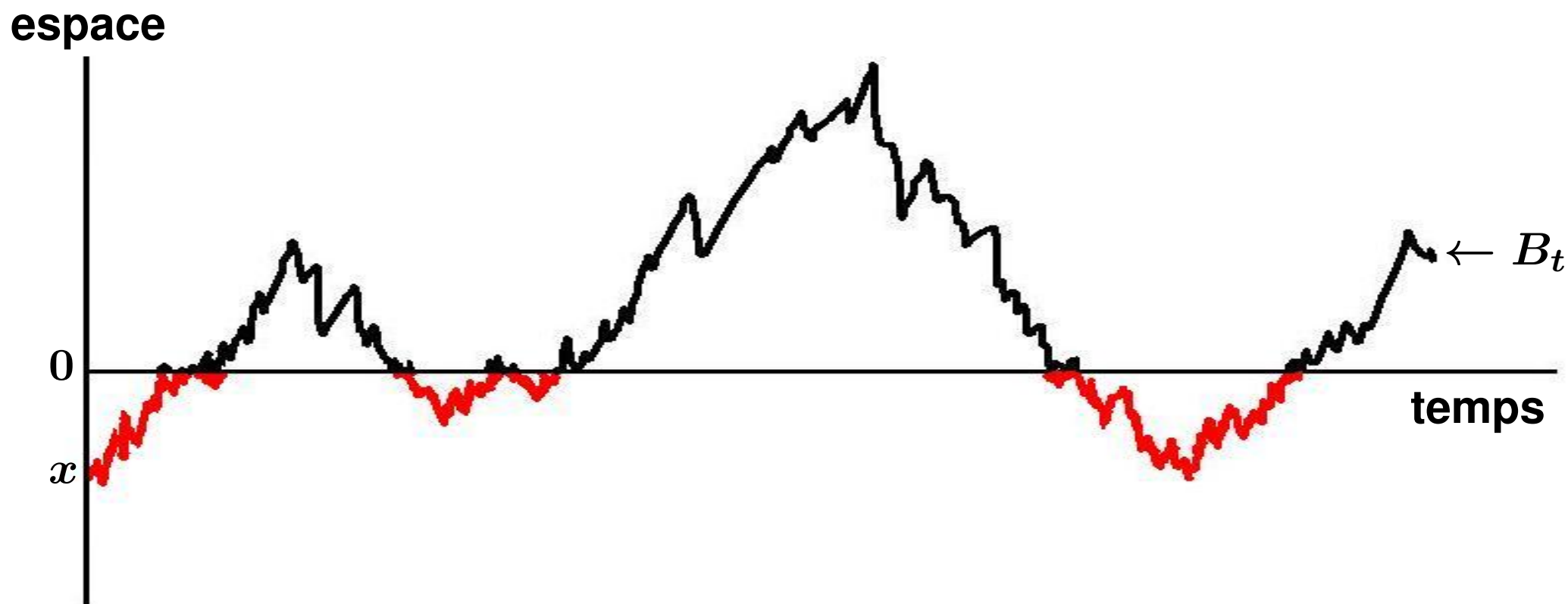
$$\frac{1}{2} \Delta U(x) = (\lambda + \mu \mathbb{1}_D(x)) U(x) - \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial D$$

3 Du laplacien au lois browniennes

- Exemples en dimension 1

- Temps de séjour dans $[0, +\infty[$

Soit $T_{0,t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : B_s \geq 0\}$.



3 Du laplacien au lois browniennes

- Exemples en dimension 1

– *Temps de séjour dans* $[0, +\infty[$

Soit $T_{0,t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : B_s \geq 0\}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_0 [e^{-\mu T_{0,t}}] dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda + \mu)}}$$

→ *loi de l'arc-sinus de Paul Lévy (1939)*

$\mathbb{P}_0\{T_{0,t} \in ds\}/ds = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}}, \quad \mathbb{P}_0\{T_{0,t} \leq s\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}$
--

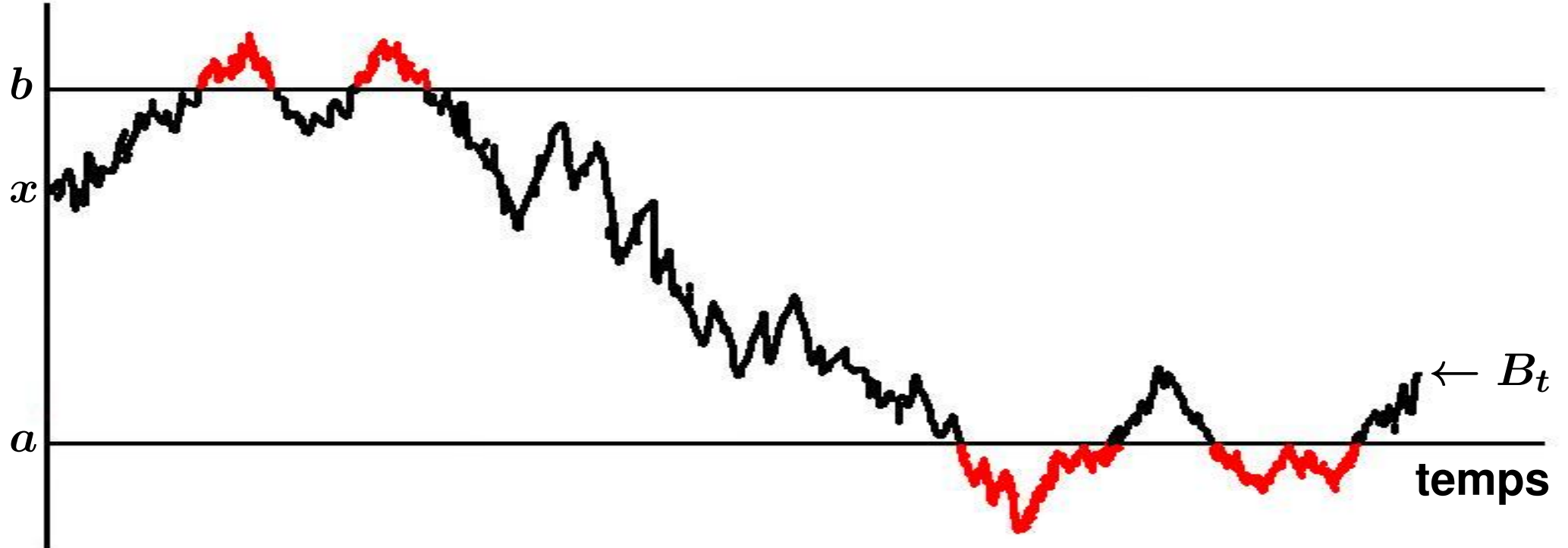
3 Du laplacien au lois browniennes

- Exemples en dimension 1

- *Temps de séjour dans $[a, b]$*

Soit $T_{[a,b],t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : B_s \in [a, b]\}$.

espace



3 Du laplacien au lois browniennes

• Exemples en dimension 1

– *Temps de séjour dans* $[a, b]$

Soit $T_{[a,b],t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : B_s \in [a, b]\}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{[a,b],t}}] dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda+\mu}} \frac{\sinh(\star) e^{\sqrt{\lambda}(x-a)}}{\sqrt{\lambda} \cosh(\star) + \sqrt{\lambda+\mu} \sinh(\star)} \right] & \text{pour } x \in]-\infty, a[\\ \frac{1}{\lambda+\mu} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \frac{\cosh(\sqrt{\lambda+\mu}(x-(a+b)/2))}{\sqrt{\lambda} \cosh(\star) + \sqrt{\lambda+\mu} \sinh(\star)} \right] & \text{pour } x \in [a, b] \\ \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda+\mu}} \frac{\sinh(\star) e^{\sqrt{\lambda}(b-x)}}{\sqrt{\lambda} \cosh(\star) + \sqrt{\lambda+\mu} \sinh(\star)} \right] & \text{pour } x \in [a, +\infty[\end{cases}$$

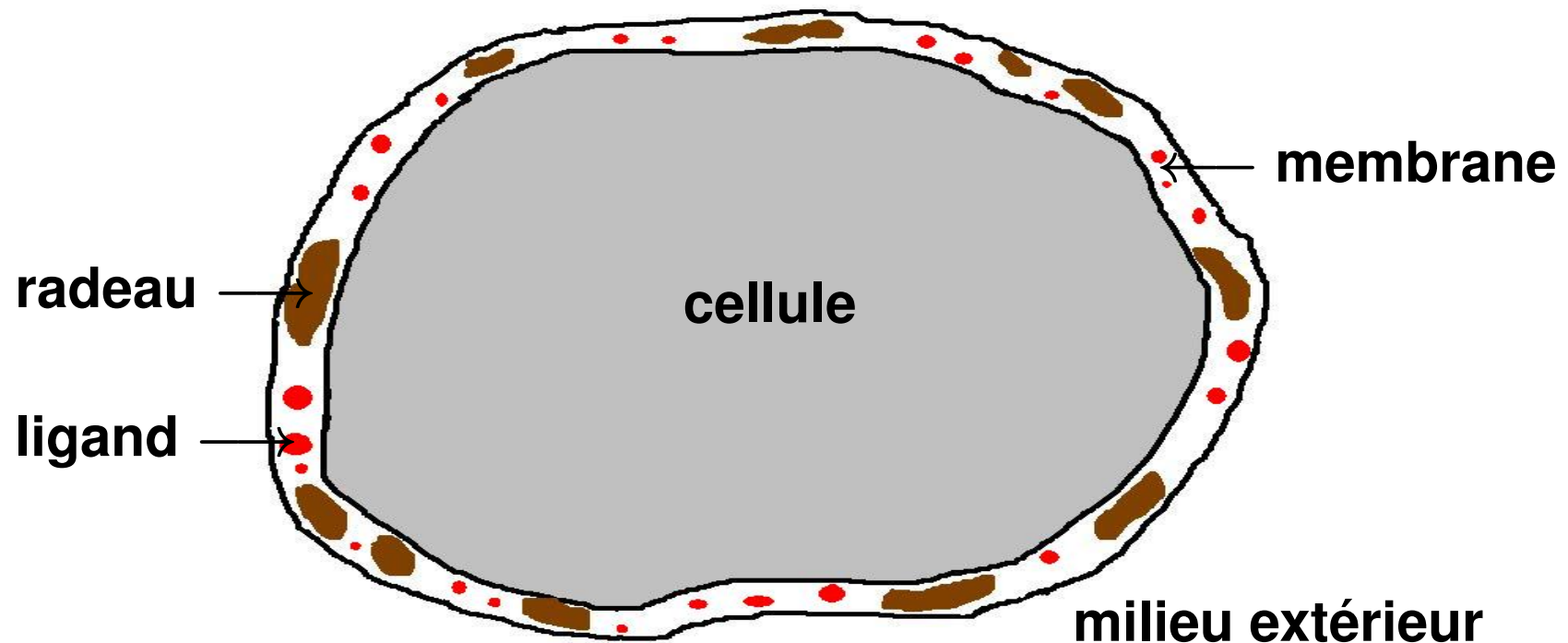
où « \star » = $\frac{1}{2} \sqrt{\lambda + \mu} (y - x)$.

4 Des lois browniennes à la biologie

4 Des lois browniennes à la biologie

● Description

- *Membrane plasmique* : mosaïque fluide inhomogène composée de plusieurs types de constituants animés de mouvements erratiques.
- *Inhomogénéités* : radeaux (« rafts ») lipidiques vus comme des amas de récepteurs.
- *Autres constituants erratiques* : ligands.



4 Des lois browniennes à la biologie

- Description

- *Membrane plasmique* : mosaïque fluide inhomogène composée de plusieurs types de constituants animés de mouvements erratiques.
- *Inhomogénéités* : radeaux (« rafts ») lipidiques vus comme des amas de récepteurs.
- *Autres constituants erratiques* : ligands.

- Une variable d'intérêt

- « *Docking time* » : temps d'accrochage des ligands aux récepteurs, indicateur d'affinité et de sensibilité.

4 Des lois browniennes à la biologie

● Description

- *Membrane plasmique* : mosaïque fluide inhomogène composée de plusieurs types de constituants animés de mouvements erratiques.
- *Inhomogénéités* : radeaux (« rafts ») lipidiques vus comme des amas de récepteurs.
- *Autres constituants erratiques* : ligands.

● Une variable d'intérêt

- « *Docking time* » : temps d'accrochage des ligands aux récepteurs, indicateur d'affinité et de sensibilité.

● Une modélisation linéaire naïve

- *Membrane* : droite \mathbb{R} (ou courbe fermée de \mathbb{R}^2).
- *Ligands* : ℓ mouvements browniens indépendants L_1, \dots, L_ℓ .
- *Récepteurs* : r intervalles disjoints $R_1=[a_1, b_1], \dots, R_r=[a_r, b_r]$,

$$\mathcal{R} = R_1 \cup \dots \cup R_r.$$

4 Des lois browniennes à la biologie

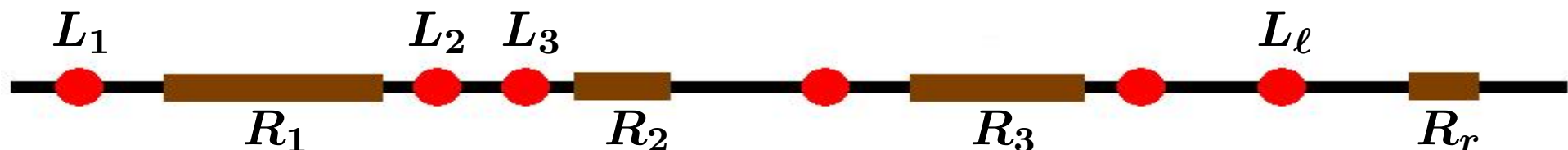
- Description

- *Membrane plasmique* : mosaïque fluide inhomogène composée de plusieurs types de constituants animés de mouvements erratiques.
- *Inhomogénéités* : radeaux (« rafts ») lipidiques vus comme des amas de récepteurs.
- *Autres constituants erratiques* : ligands.

- Une variable d'intérêt

- « *Docking time* » : temps d'accrochage des ligands aux récepteurs, indicateur d'affinité et de sensibilité.

- Une modélisation linéaire naïve



4 Des lois browniennes à la biologie

- Calcul de la loi du temps d'amarrage pour un ligand L

Soit

$$T_{\mathcal{R},t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : L_s \in \mathcal{R}\}, \quad U(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{\mathcal{R},t}}] dt.$$

4 Des lois browniennes à la biologie

• Calcul de la loi du temps d'amarrage pour un ligand L

Soit

$$T_{\mathcal{R},t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : L_s \in \mathcal{R}\}, \quad U(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{\mathcal{R},t}}] dt.$$

→ U est solution de

$$\frac{1}{2} \Delta U(x) = \begin{cases} (\lambda + \mu)U(x) - 1, & x \in]a_1, b_1[\cup \dots \cup]a_r, b_r[\\ \lambda U(x) - 1, & x \in]-\infty, a_1[\cup]b_1, a_2[\cup \dots \cup]b_r, +\infty[\end{cases}$$

avec les conditions $\begin{cases} U \text{ de classe } C^1 \text{ en } a_1, b_1, \dots, a_r, b_r \\ U \text{ bornée sur } \mathbb{R} \end{cases}$

4 Des lois browniennes à la biologie

• Calcul de la loi du temps d'amarrage pour un ligand L

Soit

$$T_{\mathcal{R},t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : L_s \in \mathcal{R}\}, \quad U(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{\mathcal{R},t}}] dt.$$

→ U est solution de

$$\frac{1}{2} \Delta U(x) = \begin{cases} (\lambda + \mu)U(x) - 1, & x \in]a_1, b_1[\cup \dots \cup]a_r, b_r[\\ \lambda U(x) - 1, & x \in]-\infty, a_1[\cup]b_1, a_2[\cup \dots \cup]b_r, +\infty[\end{cases}$$

avec les conditions $\begin{cases} U \text{ de classe } C^1 \text{ en } a_1, b_1, \dots, a_r, b_r \\ U \text{ bornée sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Références :

- *A random walk model related to the clustering of membrane receptors.*
In « Random Walks: Principles, Processes and Applications », 2010
- *Sojourn time in an union of intervals for diffusions.* Soumis

Deuxième partie :

**EDP d'ordre supérieur à 2
et
pseudo-mouvement brownien**

1 La chaleur à l'ordre supérieur (première version)

1 La chaleur à l'ordre supérieur (première version)

- Le mouvement brownien itéré

Soit

$$X_t = B_{B_{B^3}^2}^1$$

où B^1, \dots, B^n sont des mouvements browniens réfléchis indépendants.

Soit $p(t; x) = \mathbb{P}\{X_t \in dx\}/dx$ la densité de X_t à t fixé.

1 La chaleur à l'ordre supérieur (première version)

- Le mouvement brownien itéré

Soit

$$X_t = B_{B^2}^{B^1}_{B^3} \dots B_t^n$$

où B^1, \dots, B^n sont des mouvements browniens réfléchis indépendants.

Soit $p(t; x) = \mathbb{P}\{X_t \in dx\}/dx$ la densité de X_t à t fixé.

→ p est solution d'une équation de la chaleur d'ordre supérieur

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t; x) = \frac{1}{2^{2^n - 1}} \frac{\partial^{2^n} p}{\partial x^{2^n}}(t; x)$$

2 La chaleur à l'ordre supérieur (seconde version)

2 La chaleur à l'ordre supérieur (seconde version)

- Équation de la chaleur d'ordre $2n > 2$ en dimension 1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}(t; x) \\ u(0; x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

2 La chaleur à l'ordre supérieur (seconde version)

- Équation de la chaleur d'ordre $2n > 2$ en dimension 1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}(t; x) \\ u(0; x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

- Solution élémentaire p (noyau de la chaleur d'ordre $2n$)

→ caractérisée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} p(t; x) dx = e^{-tv^{2n}}$$

→ satisfait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t; x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xp(t; x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(t; x) dx = 0$$

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Rôle de p

→ définit la densité **signée** d'une **pseudo-variable aléatoire** X_t
(à t fixé)

$$\mathbb{P}_x\{X_t \in dy\}/dy \stackrel{\text{déf}}{=} p(t; x - y)$$

→ définit un **pseudo-processus de Markov** $(X_t)_{t \geq 0}$

$$\mathbb{P}_x\{X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_m} \in dx_m\}/dx_1 \dots dx_m$$
$$\stackrel{\text{déf}}{=} p(t_1; x - x_1)p(t_2 - t_1; x_1 - x_2) \dots p(t_m - t_{m-1}; x_{m-1} - x_m)$$

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Temps de séjour dans $[a, +\infty[$

Soit $T_{a,t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : X_s \geq a\}$

et $u(t; x) = \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{a,t}} \varphi(X_t)] \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-\frac{t}{m} \sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{X_{kt/m} > a\}}} \varphi(X_t) \right]$.

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Temps de séjour dans $[a, +\infty[$

Soit $T_{a,t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : X_s \geq a\}$

et $u(t; x) = \mathbb{E}_x [e^{-\mu T_{a,t}} \varphi(X_t)] \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-\frac{t}{m} \sum_{k=0}^m \mathbf{1}_{\{X_{kt/m} > a\}}} \varphi(X_t) \right]$.

→ u est solution de (équation de Feynman-Kac)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}(t; x) - \mu \mathbf{1}_{[a, +\infty[}(x) u(t; x) \\ u(0; x) = \varphi(x) \end{cases}$$

3 Le pseudo-mouvement brownien

Soit $U(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x \left[e^{-\mu T_{a,t}} \varphi(X_t) \right] dt.$

→ U est solution de

$$\left(-1 \right)^{n-1} \frac{d^{2n} U}{dx^{2n}}(x) = \begin{cases} (\lambda + \mu)U(x) - \varphi(x), & x \in]a, +\infty[\\ \lambda U(x) - \varphi(x) & x \in]-\infty, a[\end{cases}$$

avec les conditions $\begin{cases} U \text{ de classe } C^{2n-1} \text{ en } a \\ U \text{ bornée} \end{cases}$

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Résolution

- Le système peut être résolu explicitement.

(avec de l'algèbre linéaire de Vandemonde)

- La double transformée de Laplace peut être inversée.

(apparition de la fonction de Mittag-Leffler)

—→ *On obtient explicitement la pseudo-loi de $(T_{\alpha,t}, X_t)$ sous \mathbb{P}_x .*

(Références : V. Cammarota & A. L., EJP 2010 et SPA 2011)

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Résolution

- Le système peut être résolu explicitement.

(avec de l'algèbre linéaire de Vandemonde)

- La double transformée de Laplace peut être inversée.

(apparition de la fonction de Mittag-Leffler)

→ *On obtient explicitement la pseudo-loi de $(T_{a,t}, X_t)$ sous \mathbb{P}_x .*

(Références : V. Cammarota & A. L., EJP 2010 et SPA 2011)

- Un résultat historique (loi de l'arc-sinus, Krylov, 1960)

$$\mathbb{P}_0\{T_{0,t} \in ds\}/ds = \frac{\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}{\pi\sqrt{s(t-s)}}$$

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Résolution

- Le système peut être résolu explicitement.

(avec de l'algèbre linéaire de Vandemonde)

- La double transformée de Laplace peut être inversée.

(apparition de la fonction de Mittag-Leffler)

→ *On obtient explicitement la pseudo-loi de $(T_{a,t}, X_t)$ sous \mathbb{P}_x .*

(Références : V. Cammarota & A. L., EJP 2010 et SPA 2011)

- Un résultat historique (loi de l'arc-sinus, Krylov, 1960)

$$\mathbb{P}_0\{T_{0,t} \in ds\}/ds = \frac{\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}{\pi\sqrt{s(t-s)}}$$

- Un problème ouvert : calcul de la pseudo-loi de

$$T_{[a,b],t} = \text{mes}\{s \in [0, t] : X_s \in [a, b]\} ?$$

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Temps de sortie de $[a, b]$

Soit $\tau_{ab} = \inf\{t > 0 : X(t) \notin [a, b]\}$ **et** $u(x) = \mathbb{E}_x[e^{-\lambda\tau_{ab}}\varphi(X_{\tau_{ab}})]$.

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Temps de sortie de $[a, b]$

Soit $\tau_{ab} = \inf\{t > 0 : X(t) \notin [a, b]\}$ et $u(x) = \mathbb{E}_x[e^{-\lambda\tau_{ab}}\varphi(X_{\tau_{ab}})]$.

→ u est solution de (A. L., conjecture en cours)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{2n}u}{dx^{2n}}(x) = \lambda u(x) \text{ pour } x \in]a, b[\\ \forall p \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{d^p u}{dx^p}(a) = \frac{d^p \varphi}{dx^p}(a) \text{ et } \frac{d^p u}{dx^p}(b) = \frac{d^p \varphi}{dx^p}(b) \end{array} \right.$$

3 Le pseudo-mouvement brownien

- Temps de sortie de $[a, b]$

Soit $\tau_{ab} = \inf\{t > 0 : X(t) \notin [a, b]\}$ et $u(x) = \mathbb{E}_x[e^{-\lambda\tau_{ab}}\varphi(X_{\tau_{ab}})]$.

→ u est solution de (A. L., conjecture en cours)

$$\begin{cases} \frac{d^{2n}u}{dx^{2n}}(x) = \lambda u(x) \text{ pour } x \in]a, b[\\ \forall p \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{d^p u}{dx^p}(a) = \frac{d^p \varphi}{dx^p}(a) \text{ et } \frac{d^p u}{dx^p}(b) = \frac{d^p \varphi}{dx^p}(b) \end{cases}$$

- Un autre problème ouvert : Lien avec le problème de Lauricella 1D ?

$$\begin{cases} \frac{d^{2n}u}{dx^{2n}}(x) = \psi(x) \text{ pour } x \in]a, b[\\ \forall p \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{d^p u}{dx^p}(a) = \alpha_p \text{ et } \frac{d^p u}{dx^p}(b) = \beta_p \end{cases}$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION !