Lois du temps de séjour et du maximum pour un pseudo-processus gouverné par l'équation de la chaleur d'ordre supérieur

Aimé LACHAL

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon
INSA de Lyon

1 Notations

Équation de la chaleur d'ordre supérieur :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \text{ où } \kappa_n = \pm 1.}$$

Noyau de type chaleur : $p(t; x)$

– caractérisé par
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} p(t; x)\, dx = e^{\kappa_n t(-iu)^n};$$

– définit un pseudo-processus Markovien $(X_t)_{t \geqslant 0}$ gouverné par une mesure signée de variation totale infinie (qui n'est pas une probabilité) selon
$$\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = p(t; x - y)\, dy$$
et pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $x_0 = x$,
$$\mathbb{P}_x(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_n} \in dx_n) = \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}; x_{i-1} - x_i)\, dx_i.$$

2 Problème

Étude des fonctionnelles :

- $T_t = \mathrm{mes}\{s \in [0,t] : X_s > 0\} = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>0\}}\, ds$;
- T_t conditionnée par $\{X_t = 0\}$, $\{X_t > 0\}$, $\{X_t < 0\}$;
- $M_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ et $m_t = \min_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$.

Techniques requises :

- formule de Feynman-Kac ;
- systèmes de Vandermonde ;
- notion de dualité.

3 Bibliographie

- **Hochberg (1978).** — *Cas* $\boxed{n=4}$, *étude analytique du pseudo-processus* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *:*
  - intégrale stochastique ;
  - formule d'Itô, « $dx^4 = dt$ » ;
  - loi de M_t ;
  - trajectoires « apparemment » discontinues.
- **Krylov (1960).** — *Cas* $\boxed{n \text{ pair}}$, *loi de l'arcsinus :*

$$\mathbb{P}(T_t \in ds)/ds = \frac{\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}{\pi\sqrt{s(t-s)}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathbb{E}(e^{-\mu T_t})\,dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda+\mu)}}.$$

- **Orsingher (1991).** — *Cas* $\boxed{n=3}$ *:*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathbb{E}(e^{-\mu T_t})\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2(\lambda+\mu)}} & \text{si } \kappa_n = +1, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda(\lambda+\mu)^2}} & \text{si } \kappa_n = -1. \end{cases}$$

- **Hochberg & Orsingher (1994)**. — *Cas* $\boxed{n = 2p+1}$ *impair, conjecture :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathbb{E}(e^{-\mu T_t})\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\lambda^{p+1}(\lambda+\mu)^p}} & \text{si } \kappa_n = (-1)^p, \\ \dfrac{1}{\sqrt[n]{\lambda^{p}(\lambda+\mu)^{p+1}}} & \text{si } \kappa_n = (-1)^{p+1}. \end{cases}$$

- **Nikitin & Orsingher (2000)**. — *Cas* $\boxed{n = 3 \text{ ou } 4}$ *:*
  - loi de T_t conditionnée par $X_t = 0$, $X_t > 0$ ou $X_t < 0$;
  - loi uniforme et lois Bêta

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_t \in ds | X_t = 0)/ds &= \frac{1}{t}\,\mathbb{1}_{(0,t)}(s), \\ \mathbb{P}(T_t \in ds | X_t > 0)/ds &= \begin{cases} \dfrac{3^{3/2}}{4\pi t}\left(\dfrac{s}{t-s}\right)^{2/3}\mathbb{1}_{(0,t)}(s) & \text{si } n = 3 \text{ et } \kappa_n = +1, \\ \dfrac{2}{\pi t}\sqrt{\dfrac{s}{t-s}}\,\mathbb{1}_{(0,t)}(s) & \text{si } n = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

- **Beghin, Hochberg, Orsingher & Ragozina (2000–2001)**.

— *Cas* $\boxed{n = 3 \text{ ou } 4}$ *:*

– lois de M_t et m_t, éventuellement conditionnées par $X_t = 0$

$$\mathbb{P}(M_t \leqslant a) = \mathbb{P}(X_t \leqslant a) - \mathbb{P}(X_t > a) + \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \displaystyle\int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}(s;a)\, \frac{ds}{\sqrt[3]{t-s}} & \text{si } n = 3, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})^2} \displaystyle\int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}(s;a)\, \frac{ds}{\sqrt{t-s}} & \text{si } n = 4. \end{cases}$$

– couplage de M_t et X_t.

Cas $\boxed{n = 4}$ *(opérateur biharmonique) :*

- **Funaki (1979), Hochberg & Orsingher (1996)** : processus composés
- **Nishioka (1997)** : approche distributionnelle pour le premier instant de passage
- **Benachour, Roynette & Vallois (1996)** : autres interprétations probabilistes.

4 Formule de Feynman-Kac

$$\varphi(t;x) = \mathbb{E}_x[e^{-\int_0^t f(X_s)\,ds} g(X_t)] \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[e^{-\frac{t}{n}\sum_{k=0}^n f(X_{kt/n})} g(X_t)]$$

est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \kappa_n \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} - f\varphi, \\ \varphi(0;x) = g(x). \end{cases}$$

La transformée de Laplace

$$\Phi(\lambda;x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \varphi(t;x)\, dt$$

est solution de

$$\boxed{\kappa_n \frac{d^n \Phi}{dx^n} = (f+\lambda)\Phi - g.}$$

5 Temps de séjour T_t

5.1 Équation

On pose

$$\begin{cases} u(t,\mu;x) &= \mathbb{E}_x(e^{-\mu T_t}), \\ U(\lambda,\mu;x) &= \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, u(t,\mu;x)\, dt. \end{cases}$$

U est solution de l'équation différentielle

$$\kappa_n \frac{d^n U}{dx^n} = \begin{cases} (\lambda+\mu)\, U - 1 & \text{sur }]0,+\infty[, \\ \lambda\, U - 1 & \text{sur }]-\infty, 0[. \end{cases}$$

5.2 Résolution

On pose

- $\gamma = \sqrt[n]{\lambda+\mu}$ et $\delta = \sqrt[n]{\lambda}$;
- $(\theta_j)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$: racines n^{e} de κ_n ;
- $I = \{j \in \{0,\ldots,n-1\} : \Re\theta_j < 0\}$ et $J = \{j \in \{0,\ldots,n-1\} : \Re\theta_j > 0\}$.

• Si $\boxed{n = 2p}$, alors $\kappa_n = (-1)^{p+1}$, $\theta_j = e^{i[(2j+p+1)\pi/n]}$ et $\begin{cases} I = \{0,\ldots,p-1\}, \\ J = \{p,\ldots,2p-1\}. \end{cases}$

• Si $\boxed{n = 2p+1}$, alors

– pour $\kappa_n = +1$: $\theta_j = e^{i[2j\pi/n]}$ et

$$I = \left\{\frac{p}{2}+1,\ldots,\frac{3p}{2}\right\}, \qquad J = \left\{0,\ldots,\frac{p}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3p}{2}+1,\ldots,2p\right\} \qquad \text{si } p \text{ pair,}$$

$$I = \left\{\frac{p+1}{2},\ldots,\frac{3p+1}{2}\right\}, \quad J = \left\{0,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3p+3}{2},\ldots,2p\right\} \quad \text{si } p \text{ impair ;}$$

– pour $\kappa_n = -1$: $\theta_j = e^{i[(2j+1)\pi/n]}$ et

$$I = \left\{\frac{p}{2},\ldots,\frac{3p}{2}\right\}, \qquad J = \left\{0,\ldots,\frac{p}{2}-1\right\} \cup \left\{\frac{3p}{2}+1,\ldots,2p\right\} \quad \text{si } p \text{ pair,}$$

$$I = \left\{\frac{p+1}{2},\ldots,\frac{3p-1}{2}\right\}, \quad J = \left\{0,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3p+1}{2},\ldots,2p\right\} \quad \text{si } p \text{ impair.}$$

La solution est de la forme

$$U(\lambda,\mu;x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in I} c_k e^{\theta_k \gamma x} + \frac{1}{\lambda+\mu} & \text{si } \ x > 0, \\ \displaystyle\sum_{k\in J} d_k e^{\theta_k \delta x} + \frac{1}{\lambda} & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

Conditions de régularité : U est $n-1$ fois dérivable en 0

$$\forall j \in \{0,\ldots,n-1\}, \quad \frac{d^j U}{dx^j}(0^+) = \frac{d^j U}{dx^j}(0^-).$$

D'où

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in I} c_k + \frac{1}{\lambda+\mu} & = & \displaystyle\sum_{k\in J} d_k + \frac{1}{\lambda}, \\ \displaystyle\sum_{k\in I} (\theta_k\gamma)^j c_k & = & \displaystyle\sum_{k\in J} (\theta_k\delta)^j d_k \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n-1. \end{cases}$$

Posons $x_k = \begin{cases} c_k & \text{si } k \in I \\ -d_k & \text{si } k \in J \end{cases}$ et $\alpha_k = \begin{cases} \theta_k \gamma & \text{si } k \in I \\ \theta_k \delta & \text{si } k \in J \end{cases}$.

Le système prend la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^j x_k = \begin{cases} \dfrac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant n-1\,; \end{cases}$$

$\longrightarrow$ système de Vandermonde de solution

$$x_k = \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \alpha_k}.$$

Ici

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_j - \alpha_k} = \begin{cases} \dfrac{(\gamma/\delta) - 1}{(\gamma/\delta)^n - 1} \displaystyle\prod_{j \in I \setminus \{k\}} \frac{\theta_j - \theta_k(\gamma/\delta)}{\theta_j - \theta_k} & \text{si } k \in I, \\ \dfrac{1 - (\delta/\gamma)}{1 - (\delta/\gamma)^n} \displaystyle\prod_{j \in J \setminus \{k\}} \frac{\theta_j - \theta_k(\delta/\gamma)}{\theta_j - \theta_k} & \text{si } k \in J. \end{cases}$$

5.3 Solution

Pour $x = 0$:

Théorème 1 (Hochberg & Orsingher, 1994)

$$U(\lambda,\mu;0) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left[1+\left(\sqrt[n]{\frac{\lambda+\mu}{\lambda}}-1\right)\sum_{k\in I}\prod_{j\in I\setminus\{k\}}\frac{\theta_j-\theta_k\sqrt[n]{\frac{\lambda+\mu}{\lambda}}}{\theta_j-\theta_k}\right].$$

Théorème 2 (A.L., 2002)

$$\boxed{U(\lambda,\mu;0) = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda^{\#I}(\lambda+\mu)^{\#J}}}.}$$

Preuve. Cela s'écrit encore

$$U(\lambda,\mu;0) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\#I}.$$

Il faut donc voir que

$$\sum_{k\in I}\prod_{j\in I\setminus\{k\}}\frac{\theta_j-\theta_k(\gamma/\delta)}{\theta_j-\theta_k} = \frac{(\gamma/\delta)^{\#I}-1}{(\gamma/\delta)-1}.$$

Lemme 3

$$\sum_{k\in I}\prod_{j\in I\setminus\{k\}}\frac{\theta_j x-\theta_k}{\theta_j-\theta_k}=\sum_{k\in I}\prod_{j\in I\setminus\{k\}}\frac{\theta_j-\theta_k x}{\theta_j-\theta_k}=\frac{x^{\#I}-1}{x-1}.$$

Preuve du lemme. Soit

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k\in I}\prod_{j\in I\setminus\{k\}}\frac{\theta_j x-\theta_k}{\theta_j-\theta_k}, \\ Q(x) &= \frac{x^{\#I}-1}{x-1}=\sum_{k=0}^{\#I-1}x^k. \end{aligned}$$

Idée : calcul des dérivées successives en 1 ; on montre

$$\forall \ell\in\{0,\ldots,\#I-1\},\ P^{(\ell)}(1)=Q^{(\ell)}(1).$$

$\longrightarrow$ Utilisation

- de la formule de Leibniz ;
- d'un système de Vandermonde.

D'une part :

$$Q^{(\ell)}(1) = \ell! \sum_{k=0}^{\#I-1} C_k^\ell = \ell!\, C_{\#I}^{\ell+1}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
P^{(\ell)}(1) &= \sum_{\substack{j_0,\dots,j_\ell \in I \\ j_0,\dots,j_\ell \text{ différents}}} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 0}}^{\ell} \frac{\theta_{j_i}}{\theta_{j_i}-\theta_{j_0}} \quad \text{(Leibniz)} \\
&= \frac{1}{\ell+1} \sum_{\substack{j_0,\dots,j_\ell \in I \\ j_0,\dots,j_\ell \text{ différents}}} \left(\sum_{k=0}^{\ell} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{\ell} \frac{\theta_{j_i}}{\theta_{j_i}-\theta_{j_k}} \right) \quad \begin{array}{l}\text{(expression invariante} \\ \text{par permutation)}\end{array} \\
&= \frac{1}{\ell+1} \#\{(j_0,\dots,j_\ell) \in I \ : \\
&\qquad j_0,\dots,j_\ell \text{ sont différents}\} \quad \text{(Vandermonde)} \\
&= \frac{1}{\ell+1} A_{\#I}^{\ell+1} \\
&= Q^{(\ell)}(1). \qquad \square
\end{aligned}$$

Après inversion de la transformée de Laplace,

Corollaire 4 *T_t suit une loi Bêta :*

$$\boxed{\mathbb{P}_0(T_t \in ds)/ds = \frac{1}{\pi}\,\sin\left(\frac{\#I}{n}\,\pi\right)\,\frac{\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}{\sqrt[n]{s^{\#I}(t-s)^{\#J}}}.}$$

En particulier, si n est pair, T_t suit la loi arcsinus :

$$\boxed{\mathbb{P}_0(T_t \in ds)/ds = \frac{\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}{\pi\sqrt{s(t-s)}}.}$$

6 Temps de séjour T_t conditionnel

6.1 Équation

On pose

$$\begin{cases} v(t,\mu;x,y) & = & \mathbb{E}_x(e^{-\mu T_t}, X_t \in dy)/dy, \\ V(\lambda,\mu;x,y) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, v(t,\mu;x,y)\, dt. \end{cases}$$

V est solution de l'équation différentielle distributionnelle

$$\kappa_n \frac{d^n V}{dx^n} = (\lambda + \mu \mathbb{1}_{]0,+\infty[})\, V - \delta_y.$$

Pour $y = 0$:

$$\kappa_n \frac{d^n V}{dx^n} = \begin{cases} (\lambda+\mu)\, V & \text{si } x > 0, \\ \lambda\, V & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

6.2 Résolution

$$V(\lambda,\mu;x,0)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\in I} c'_k e^{\theta_k\gamma x} & \text{si } \ x>0,\\ \displaystyle\sum_{k\in J} d'_k e^{\theta_k\delta x} & \text{si } \ x<0.\end{cases}$$

Conditions de régularité en 0 :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^j V}{\partial x^j}(0^+)=\dfrac{\partial^j V}{\partial x^j}(0^-) \quad \text{pour } 0\leqslant j\leqslant n-2,\\ \dfrac{\partial^{n-1} V}{\partial x^{n-1}}(0^+)-\dfrac{\partial^{n-1} V}{\partial x^{n-1}}(0^-)=-\kappa_n.\end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\in I} c'_k(\theta_k\gamma)^j &= \displaystyle\sum_{k\in J} d'_k(\theta_k\delta)^j \quad \text{pour } \ 0\leqslant j\leqslant n-2,\\ \displaystyle\sum_{k\in I} c'_k(\theta_k\gamma)^{n-1} &= \displaystyle\sum_{k\in J} d'_k(\theta_k\delta)^{n-1}-\kappa_n,\end{cases}$$

$\longrightarrow$ système de Vandermonde.

6.3 Solution

Pour $x = y = 0$:

Proposition 5

$$V(\lambda, \mu; 0, 0) = -\frac{\sqrt[n]{\lambda + \mu} - \sqrt[n]{\lambda}}{\mu} \sum_{k \in I} \theta_k \prod_{j \in I \setminus \{k\}} \frac{\theta_j \sqrt[n]{\frac{\lambda+\mu}{\lambda}} - \theta_k}{\theta_j - \theta_k}.$$

Théorème 6 (A.L., 2002)

$$\boxed{V(\lambda, \mu; 0, 0) = \frac{1}{l_n \mu}[\sqrt[n]{\lambda + \mu} - \sqrt[n]{\lambda}]} \quad \textit{avec} \ \ l_n = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi}{n} & \textit{si } n \textit{ pair,} \\ 2 \sin \dfrac{\pi}{2n} & \textit{si } n \textit{ impair.} \end{cases}$$

Preuve. Il faut donc voir que

$$\sum_{k \in I} \theta_k \prod_{j \in I \setminus \{k\}} \frac{\theta_j (\gamma/\delta) - \theta_k}{\theta_j - \theta_k} = -\frac{1}{l_n}.$$

Lemme 7

$$\sum_{k\in I} \theta_k \prod_{j\in I\setminus\{k\}} \frac{\theta_j x - \theta_k}{\theta_j - \theta_k} = \sum_{k\in I} \theta_k .$$

PREUVE DU LEMME. Similaire à celle du lemme précédent. □

Après inversion de la transformée de Laplace,

Corollaire 8 $(T_t|X_t = 0)$ *suit la loi uniforme sur* $[0, t]$ *:*

$$\boxed{\mathbb{P}_0(T_t \in ds|X_t = 0)/ds = \frac{1}{t}\,\mathbb{1}_{(0,t)}(s).}$$

Théorème 9 *$(T_t|X_t > 0)$ et $(T_t|X_t < 0)$ suivent des lois Bêta :*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}_0(T_t \in ds|X_t > 0)/ds &= \frac{k_n^+}{t}\left(\frac{s}{t-s}\right)^{\#J/n} \mathbb{1}_{(0,t)}(s) \\ \mathbb{P}_0(T_t \in ds|X_t < 0)/ds &= \frac{k_n^-}{t}\left(\frac{t-s}{s}\right)^{\#I/n} \mathbb{1}_{(0,t)}(s) \end{aligned}}$$

avec

$$k_n^+ = \frac{\sin\frac{\#J\pi}{n}}{\pi\int_0^{+\infty} p(t;y)\,dy} = \begin{cases} 2/\pi & \text{si } n \text{ pair,} \\ \dfrac{2\sin\frac{p\pi}{n}}{\pi(1-\frac{1}{n})} & \text{si } n = 2p+1 \text{ et } \kappa_n = (-1)^p, \\ \dfrac{2\sin\frac{p\pi}{n}}{\pi(1+\frac{1}{n})} & \text{si } n = 2p+1 \text{ et } \kappa_n = (-1)^{p+1}, \end{cases}$$

$$k_n^- = \frac{\sin\frac{\#I\pi}{n}}{\pi\int_{-\infty}^{0} p(t;y)\,dy} = \begin{cases} 2/\pi & \text{si } n \text{ pair,} \\ \dfrac{2\sin\frac{p\pi}{n}}{\pi(1+\frac{1}{n})} & \text{si } n = 2p+1 \text{ et } \kappa_n = (-1)^p, \\ \dfrac{2\sin\frac{p\pi}{n}}{\pi(1-\frac{1}{n})} & \text{si } n = 2p+1 \text{ et } \kappa_n = (-1)^{p+1}. \end{cases}$$

7 Lois de M_t et m_t

Définition 10 • $\mathbb{P}_x(M_t \leqslant a) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(\max_{0\leqslant k\leqslant n} X_{kt/n} \leqslant a)$.

• *Transformée de Laplace :*

$$\begin{aligned} W_M(\lambda; x, a) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \mathbb{P}_x(M_t \leqslant a)\, dt, \\ W_m(\lambda; x, a) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \mathbb{P}_x(m_t \geqslant a)\, dt. \end{aligned}$$

M_t et T_t sont reliées selon

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(M_t \leqslant a) &= \lim_{\mu\to+\infty} \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{1}_{\{M_t\leqslant a\}} + \mathbb{1}_{\{M_t>a\}} e^{-\mu\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\, ds}\Big] \\ &= \lim_{\mu\to+\infty} \mathbb{E}_x\Big[e^{-\mu\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\, ds}\Big] \\ &= \lim_{\mu\to+\infty} u(t,\mu; x-a). \end{aligned}$$

On a

$$W_M(\lambda; x, a) = \lim_{\mu\to+\infty} U(\lambda,\mu; x-a).$$

Théorème 11 (A.L., 2002)

$$\boxed{\begin{aligned} W_M(\lambda;x,a) &= \frac{1}{\lambda}\Big[1-\sum_{k\in J} A_k\, e^{\theta_k\delta(x-a)}\Big] \quad \textit{pour } x\leqslant a \\ W_m(\lambda;x,a) &= \frac{1}{\lambda}\Big[1-\sum_{k\in I} B_k\, e^{\theta_k\delta(x-a)}\Big] \quad \textit{pour } x\geqslant a \end{aligned}}$$

où

$$A_k = \prod_{j\in J\setminus\{k\}} \frac{\theta_j}{\theta_j-\theta_k} \quad \textit{et} \quad B_k = \prod_{j\in I\setminus\{k\}} \frac{\theta_j}{\theta_j-\theta_k}.$$

Remarque : le potentiel de p a pour expression

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, p(t;x,a)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{n\lambda}\displaystyle\sum_{k\in J}\theta_k\delta\, e^{\theta_k\delta(x-a)} & \text{pour } x\leqslant a, \\ -\dfrac{1}{n\lambda}\displaystyle\sum_{k\in I}\theta_k\delta\, e^{\theta_k\delta(x-a)} & \text{pour } x\geqslant a. \end{cases}$$

Théorème 12

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{M_t > a\} = \sum_{j=0}^{\#J-1} \frac{\tilde{\alpha}_j}{\Gamma(\frac{j+1}{n})} \int_0^t \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(s; x-a)\, \frac{ds}{(t-s)^{1-\frac{j+1}{n}}}}$$

et

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}_x\{M_t \leqslant a\} &= \mathbb{P}_x\{X_t \leqslant a\} - \mathbb{P}_x\{X_t > a\} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\#J-1} \frac{\tilde{\beta}_j - \tilde{\alpha}_j}{\Gamma(\frac{j+1}{n})} \int_0^t \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(s; x-a)\, \frac{ds}{(t-s)^{1-\frac{j+1}{n}}}\end{aligned}}$$

où les $\tilde{\alpha}_j$ et $\tilde{\beta}_j$ sont solutions de

$$\sum_{j=0}^{\#J-1} \theta_k^j\, \tilde{\alpha}_j = \frac{n\, A_k}{\theta_k} \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\#J-1} \theta_k^j\, \tilde{\beta}_j = \frac{2}{\theta_k}, \quad k \in J.$$

Corollaire 13 *Le pseudo-processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ satisfait au principe de réflexion, i.e. $\mathbb{P}_x\{M_t > a\} = 2\,\mathbb{P}_x\{X_t > a\}$, uniquement dans le cas brownien.*

EXEMPLES.

- $\boxed{n=2}$ *(mouvement brownien) :*

$$W_M(\lambda;x,a)=\frac{1}{\lambda}[1-e^{\sqrt{\lambda}(x-a)}] \quad \text{et} \quad W_m(\lambda;x,a)=W_M(\lambda;a,x).$$

- $\boxed{n=3}$ *(Orsingher) :*

$$W_M^+(\lambda;x,a)=\frac{1}{\lambda}[1-e^{\sqrt[3]{\lambda}(x-a)}],$$

$$W_M^-(\lambda;x,a)=\frac{1}{\lambda}\Big[1-e^{\sqrt[3]{\lambda}(x-a)/2}\Big(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}(x-a)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}(x-a)\Big)\Big]$$

$$\text{et} \quad W_m^+(\lambda;x,a)=W_M^-(\lambda;a,x), \quad W_m^-(\lambda;x,a)=W_M^+(\lambda;a,x).$$

- $\boxed{n=4}$ *(Hochberg puis Beghin, Orsingher & Ragozina) :*

$$W_M(\lambda;x,a)=\frac{1}{\lambda}\Big[1-e^{\sqrt[4]{\lambda}(x-a)/\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\lambda}(x-a)-\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\lambda}(x-a)\Big)\Big]$$

$$\text{et} \quad W_m(\lambda;x,a)=W_M(\lambda;a,x).$$