# Pseudo-marche aléatoire et pseudo-mouvement brownien : premier instant de dépassement d'un seuil simple ou double

**Aimé LACHAL**

***Institut Camille Jordan***
***Université de Lyon, INSA de Lyon***

**12 mars 2014**

# *Motivation*

**Essai d'interprétation stochastique d'EDP d'ordre supérieur à 2...**

$\longrightarrow$ ***notion de pseudo-processus***

***Quelques références historiques (Russie, 1960–65) :***

**Daletskii, Fomin, Ladohin**

- **"Generalized Measures in Function Spaces"**
- **"On a class of functionals integrable with respect to non-positive distributions"**

# Abréviations

- **MA : marche aléatoire**
- **MB : mouvement brownien**
- **PMA : pseudo-marche aléatoire**
- **PMB : pseudo-mouvement brownien**

# *Sommaire*

1. **Partie I : MB/PMB**
2. **Partie II : MA/PMA**
3. **Partie III : de la PMA au PMB**

***Approche adoptée :***

**équation de la chaleur/Laplacien**
**(continu ou discret, ordre 2 ou 2$N > 2$)**

# Partie I

# MB/PMB
# Chaleur/Laplacien : cas continu

# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

***1.1 Équation de la chaleur d'ordre 2 :***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}}$$

# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

### *1.1 Équation de la chaleur d'ordre 2 :*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+, \ x \in \mathbb{R}}$$

---

- ***Noyau de la chaleur :***

$$p_t(x;y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu-\frac{1}{2}(x-y)u^2} du = p_t(x-y)$$

# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

## *1.1 Équation de la chaleur d'ordre 2 :*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}}$$

---

- ***Noyau de la chaleur :***

$$p_t(x;y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu-\frac{1}{2}(x-y)u^2} du = p_t(x-y)$$

- ***Interprétation stochastique :*** mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$

# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

## *1.1 Équation de la chaleur d'ordre 2 :*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}}$$

---

- ***Noyau de la chaleur :***

$$p_t(x;y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu-\frac{1}{2}(x-y)u^2}\,du = p_t(x-y)$$

- ***Interprétation stochastique :*** **mouvement brownien** $(B_t)_{t\geqslant 0}$
  - **loi uni-dimensionnelle :**

$$p_t(x;y) = \mathbb{P}_x\{B_t \in dy\}/dy$$

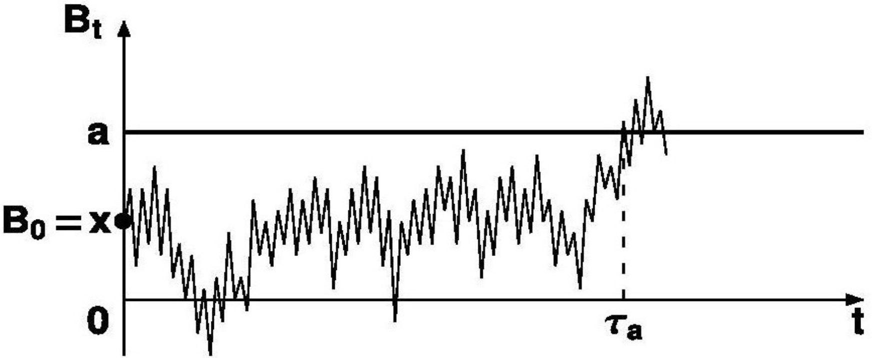
  - **lois fini-dimensionnelles (Markov) :**

$$\mathbb{P}_x\{B_{t_1} \in dy_1, \dots, B_{t_n} \in dy_n\}/dy_1 \dots dy_n$$
$$= p_{t_1}(x;y_1)p_{t_2-t_1}(y_1;y_2)\dots p_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1};y_n)$$

***1.2 Premier instant d'atteinte d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}}$$

---



## *1.2 Premier instant d'atteinte d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}}$$

---

- ***Loi de $\tau_a$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_a}\right) = e^{-\sqrt{2\lambda}\,|x-a|}}$$

***1.2 Premier instant d'atteinte d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}}$$

- ***Loi de $\tau_a$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_a}\right) = e^{-\sqrt{2\lambda}\,|x-a|}}$$

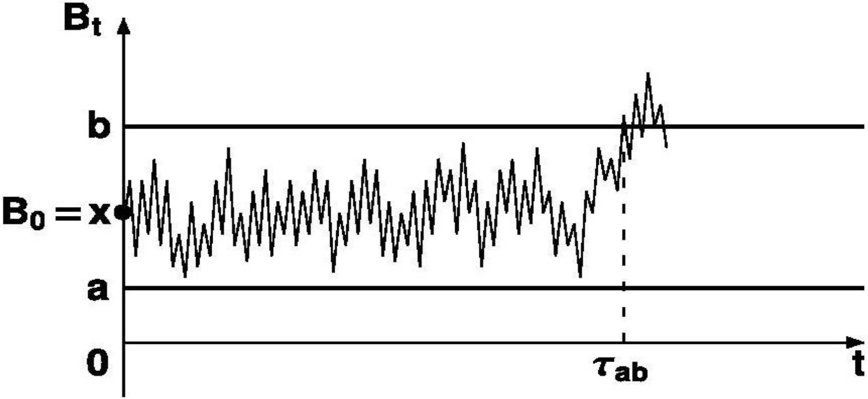
- ***Trivialité : $B_{\tau_a} = a$ !***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{B_{\tau_a} \in dy\} = \delta_a(dy)}$$

# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

***1.3 Premier instant d'atteinte d'un seuil double $a, b$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}}$$



# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

***1.3 Premier instant d'atteinte d'un seuil double $a, b$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}}$$

- ***Loi de $\tau_{ab}$ (pour $x \in [a, b]$) :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_{ab}}\right) = \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,(x - \frac{a+b}{2})\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,\frac{b-a}{2}\right)}}$$

# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

## *1.3 Premier instant d'atteinte d'un seuil double $a, b$ :*

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}}$$

- ***Loi de $\tau_{ab}$ (pour $x \in [a, b]$) :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda \tau_{ab}}\right) = \frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,\frac{b-a}{2}\right)}}$$

- ***Position d'atteinte : $B_{\tau_{ab}} \in \{a, b\}$***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{B_{\tau_{ab}} \in dy\} = \frac{b-x}{b-a}\,\delta_a(dy) + \frac{x-a}{b-a}\,\delta_b(dy)}$$

## 1.3 Premier instant d'atteinte d'un seuil double $a, b$ :

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}}$$

- **Loi de $\tau_{ab}$ (pour $x \in [a, b]$) :**

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_{ab}}\right) = \frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,(x - \frac{a+b}{2})\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,\frac{b-a}{2}\right)}}$$

- **Position d'atteinte : $B_{\tau_{ab}} \in \{a, b\}$**

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{B_{\tau_{ab}} \in dy\} = \frac{b-x}{b-a}\,\delta_a(dy) + \frac{x-a}{b-a}\,\delta_b(dy)}$$

- **Problème de la ruine :**

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{\tau_a < \tau_b\} = \frac{b-x}{b-a}, \quad \mathbb{P}_x\{\tau_b < \tau_a\} = \frac{x-a}{b-a}}$$

# 1. Espace/temps continu, ordre 2 — MB

***1.3 Premier instant d'atteinte d'un seuil double $a, b$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}}$$

---

- ***Lien avec le Laplacien et les fonctions harmoniques :***
  - $u(x) = \mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_{ab}}\right)$ est la solution du problème aux limites

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = \lambda u(x) \\ u(a) = u(b) = 1 \end{cases}}$$

## *1.3 Premier instant d'atteinte d'un seuil double $a, b$ :*

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}}$$

- ***Lien avec le Laplacien et les fonctions harmoniques :***
  - $u(x) = \mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_{ab}}\right)$ est la solution du problème aux limites

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = \lambda u(x) \\ u(a) = u(b) = 1 \end{cases}}$$

  - $$\mathbb{P}_x\{B_{\tau_{ab}} \in dy\} = H^-(x)\,\delta_a(dy) + H^+(x)\,\delta_b(dy)$$

    où $H^-$ et $H^+$ sont les solutions des problèmes de Dirichlet

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d^2H^-}{dx^2}(x) = 0 \\ H^-(a) = 1, H^-(b) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2H^+}{dx^2}(x) = 0 \\ H^+(a) = 0, H^+(b) = 1 \end{cases}}$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.1 Équation de la chaleur d'ordre 2N (N entier supérieur à 1) :***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{N-1}\,\frac{\partial^{2N} u}{\partial x^{2N}}, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}}$$

---

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

## *2.1 Équation de la chaleur d'ordre 2N (N entier supérieur à 1) :*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{N-1} \frac{\partial^{2N} u}{\partial x^{2N}}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \; x \in \mathbb{R}}$$

---

- ***Noyau correspondant :***

$$p_t(x; y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-y)u - tu^{2N}} du = p_t(x - y)$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.1 Équation de la chaleur d'ordre 2N (N entier supérieur à 1) :***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{N-1} \frac{\partial^{2N} u}{\partial x^{2N}}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \; x \in \mathbb{R}}$$

- ***Noyau correspondant :***

$$p_t(x; y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-y)u - tu^{2N}} du = p_t(x-y)$$

- ***Remarque cruciale : p* est de signe variable...**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_t(\xi)\, d\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |p_t(\xi)|\, d\xi > 1$$

**et**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^k p_t(\xi)\, d\xi = 0 \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant 2N-1$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.1 Équation de la chaleur d'ordre 2N (N entier supérieur à 1) :***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{N-1} \frac{\partial^{2N} u}{\partial x^{2N}}}$$

---

- ***Interprétation stochastique :*** **"pseudo-brownien"** $(X_t)_{t \geqslant 0}$
  - **"pseudo-loi" uni-dimensionnelle (mesure signée) :**
    $$p_t(x; y) = \mathbb{P}_x\{X_t \in dy\}/dy$$
  - **"pseudo-lois" fini-dimensionnelles ("pseudo-Markov") :**
    $$\mathbb{P}_x\{X_{t_1} \in dy_1, \ldots, X_{t_n} \in dy_n\}/dy_1 \ldots dy_n$$
    $$= p_{t_1}(x; y_1) p_{t_2 - t_1}(y_1; y_2) \ldots p_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}; y_n)$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.1 Équation de la chaleur d'ordre 2N (N entier supérieur à 1) :***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{N-1} \frac{\partial^{2N} u}{\partial x^{2N}}}$$

---

- ***Interprétation stochastique :*** **"pseudo-brownien"** $(X_t)_{t \geqslant 0}$
  - **"pseudo-loi" uni-dimensionnelle (mesure signée) :**
  $$p_t(x; y) = \mathbb{P}_x\{X_t \in dy\}/dy$$
  - **"pseudo-lois" fini-dimensionnelles ("pseudo-Markov") :**
  $$\mathbb{P}_x\{X_{t_1} \in dy_1, \dots, X_{t_n} \in dy_n\}/dy_1 \dots dy_n$$
  $$= p_{t_1}(x; y_1) p_{t_2 - t_1}(y_1; y_2) \dots p_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}; y_n)$$
- ***Difficulté :*** **extension de Kolmogorov inapplicable...**

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.1 Équation de la chaleur d'ordre 2N (N entier supérieur à 1) :***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{N-1} \frac{\partial^{2N} u}{\partial x^{2N}}}$$

---

- ***Interprétation stochastique :*** **"pseudo-brownien"** $(X_t)_{t\geqslant 0}$
  - **"pseudo-loi" uni-dimensionnelle (mesure signée) :**
  $$p_t(x;y) = \mathbb{P}_x\{X_t \in dy\}/dy$$
  - **"pseudo-lois" fini-dimensionnelles ("pseudo-Markov") :**
  $$\mathbb{P}_x\{X_{t_1} \in dy_1, \ldots, X_{t_n} \in dy_n\}/dy_1 \ldots dy_n$$
  $$= p_{t_1}(x;y_1) p_{t_2-t_1}(y_1;y_2) \ldots p_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1};y_n)$$
- ***Difficulté :*** **extension de Kolmogorov inapplicable...**
- ***Construction du PMB sur les temps dyadiques :***

**processus-échelon :** $X_t^n = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/2^n} \mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(t),\ n \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow$ **nécessite des définitions ad hoc...**

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant \text{(or} \leqslant\text{)}\ a\}}$$

---

- ***Définition ad hoc :***

$$\tau_a^n = \min\{k \in \mathbb{N} : X_{k/2^n} \geqslant \text{(or} \leqslant\text{)}\ a\}$$

**et l'on pose**

$$\mathbb{E}_x[\phi(\tau_a)] \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x\left[\phi\left(\tau_a^n\right)\right]$$

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple $a$ :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

---

- ***Position de dépassement (non-trivialité !) :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X_{\tau_a} \in dy\}/dy = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(a-x)^k}{k!}\,\delta_a^{(k)}(y)}$$

**dans le sens où**

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_{\tau_a})] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(x-a)^k}{k!}\,\phi^{(k)}(a)$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple $a$ :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

---

- ***Position de dépassement (non-trivialité !) :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X_{\tau_a} \in dy\}/dy = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(a-x)^k}{k!}\,\delta_a^{(k)}(y)}$$

**dans le sens où**

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_{\tau_a})] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(x-a)^k}{k!}\,\phi^{(k)}(a)$$

**$\longrightarrow$ "localisation/concentration" en $a$, multipôles...**

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

---

- ***Position de dépassement (non-trivialité !) :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X_{\tau_a} \in dy\}/dy = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(a-x)^k}{k!}\, \delta_a^{(k)}(y)}$$

**dans le sens où**

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_{\tau_a})] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(x-a)^k}{k!}\, \phi^{(k)}(a)$$

**⟶ "localisation/concentration" en $a$, multipôles...**

- ***Exemple : $N=2$***

$$\mathbb{P}_x\{X_{\tau_a} \in dy\}/dy = \delta_a(y) - (x-a)\, \delta'_a(y)$$

**⟶ monopôle et dipôle (cf. Nishioka, 1997)**

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\tau_a, X_{\tau_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy\Big)/dy = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(\lambda, x)\,\delta_a^{(k)}(y)}$$

**avec**

$$I_k(\lambda, x) = \lambda^{-\frac{k}{2N}} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{jk}\, e^{\theta_j \sqrt[2N]{\lambda}\,(x-a)}$$

**où les $\alpha_{jk}$ sont des coefficients et les $\theta_j$ sont les racines $(2N)^{\text{e}}$ de $(-1)^{N-1}$ de partie réelle $> 0$ si $x < a$ (ou $< 0$ si $x > a$)**

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\tau_a, X_{\tau_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy\Big)/dy = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(\lambda, x)\, \delta_a^{(k)}(y)}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **d'abord calcul de la pseudo-loi conjointe du maximum et du processus $(X_t, \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_s)$ à l'aide d'une identité de Spitzer**

## *2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

---

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\tau_a, X_{\tau_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy\Big)/dy = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(\lambda, x)\,\delta_a^{(k)}(y)}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **d'abord calcul de la pseudo-loi conjointe du maximum et du processus $(X_t, \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_s)$ à l'aide d'une identité de Spitzer**
  - **puis relation entre les pseudo-lois de $(X_t, \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_s)$ et $(\tau_a, X_{\tau_a})$**

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\tau_a, X_{\tau_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy\right)/dy = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(\lambda, x)\,\delta_a^{(k)}(y)}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **d'abord calcul de la pseudo-loi conjointe du maximum et du processus $(X_t, \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_s)$ à l'aide d'une identité de Spitzer**
  - **puis relation entre les pseudo-lois de $(X_t, \max_{0\leqslant s\leqslant t} X_s)$ et $(\tau_a, X_{\tau_a})$**
  - **et l'on constate *a posteriori* que ces fonctions sont solutions de problèmes aux limites liés à l'opérateur $d^{2N}/dx^{2N}$...**

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

## *2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\tau_a, X_{\tau_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy\Big)/dy = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(\lambda, x)\, \delta_a^{(k)}(y)}$$

- ***Références directes :***
  - Nishioka ($N = 2$ : "biharmonic pseudo process", 1997)
  - AL (EJP, 2007)

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

## *2.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

---

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\tau_a, X_{\tau_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a}, X_{\tau_a} \in dy\Big)/dy = \sum_{k=0}^{N-1} I_k(\lambda, x)\,\delta_a^{(k)}(y)}$$

- ***Références directes :***
  - Nishioka ($N = 2$ : "biharmonic pseudo process", 1997)
  - AL (EJP, 2007)
- ***Autres références (temps de séjour, maximum...) :***
  - Krylov (1960) ; Hochberg ($N = 2$, 1978)
  - et depuis 1991 : Beghin Cammarota Nikitin Orsingher Ragozina ($N = 2$) ; AL

***2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a,b[$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin \,]a,b[\,\}}$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a,b[$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin\, ]a,b[\,\}}$$

---

- ***Heuristique :*** $u(x) = \mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\tau_{ab}}\phi(X_{\tau_{ab}})\right)$ **est solution du problème de Lauricella**

$$\begin{cases} (-1)^{N-1}\dfrac{d^{2N}u}{dx^{2N}}(x) = \lambda u(x) \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{d^k u}{dx^k}(a) = \dfrac{d^k \phi}{dx^k}(a) \\ \dfrac{d^k u}{dx^k}(b) = \dfrac{d^k \phi}{dx^k}(b) \end{array}\right\} \text{si } 0 \leqslant k \leqslant N-1 \end{cases}$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a,b[$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin\, ]a,b[\,\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\tau_{ab}, X_{\tau_{ab}})$ (pour $x \in [a,b]$) :***

$$\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_{ab}}, X_{\tau_{ab}} \in dy\Big)/dy = \sum_{k=0}^{N-1} I_k^-(\lambda,x)\,\delta_a^{(k)}(y) + \sum_{k=0}^{N-1} I_k^+(\lambda,x)\,\delta_b^{(k)}(y)$$

**avec**

$$I_k^{\pm}(\lambda,x) = \lambda^{-\frac{k}{2N}} \sum_{j=0}^{2N-1} \alpha_{jk}^{\pm}(\lambda)\, e^{\theta_j \sqrt[2N]{\lambda}\, x}$$

**où les $\alpha_{jk}^{\pm}(\lambda)$ sont des coefficients dépendants de $a, b, \lambda$ et les $\theta_j$ sont les racines $(2N)^{\text{e}}$ de $(-1)^{N-1}$**

## *2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a,b[$ :*

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin ]a,b[\,\}}$$

- ***Position de sortie :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} \in dy\}/dy = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \Big[ H_k^-(x)\, \delta_a^{(k)}(y) + H_k^+(x)\, \delta_b^{(k)}(y) \Big]}$$

## *2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a, b[$ :*

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin \,]a, b[\,\}}$$

- ***Position de sortie :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} \in dy\}/dy = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \Big[ H_k^-(x)\, \delta_a^{(k)}(y) + H_k^+(x)\, \delta_b^{(k)}(y) \Big]}$$

- ***Lien avec les fonctions polyharmoniques :***

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d^{2N} H_k^-}{dx^{2N}}(x) = \dfrac{d^{2N} H_k^+}{dx^{2N}}(x) = 0 \text{ si } x \in \,]a, b[ \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{d^\ell H_k^-}{dx^\ell}(a) = \delta_{k\ell}, \quad \dfrac{d^\ell H_k^-}{dx^\ell}(b) = 0 \\ \dfrac{d^\ell H_k^+}{dx^\ell}(a) = 0, \quad \dfrac{d^\ell H_k^+}{dx^\ell}(b) = \delta_{k\ell} \end{array}\right\} \text{si } 0 \leqslant \ell \leqslant N-1 \end{cases}}$$

# 2. Espace/temps continu, ordre $2N$ — PMB

***2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a,b[$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin ]a,b[\,\}}$$

---

$\longrightarrow$ **polynômes d'interpolation d'Hermite**

## *2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a,b[$ :*

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin \,]a,b[\,\}}$$

---

$\longrightarrow$ **polynômes d'interpolation d'Hermite**

- ***Problème de la ruine :***

$$\mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} = a\} = H_0^-(x), \quad \mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} = b\} = H_0^+(x)$$

***2.3 Premier instant de sortie d'un intervalle $]a,b[$ :***

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin ]a,b[\,\}}$$

---

$\longrightarrow$ **polynômes d'interpolation d'Hermite**

- ***Problème de la ruine :***

$$\mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} = a\} = H_0^-(x), \quad \mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} = b\} = H_0^+(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} = a\} &= \frac{1}{(b-a)^{2N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (x-a)^k (b-x)^{2N-1-k}\\ \mathbb{P}_x\{X_{\tau_{ab}} = b\} &= \frac{1}{(b-a)^{2N-1}} \sum_{k=N}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} (x-a)^k (b-x)^{2N-1-k}\end{aligned}}$$

- ***Référence :*** **AL (SPA, 2014)**

# Partie II

# MA/PMA
# Chaleur/Laplacien : cas discret

# 3. Espace/temps discret, ordre 2 — MA

### *3.1 Équation de la chaleur discrète d'ordre 2 :*

$$\boxed{\partial_n u(n,x) = \frac{1}{2}\,\Delta_x u(n,x), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}}$$

**avec**

$$\partial_n u(n,x) = u(n+1,x) - u(n,x)$$
$$\Delta_x u(n,x) = u(n,x+1) - 2u(n,x) + u(n,x-1)$$

# 3. Espace/temps discret, ordre 2 — MA

***3.1 Équation de la chaleur discrète d'ordre 2 :***

$$\boxed{\partial_n u(n,x) = \tfrac{1}{2}\,\Delta_x u(n,x), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}}$$

**avec**

$$\partial_n u(n,x) = u(n+1,x) - u(n,x)$$

$$\Delta_x u(n,x) = u(n,x+1) - 2u(n,x) + u(n,x-1)$$

---

- ***Semi-groupe*** $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***de générateur*** $\mathcal{G} = \tfrac{1}{2}\,\Delta$ ***:***

  $T_n = (T_1)^n$ **avec** $T_1 = I + \mathcal{G}$, $\quad T_1\phi(x) = \dfrac{1}{2}\,\phi(x+1) + \dfrac{1}{2}\,\phi(x-1)$

# 3. Espace/temps discret, ordre 2 — MA

### *3.1 Équation de la chaleur discrète d'ordre 2 :*

$$\boxed{\partial_n u(n,x) = \tfrac{1}{2}\,\Delta_x u(n,x), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}}$$

avec

$$\partial_n u(n,x) = u(n+1,x) - u(n,x)$$

$$\Delta_x u(n,x) = u(n,x+1) - 2u(n,x) + u(n,x-1)$$

---

- ***Semi-groupe*** $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***de générateur*** $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\,\Delta$ ***:***

  $T_n = (T_1)^n$ avec $T_1 = I + \mathcal{G}$, $\quad T_1\phi(x) = \dfrac{1}{2}\,\phi(x+1) + \dfrac{1}{2}\,\phi(x-1)$

- ***Interprétation stochastique :*** marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$S_n = S_0 + \sum_{j=1}^{n} U_j$$

  où $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi

$$\mathbb{P}\{U_j = -1\} = \mathbb{P}\{U_j = +1\} = \frac{1}{2}$$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

***4.1 Équation de la chaleur discrète d'ordre 2N (N > 1 entier) :***

$$\boxed{\partial_n u(n,x) = (-1)^{N-1} c\, \Delta_x^N u(n,x),\ \ n \in \mathbb{N},\ \ x \in \mathbb{Z}\ \ (c > 0 \text{ fixé})}$$

**avec**

$$\Delta_x^N u(n,x) = \sum_{k=-N}^{N} (-1)^k \binom{k+N}{2N} u(n, x+k)$$

***4.1 Équation de la chaleur discrète d'ordre $2N$ ($N > 1$ entier) :***

$$\boxed{\partial_n u(n,x) = (-1)^{N-1} c\, \Delta_x^N u(n,x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}\ \ (c > 0 \text{ fixé})}$$

**avec**

$$\Delta_x^N u(n,x) = \sum_{k=-N}^{N} (-1)^k \binom{k+N}{2N} u(n,x+k)$$

---

- ***Semi-groupe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de générateur $\mathcal{G} = (-1)^{N-1} c\, \Delta^N$ :***
  - $T_n = (T_1)^n$ **avec** $T_1 = I + \mathcal{G}$
  - $$T_1\phi(x) = c \sum_{-N\leqslant k\leqslant N, k\neq 0} (-1)^{k+N-1} \binom{2N}{k+N} \phi(x+k) + \left[1 + c(-1)^N \binom{2N}{N}\right] \phi(x)$$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

***4.1 Équation de la chaleur discrète d'ordre 2N ($N > 1$ entier) :***

$$\boxed{\partial_n u(n,x) = (-1)^{N-1} c\, \Delta_x^N u(n,x), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}\ \ (c > 0 \text{ fixé})}$$

**avec**

$$\Delta_x^N u(n,x) = \sum_{k=-N}^{N} (-1)^k \binom{k+N}{2N} u(n, x+k)$$

---

- ***Interprétation stochastique :*** **pseudo-marche aléatoire** $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$

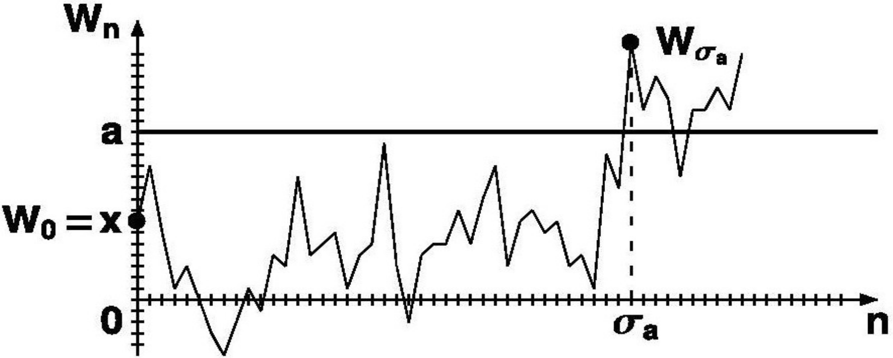
$$W_n = W_0 + \sum_{j=1}^{n} V_j$$

**où $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de pseudo-v.a. i.i.d. de pseudo-loi**

$$\begin{cases} \mathbb{P}\{V_j = k\} = (-1)^{k+N-1} c \dbinom{2N}{k+N} & \text{si } \begin{matrix} -N \leqslant k \leqslant N \\ k \neq 0 \end{matrix} \\ \mathbb{P}\{V_j = 0\} = 1 + (-1)^N c \dbinom{2N}{N} \end{cases}$$

### 4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$



# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

### *4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Position de dépassement :*** On a

$$W_{\sigma_a} \in \{a, a+1, \ldots, a+N-1\} \text{ si } W_0 < a$$
$$W_{\sigma_a} \in \{a, a-1, \ldots, a-N+1\} \text{ si } W_0 > a$$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

***4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Position de dépassement :*** On a

$$W_{\sigma_a} \in \{a, a+1, \dots, a+N-1\} \text{ si } W_0 < a$$
$$W_{\sigma_a} \in \{a, a-1, \dots, a-N+1\} \text{ si } W_0 > a$$

- ***Pseudo-loi (pour $x < a$ et $y \in \{a, a+1, \dots, a+N-1\}$) :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_a} = y\} = (-1)^{y-a}\binom{N+a-1}{y-x}\binom{y-x-1}{a-x-1}}$$

***4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :***

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Position de dépassement :*** On a

$$W_{\sigma_a} \in \{a, a+1, \ldots, a+N-1\} \text{ si } W_0 < a$$
$$W_{\sigma_a} \in \{a, a-1, \ldots, a-N+1\} \text{ si } W_0 > a$$

- ***Pseudo-loi (pour $x < a$ et $y \in \{a, a+1, \ldots, a+N-1\}$) :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_a} = y\} = (-1)^{y-a}\binom{N+a-1}{y-x}\binom{y-x-1}{a-x-1}}$$

- ***Exemple :*** $N = 2$

$$\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_a} = a\} = a - x + 1, \quad \mathbb{P}_x\{W_{\sigma_a} = a+1\} = x - a$$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

### *4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de*** $(\sigma_a, W_{\sigma_a})$ ***:***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(z^{\sigma_a}\zeta^{W_{\sigma_a}}\right) = \sum_{k=1}^{N} L_k(z,\zeta)(u_k(z)\zeta)^{a-x}}$$

**où** $$L_k(z,\zeta) = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant N\\ j\neq k}} \frac{\zeta - v_j(z)}{v_k(z) - v_j(z)}, \quad k \in \{1,\dots,N\},$$

**sont les polynômes d'interpolation de Lagrange par rapport à** $\zeta$ **tels que** $L_k(z, v_j(z)) = \delta_{jk}$, **et les** $u_j(z)$ **et** $v_j(z) = 1/u_j(z)$ **sont les racines de**

$$\zeta^2 - 2\left(1 + \theta_j \frac{\sqrt[N]{1-z}}{2\sqrt[N]{c\,z}}\right)\zeta + 1 = 0$$

## *4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\sigma_a, W_{\sigma_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(z^{\sigma_a}\zeta^{W_{\sigma_a}}\right) = \sum_{k=1}^{N} L_k(z,\zeta)(u_k(z)\zeta)^{a-x}}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **équation de "continuité"**

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

### *4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

---

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\sigma_a, W_{\sigma_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(z^{\sigma_a}\zeta^{W_{\sigma_a}}\right) = \sum_{k=1}^{N} L_k(z,\zeta)(u_k(z)\zeta)^{a-x}}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - équation de "continuité"
  - utilisation des fonctions génératrices

## *4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\sigma_a, W_{\sigma_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(z^{\sigma_a}\zeta^{W_{\sigma_a}}\right) = \sum_{k=1}^{N} L_k(z,\zeta)(u_k(z)\zeta)^{a-x}}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - équation de "continuité"
  - utilisation des fonctions génératrices
  - nécessite une condition : $c \leqslant 1/2^{2N-1}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{W_n = k\} e^{ik\theta} z^n = \left[1 - z\left(1 - c\, 4^N \sin^{2N}\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)\right]^{-1}$$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

## *4.2 Premier instant de dépassement d'un seuil simple a :*

$$\boxed{\sigma_a = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \geqslant (\text{or} \leqslant)\ a\}}$$

- ***Pseudo-loi conjointe de $(\sigma_a, W_{\sigma_a})$ :***

$$\boxed{\mathbb{E}_x\left(z^{\sigma_a}\zeta^{W_{\sigma_a}}\right) = \sum_{k=1}^{N} L_k(z,\zeta)(u_k(z)\zeta)^{a-x}}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **équation de "continuité"**
  - **utilisation des fonctions génératrices**
  - **nécessite une condition : $c \leqslant 1/2^{2N-1}$**

$$\sum_{k\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{W_n = k\} e^{ik\theta} z^n = \left[1 - z\left(1 - c\,4^N \sin^{2N}\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)\right]^{-1}$$

  - **et l'on constate *a posteriori* que cette pseudo-loi est solution d'un problème aux limites lié à l'opérateur $\Delta^N$...**

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

***4.3 Premier instant de dépassement d'un seuil double $a, b$ :***

$$\boxed{\sigma_{ab} = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \notin ]a, b[\,\}}$$

***4.3 Premier instant de dépassement d'un seuil double $a, b$ :***

$$\boxed{\sigma_{ab} = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \notin ]a, b[\,\}}$$

---

- ***Position de dépassement :*** **pour $W_0 \in ]a, b[$,**
  $W_{\sigma_{ab}} \in \{a - N + 1, \ldots, a - 1, a\} \cup \{b, b + 1, \ldots, b + N - 1\}$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

***4.3 Premier instant de dépassement d'un seuil double $a, b$ :***

$$\boxed{\sigma_{ab} = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \notin ]a, b[\,\}}$$

---

- ***Position de dépassement :*** pour $W_0 \in ]a, b[$,
  $W_{\sigma_{ab}} \in \{a - N + 1, \ldots, a - 1, a\} \cup \{b, b + 1, \ldots, b + N - 1\}$
- ***Pseudo-loi (pour $x \in ]a, b[$ et $y \in \{a - N + 1, \ldots, a - 1, a\} \cup \{b, b + 1, \ldots, b + N - 1\}$) :***

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_{ab}} = y\} = \begin{cases} (-1)^{y-a} \dfrac{KN}{x-y} \dfrac{\binom{N-1}{a-y}}{\binom{b-y+N-1}{N}} & \text{si } y \leqslant a \\[2ex] (-1)^{y-b} \dfrac{KN}{y-x} \dfrac{\binom{N-1}{y-b}}{\binom{y-a+N-1}{N}} & \text{si } y \geqslant b \end{cases}}$$

avec $K = \binom{N-a-1}{N}\binom{N-b-1}{N}$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

### *4.3 Premier instant de dépassement d'un seuil double $a, b$ :*

$$\boxed{\sigma_{ab} = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \notin \,]a, b[\,\}}$$

- ***Exemple :*** $N = 2$

$$\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_{ab}} = a - 1\} = -\frac{(x-a)(b-x)(b-x+1)}{(b-a+1)(b-a+2)}$$

$$\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_{ab}} = a\} = \frac{(x-a+1)(b-x)(b-x+1)}{(b-a)(b-a+1)}$$

$$\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_{ab}} = b\} = \frac{(x-a)(x-a+1)(b-x+1)}{(b-a)(b-a+1)}$$

$$\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_{ab}} = b + 1\} = -\frac{(x-a)(x-a+1)(b-x)}{(b-a+1)(b-a+2)}$$

## *4.3 Premier instant de dépassement d'un seuil double $a, b$ :*

$$\boxed{\sigma_{ab} = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \notin \,]a, b[\,\}}$$

---

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **équation de "continuité"**

### *4.3 Premier instant de dépassement d'un seuil double $a, b$ :*

$$\boxed{\sigma_{ab} = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \notin ]a,b[\,\}}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **équation de "continuité"**
  - **et l'on constate *a posteriori* que $u(x) = \mathbb{E}_x(\phi(W_{\sigma_{ab}}))$ est solution du problème de Lauricella discret**

$$\boxed{\begin{cases} (-1)^{N-1}\Delta^N u(x) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \partial_-^k u(a) = \partial_-^k \phi(a) \\ \partial_+^k u(b) = \partial_+^k \phi(b) \end{array}\right\} \text{si } 0 \leqslant k \leqslant N-1 \end{cases}}$$

**où** $\partial_+ u(x) = u(x+1) - u(x), \quad \partial_- u(x) = u(x) - u(x-1)$

# 4. Espace/temps discret, ordre $2N$ — PMA

### *4.3 Premier instant de dépassement d'un seuil double $a, b$ :*

$$\boxed{\sigma_{ab} = \min\{n \in \mathbb{N} : W_n \notin ]a, b[\,\}}$$

- ***Idée d'une démonstration :***
  - **équation de "continuité"**
  - **et l'on constate *a posteriori* que $u(x) = \mathbb{E}_x(\phi(W_{\sigma_{ab}}))$ est solution du problème de Lauricella discret**

$$\boxed{\begin{cases} (-1)^{N-1}\Delta^N u(x) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \partial_-^k u(a) = \partial_-^k \phi(a) \\ \partial_+^k u(b) = \partial_+^k \phi(b) \end{array}\right\} \text{si } 0 \leqslant k \leqslant N-1 \end{cases}}$$

**où $\partial_+ u(x) = u(x+1) - u(x), \quad \partial_- u(x) = u(x) - u(x-1)$**

- ***Références :***
  - **Sato ($N = 2$, Journal of Mathematics of Kyoto University, 2002)**
  - **AL (International Journal of Stochastic Analysis, 2014)**

# PARTIE III

# DE LA PMA AU PMB

# 5. Convergence de la PMA vers le PMB

***Normalisation :***

**grille temps × espace $\varepsilon^{2N}\mathbb{N} \times \varepsilon\mathbb{Z}$ (associée à "$dt = dx^{2N}$")**

$$\boxed{X_t^\varepsilon = \varepsilon\, W_{\lfloor t/\varepsilon^{2N}\rfloor}, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ \varepsilon > 0 \text{ petit}}$$

**On a $\tau_a^\varepsilon = \varepsilon^{2N}\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}$ et $X_{\tau_a^\varepsilon}^\varepsilon = \varepsilon W_{\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}}$ (idem avec $\tau_{ab}^\varepsilon$ et $\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor\lceil b/\varepsilon\rceil}$)**

# 5. Convergence de la PMA vers le PMB

***Normalisation :***
**grille temps × espace $\varepsilon^{2N}\mathbb{N} \times \varepsilon\mathbb{Z}$ (associée à "$dt = dx^{2N}$")**

$$\boxed{X_t^\varepsilon = \varepsilon\, W_{\lfloor t/\varepsilon^{2N}\rfloor}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \ \varepsilon > 0 \text{ petit}}$$

**On a $\tau_a^\varepsilon = \varepsilon^{2N}\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}$ et $X_{\tau_a^\varepsilon}^\varepsilon = \varepsilon W_{\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}}$ (idem avec $\tau_{ab}^\varepsilon$ et $\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor\lceil b/\varepsilon\rceil}$)**

---

- ***Convergence ad hoc :*** **supposons que $c \leqslant 1/2^{2N-1}$**
  - $$(X_t^\varepsilon)_{t\geqslant 0} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} (X_t)_{t\geqslant 0}$$
    **dans le sens où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t_1, \dots, t_n \geqslant 0$, $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$,**
    $$\mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k X_{t_k}^\varepsilon}\Big) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k X_{t_k}}\Big) = e^{-c\sum_{k=1}^n (\mu_1+\cdots+\mu_k)^{2N}(t_k - t_{k-1})}$$

# 5. Convergence de la PMA vers le PMB

***Normalisation :***
grille temps × espace $\varepsilon^{2N}\mathbb{N} \times \varepsilon\mathbb{Z}$ (associée à "$dt = dx^{2N}$")

$$\boxed{X_t^\varepsilon = \varepsilon\, W_{\lfloor t/\varepsilon^{2N}\rfloor}, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ \varepsilon > 0 \text{ petit}}$$

On a $\tau_a^\varepsilon = \varepsilon^{2N}\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}$ et $X_{\tau_a^\varepsilon}^\varepsilon = \varepsilon W_{\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}}$ (idem avec $\tau_{ab}^\varepsilon$ et $\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor\lceil b/\varepsilon\rceil}$)

---

- ***Convergence ad hoc :*** supposons que $c \leqslant 1/2^{2N-1}$
  - $$(X_t^\varepsilon)_{t\geqslant 0} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} (X_t)_{t\geqslant 0}$$
    dans le sens où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t_1,\dots,t_n \geqslant 0$, $\forall \mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{R}$,
    $$\mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k X_{t_k}^\varepsilon}\Big) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathbb{E}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k X_{t_k}}\Big) = e^{-c\sum_{k=1}^n (\mu_1+\dots+\mu_k)^{2N}(t_k-t_{k-1})}$$
  - $$\big(\tau_a^\varepsilon, X_{\tau_a^\varepsilon}^\varepsilon\big) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \big(\tau_a, X_{\tau_a}\big)$$
    dans le sens où $\forall \lambda > 0$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$,
    $$\mathbb{E}\Big(e^{-\lambda\tau_a^\varepsilon + i\mu X_{\tau_a^\varepsilon}^\varepsilon}\Big) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathbb{E}\Big(e^{-\lambda\tau_a + i\mu X_{\tau_a}}\Big)$$

# 5. Convergence de la PMA vers le PMB

***Normalisation :***

**grille temps × espace $\varepsilon^{2N}\mathbb{N} \times \varepsilon\mathbb{Z}$ (associée à "$dt = dx^{2N}$")**

$$\boxed{X^\varepsilon_t = \varepsilon\, W_{\lfloor t/\varepsilon^{2N}\rfloor}, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ \varepsilon > 0 \text{ petit}}$$

**On a $\tau^\varepsilon_a = \varepsilon^{2N}\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}$ et $X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_a} = \varepsilon W_{\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}}$ (idem avec $\tau^\varepsilon_{ab}$ et $\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor\lceil b/\varepsilon\rceil}$)**

---

- ***Exemple : $N = 2$***

$$\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_a} = a\} = a - x + 1, \quad \mathbb{P}\{W_{\sigma_a} = a + 1\} = x - a$$
$$\Longrightarrow \mathbb{E}_x[\phi(W_{\sigma_a})] = \phi(a) + (x - a)[\phi(a + 1) - \phi(a)]$$

# 5. Convergence de la PMA vers le PMB

***Normalisation :***
**grille temps × espace $\varepsilon^{2N}\mathbb{N} \times \varepsilon\mathbb{Z}$ (associée à “$dt = dx^{2N}$”)**

$$\boxed{X_t^\varepsilon = \varepsilon\, W_{\lfloor t/\varepsilon^{2N}\rfloor}, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ \varepsilon > 0 \text{ petit}}$$

**On a $\tau_a^\varepsilon = \varepsilon^{2N}\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}$ et $X^\varepsilon_{\tau_a^\varepsilon} = \varepsilon W_{\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor}}$ (idem avec $\tau^\varepsilon_{ab}$ et $\sigma_{\lfloor a/\varepsilon\rfloor\lceil b/\varepsilon\rceil}$)**

---

- ***Exemple : $N = 2$***

$$\mathbb{P}_x\{W_{\sigma_a} = a\} = a - x + 1, \quad \mathbb{P}\{W_{\sigma_a} = a+1\} = x - a$$
$$\Longrightarrow \mathbb{E}_x[\phi(W_{\sigma_a})] = \phi(a) + (x-a)[\phi(a+1) - \phi(a)]$$

**Posons $a_\varepsilon = \lfloor a/\varepsilon\rfloor$ et $x_\varepsilon = \lfloor x/\varepsilon\rfloor$**

$$\mathbb{E}_{x_\varepsilon}\left[\phi\left(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_a}\right)\right] = \phi(a_\varepsilon) + (x_\varepsilon - a_\varepsilon)\frac{\phi(a_\varepsilon\varepsilon + \varepsilon) - \phi(a_\varepsilon\varepsilon)}{\varepsilon}$$
$$\underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathbb{E}_x[\phi(X_{\tau_a})] = \phi(a) + (x-a)\phi'(a)$$

***MERCI***

***DE VOTRE ATTENTION !***