Panorama sur l'intégrale du mouvement brownien

et autres processus intégrés

Aimé LACHAL

Institut Camille Jordan
Université de Lyon, INSA de Lyon

12 mars 2014

Motivation

Bruit aléatoire
oscillateur harmonique
et équation de Langevin (1908)

Un recueil de références historique :

"Selected papers on noise and stochastic processes" (1954)

Chandrasekhar, Doob, Kac, Ornstein, Rice, Uhlenbeck, Wang

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{équation de Langevin}\\ \alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \dot{B}_t\end{array}}$$

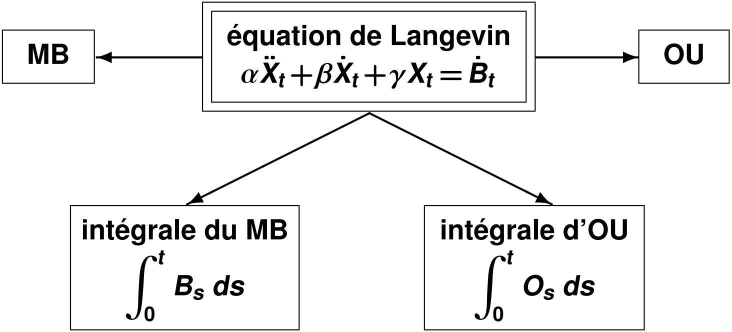
MB : mouvement brownien

OU : Ornstein-Uhlenbeck

$$\boxed{\textbf{MB}} \longleftarrow \boxed{\boxed{\begin{array}{c}\textbf{équation de Langevin}\\ \alpha\ddot{X}_t+\beta\dot{X}_t+\gamma X_t=\dot{B}_t\end{array}}} \longrightarrow \boxed{\textbf{OU}}$$

MB : mouvement brownien

OU : Ornstein-Uhlenbeck



MB : mouvement brownien **OU : Ornstein-Uhlenbeck**

MB

équation de Langevin

$$\alpha \ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \gamma X_t = \dot{B}_t$$

OU

intégrale du MB

$$\int_0^t B_s \, ds$$

intégrale d'OU

$$\int_0^t O_s \, ds$$

intégrales itérées du MB

$$\frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n dB_s$$

fonctionnelles additives homogènes du MB

$$\int_0^t B_s^{\alpha} ds$$

processus stables symétriques

MB : mouvement brownien

OU : Ornstein-Uhlenbeck

Sommaire

1. **Partie I : Équation de Langevin**
2. **Partie II : Intégrale du processus d'OU**
3. **Partie III : Intégrale du MB**
4. **Partie IV : Intégrales itérées du MB**
5. **Partie V : Fonctionnelles additives homogènes du MB**

Aspects examinés :

temps de passage et analyse asymptotique

Partie I

Équation de Langevin

1. Équation de Langevin

1.1 Oscillateur harmonique excité par un bruit blanc gaussien :

$$\boxed{\ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \omega^2 X_t = \sigma \, \dot{B}_t}$$

- ***Données :***
  - m : masse de l'oscillateur
  - $m\beta$: coefficient de frottement
  - $m\omega^2$: coefficient de rappel (force harmonique)
  - σ : constante de diffusion
  - $(\dot{B}_t)_{t \geqslant 0}$: bruit blanc gaussien externe

  N.B. Dans la suite, on choisira $\sigma = 1$

- ***Motivations :***
  - transmission des ondes radioélectriques
  - contrôle des phénomènes parasitaires ("bruit")...

1. Équation de Langevin

1.1 Oscillateur harmonique excité par un bruit blanc gaussien :

$$\boxed{\ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \omega^2 X_t = \sigma \, \dot{B}_t}$$

- ***Solution :***

$$\boxed{\begin{aligned} X_t = & \int_0^t \frac{e^{r_2(t-s)} - e^{r_1(t-s)}}{r_2 - r_1} \, dB_s \\ & + \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} X_0 + \frac{e^{r_2 t} - e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} \dot{X}_0 \end{aligned}}$$

où r_1, r_2 sont les racines de $r^2 + \beta r + \omega^2 = 0$

1. Équation de Langevin

1.1 Oscillateur harmonique excité par un bruit blanc gaussien :

$$\boxed{\ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t + \omega^2 X_t = \sigma\, \dot{B}_t}$$

- ***Solution :***

$$\boxed{\begin{aligned} X_t = &\int_0^t \frac{e^{r_2(t-s)} - e^{r_1(t-s)}}{r_2 - r_1}\, dB_s \\ &+ \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} X_0 + \frac{e^{r_2 t} - e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} \dot{X}_0 \end{aligned}}$$

où r_1, r_2 sont les racines de $r^2 + \beta r + \omega^2 = 0$

- ***Difficulté :*** $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus non-markovien

$\longrightarrow$ introduction du couple markovien $(X_t, \dot{X}_t)$
diffusion gaussienne 2D dans l'espace des phases

1. Équation de Langevin

1.2 Répartition des zéros successifs (cas stationnaire) :

$$\boxed{N = \mathrm{card}\{t \in [0,1] : X_t = 0\}}$$

---

1. Équation de Langevin

1.2 Répartition des zéros successifs (cas stationnaire) :

$$\boxed{N = \mathrm{card}\{t \in [0,1] : X_t = 0\}}$$

- ***Moyenne** (Rice, 1945) :*

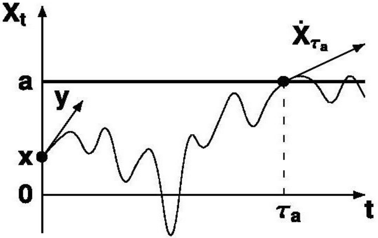
$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \omega/\pi}$$

- ***Moments** (Cramer & Leadbetter, 1965) :*
  $\longrightarrow$ **représentation intégrale...**

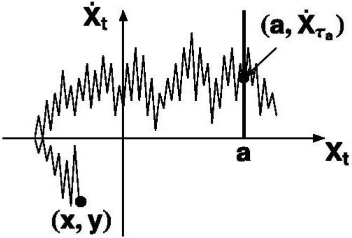
1.3 Premier instant de passage par un seuil fixé :

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}}$$

- ***Loi du couple*** $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$ ***:***



Loi horaire $t \longmapsto X_t$



Courbe $t \longmapsto (X_t, \dot{X}_t)$

Position et vitesse initiales : $(X_0, \dot{X}_0) = (x, y)$

$\longrightarrow$ **problème actuellement ouvert excepté quelques cas...**

Partie II

Intégrale du processus d'OU

2. Intégrale d'OU

2.1 Équation de Langevin, cas $\omega = 0$

$$\boxed{\ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t = \dot{B}_t}$$

2. Intégrale d'OU

2.1 Équation de Langevin, cas $\omega = 0$

$$\boxed{\ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t = \dot{B}_t}$$

- ***Processus :***

$$\boxed{X_t = \int_0^t \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) dB_s + X_0 + \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \dot{X}_0}$$

2. Intégrale d'OU

2.1 Équation de Langevin, cas $\omega = 0$

$$\boxed{\ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t = \dot{B}_t}$$

- ***Processus :***

$$\boxed{X_t = \int_0^t \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) dB_s + X_0 + \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \dot{X}_0}$$

- ***Autre représentation :***

$$\boxed{\int_0^t \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) dB_s = \int_0^t O_s \, ds}$$

avec $O_t = \displaystyle\int_0^t e^{-\beta(t-s)} dB_s \overset{\text{loi}}{=} e^{-\beta t} B_{(e^{2\beta t}-1)/(2\beta)}$

$\longrightarrow$ **intégrale du processus d'OU**

2. Intégrale d'OU

2.1 Équation de Langevin, cas $\omega = 0$

$$\boxed{\ddot{X}_t + \beta \dot{X}_t = \dot{B}_t}$$

- ***Loi du couple $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$*** *(Doering Hagan & Levermore, 1989)* **:**
  $\longrightarrow$ représentation sous forme de série...
- ***Références :*** **Hesse (1991), Marshall & Watson (1985)...**

2. Intégrale d'OU

2.2 Équation de Langevin, cas $\beta = -4\eta,\ \omega^2 = 3\eta^2$

$$\boxed{\ddot{X}_t - 4\eta\dot{X}_t + 3\eta^2 X_t = \dot{B}_t}$$

---

2. Intégrale d'OU

2.2 Équation de Langevin, cas $\beta = -4\eta,\ \omega^2 = 3\eta^2$

$$\boxed{\ddot{X}_t - 4\eta\dot{X}_t + 3\eta^2 X_t = \dot{B}_t}$$

- ***Processus :***

$$\boxed{\begin{aligned} X_t = &\int_0^t \frac{1}{2\eta}\left(e^{-\eta(t-s)} - e^{-3\eta(t-s)}\right) dB_s \\ &+ \left(\frac{3}{2}\,e^{-\eta t} - \frac{1}{2}\,e^{-3\eta t}\right) X_0 + \frac{1}{2\eta}\left(e^{-\eta t} - e^{-3\eta t}\right)\dot{X}_0 \end{aligned}}$$

2. Intégrale d'OU

2.2 Équation de Langevin, cas $\beta = -4\eta,\ \omega^2 = 3\eta^2$

$$\boxed{\ddot{X}_t - 4\eta\dot{X}_t + 3\eta^2 X_t = \dot{B}_t}$$

- ***Processus :***

$$\boxed{\begin{aligned} X_t = &\int_0^t \frac{1}{2\eta}\left(e^{-\eta(t-s)} - e^{-3\eta(t-s)}\right) dB_s \\ &+ \left(\frac{3}{2}\, e^{-\eta t} - \frac{1}{2}\, e^{-3\eta t}\right) X_0 + \frac{1}{2\eta}\left(e^{-\eta t} - e^{-3\eta t}\right) \dot{X}_0 \end{aligned}}$$

- ***Autre représentation :***

$$\boxed{\int_0^t \frac{1}{2\eta}\left(e^{-\eta(t-s)} - e^{-3\eta(t-s)}\right) dB_s \overset{\text{loi}}{=} e^{-3\eta t} \int_0^{(e^{2\eta t}-1)/(2\eta)} B_s\, ds}$$

$\longrightarrow$ **intégrale du MB changée de temps**

2. Intégrale d'OU

2.2 Équation de Langevin, cas $\beta = -4\eta,\ \omega^2 = 3\eta^2$

$$\boxed{\ddot{X}_t - 4\eta\dot{X}_t + 3\eta^2 X_t = \dot{B}_t}$$

- ***Loi du couple*** $(\tau_a, \dot{X}_{\tau_a})$ *(Wong 1966)* **:**
  $\longrightarrow$ **représentation en termes de fonctions elliptiques...**
- ***Références :*** **Longuet-Higgins (1963), Miroshin (1976), Rice (1945), Shepp (1976), Slepian (1963)...**

Partie III

Intégrale du MB

3. Intégrale du MB

3.1 Équation de Langevin, cas $\beta = \omega = 0$

$$\boxed{\ddot{X}_t = \dot{B}_t}$$

3. Intégrale du MB

3.1 Équation de Langevin, cas $\beta = \omega = 0$

$$\boxed{\ddot{X}_t = \dot{B}_t}$$

- ***Processus :***

$$\boxed{X_t = \int_0^t B_s\, ds + X_0 = \int_0^t (t-s)\, dB_s + X_0 + t\dot{X}_0}$$

où $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est le MB 1D démarrant de $\dot{X}_0$
$\longrightarrow$ $(X_t)_{t\geqslant 0}$ processus gaussien non-markovien 1D
$\longrightarrow$ intégrale du MB ou processus de Langevin

3. Intégrale du MB

3.1 Équation de Langevin, cas $\beta = \omega = 0$

$$\boxed{\ddot{X}_t = \dot{B}_t}$$

- ***Processus :***

$$\boxed{X_t = \int_0^t B_s\, ds + X_0 = \int_0^t (t-s)\, dB_s + X_0 + t\dot{X}_0}$$

où $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est le MB 1D démarrant de $\dot{X}_0$

$\longrightarrow$ $(X_t)_{t\geqslant 0}$ processus gaussien non-markovien 1D

$\longrightarrow$ intégrale du MB ou processus de Langevin

- ***Fonction de covariance (lorsque $X_0 = \dot{X}_0 = 0$) :***

$$\boxed{\mathbb{E}(X_s X_t) = \frac{(s\wedge t)^2}{6}\left[3(s\vee t) - (s\wedge t)\right]}$$

$\longrightarrow$ fonction de Green de d^4/dt^4

3.2 Couplage associé

$$\boxed{(U_t)_{t\geqslant 0} = (X_t, B_t)_{t\geqslant 0}, \quad \dot{X}_t = B_t}$$

3.2 Couplage associé

$$\boxed{(U_t)_{t\geqslant 0} = (X_t, B_t)_{t\geqslant 0}, \quad \dot{X}_t = B_t}$$

- ***Diffusion :*** $(U_t)_{t\geqslant 0}$ **diffusion gaussienne markovienne 2D dans l'espace des phases** $(x, \dot{x})$
  $\longrightarrow$ **diffusion de Kolmogorov**
- ***Générateur infinitésimal (**$y = \dot{x}$**) :***

$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y\frac{\partial}{\partial x}}$$

3. Intégrale du MB

3.2 Couplage associé

$$\boxed{(U_t)_{t\geqslant 0} = (X_t, B_t)_{t\geqslant 0}, \quad \dot{X}_t = B_t}$$

- ***Densités de transition :***

$$\boxed{\begin{aligned} p_t(x, y; u, v) &= \mathbb{P}_{(x,y)}\{U_t \in du\, dv\}/du\, dv \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\Big(-\frac{6}{t^3}(u - x - ty)^2 \\ &\qquad + \frac{6}{t^2}(u - x - ty)(v - y) - \frac{2}{t}(v - y)^2\Big) \end{aligned}}$$

3.2 Couplage associé

$$\boxed{(U_t)_{t\geqslant 0} = (X_t, B_t)_{t\geqslant 0}, \quad \dot{X}_t = B_t}$$

- ***Symétrie :***

$$\boxed{(-X_t, -B_t)_{t\geqslant 0} \stackrel{\text{loi}}{=} (X_t, B_t)_{t\geqslant 0}}$$

- ***Auto-similarité :***

$$\boxed{(X_{ct}, B_{ct})_{t\geqslant 0} \stackrel{\text{loi}}{=} (c^{3/2}X_t, c^{1/2}B_t)_{t\geqslant 0}}$$

- ***Inversion du temps :***

$$\boxed{(X_{1/t}, B_{1/t})_{t>0} \stackrel{\text{loi}}{=} (X_t/t^3, B_t/t)_{t>0}}$$

3. Intégrale du MB

3.2 Couplage associé

$$\boxed{(U_t)_{t\geqslant 0} = (X_t, B_t)_{t\geqslant 0}, \quad \dot{X}_t = B_t}$$

- ***Propriété de Markov :*** pour t_0 fixé

$$\boxed{(X_{t+t_0}, B_{t+t_0})_{t\geqslant 0} = ((\tilde{X}_t, \tilde{B}_t) + (X_{t_0} + tB_{t_0}, B_{t_0}))_{t\geqslant 0}}$$

  ou encore

$$\boxed{(U_{t+t_0})_{t\geqslant 0} = (\tilde{U}_t + \phi_t(U_{t_0}))_{t\geqslant 0}}$$

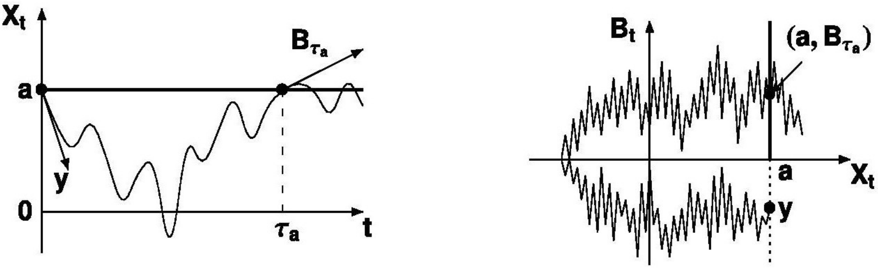
  où $\tilde{U} = (\tilde{X}, \tilde{B})$ est une copie de U indépendante de $\mathcal{F}_{t_0}$ et $\phi_t(x, y) = (x + ty, y)$

- ***Accroissements** non indépendants non stationnaires :*

$$\boxed{X_t - X_s = \tilde{X}_{t-s} + (t - s)B_s}$$

3.3 Premier instant de passage — $(X_0, B_0) = (a, y)$, $y \neq 0$

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, \quad \dot{X}_{\tau_a} = B_{\tau_a}}$$



Loi horaire $t \longmapsto X_t$ Courbe $t \longmapsto (X_t, B_t)$

Position et vitesse initiales : $(X_0, B_0) = (a, y)$

3.3 Premier instant de passage — $(X_0, B_0) = (a, y), y \neq 0$

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, \quad \dot{X}_{\tau_a} = B_{\tau_a}}$$

- ***Loi de*** (τ_a, B_{τ_a}) ***lorsque*** $X_0 = a$ *(McKean, 1963)* **:** pour $y, z > 0$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}_{(a,y)}\{\tau_a \in dt, |B_{\tau_a}| \in dz\}/dt\,dz\\ &\quad = \frac{3z}{\pi\sqrt{2}\,t^2}\, e^{-2(y^2-yz+z^2)/t} \int_0^{4yz/t} e^{-3\theta/2}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\end{aligned}}$$

3. Intégrale du MB

***3.3 Premier instant de passage* — $(X_0, B_0) = (a, y), y \neq 0$**

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, \quad \dot{X}_{\tau_a} = B_{\tau_a}}$$

- ***Loi de (τ_a, B_{τ_a}) lorsque $X_0 = a$* (McKean, 1963) *:* pour $y, z > 0$**

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}_{(a,y)}\{\tau_a \in dt, |B_{\tau_a}| \in dz\}/dt\,dz\\ &\quad = \frac{3z}{\pi\sqrt{2}\,t^2}\, e^{-2(y^2-yz+z^2)/t} \int_0^{4yz/t} e^{-3\theta/2}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\end{aligned}}$$

- ***Démonstration :* résolution d'une équation de "continuité" à l'aide de la transformation de Kontorovich-Lebedev**

$$\begin{cases} \hat{f}(\zeta) = \displaystyle\int_0^{\infty} K_{i\zeta}(z)\, f(z)\, dz, \\ f(z) = \displaystyle\frac{2}{\pi z^2} \int_0^{\infty} K_{i\zeta}(z)\, \hat{f}(\zeta)\, \zeta\, \sinh(\pi\zeta)\, d\zeta \end{cases}$$

3.3 Premier instant de passage — $(X_0, B_0) = (a, y), y \neq 0$

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, \quad \dot{X}_{\tau_a} = B_{\tau_a}}$$

- ***Loi de B_{τ_a}*** *(McKean, 1963)* **:** pour $y, z > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}_{(a,y)}\{|B_{\tau_a}| \in dz\}/dz = \frac{3}{2\pi}\frac{y^{1/2}z^{3/2}}{y^3 + z^3}}$$

3. Intégrale du MB

***3.3 Premier instant de passage* — $(X_0, B_0) = (x, y), x \neq a$**

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, \quad \dot{X}_{\tau_a} = B_{\tau_a}}$$

- ***Loi de (τ_a, B_{τ_a}) lorsque $X_0 \neq a$ (AL, 1990) :***
  $\longrightarrow$ représentation intégrale...

3.3 Premier instant de passage — $(X_0, B_0) = (x, y), x \neq a$

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, \quad \dot{X}_{\tau_a} = B_{\tau_a}}$$

- ***Loi de*** (τ_a, B_{τ_a}) ***lorsque*** $X_0 \neq a$ *(AL, 1990)* **:**
  $\longrightarrow$ représentation intégrale...
- ***Obtention :*** **la fonction** $U(x, y) = \mathbb{E}_{(x,y)}\left(e^{-\lambda\tau_a + i\mu B_{\tau_a}}\right)$ **vérifie**

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x, y) + y\,\dfrac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \lambda\, U(x, y) \quad \text{pour } x < a \\ U(a^-, y) = e^{i\mu y} \quad \text{pour } y > 0 \end{cases}}$$

  Puis résolution à l'aide de la transformation de Kontorovich-Lebedev...
- ***Références :*** **Goldman (1971), Gor'kov (1975), McKean (1963), Lachal (1990)**

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0, y)$, $y \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t = 0\} \\ \tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : X_t = 0\}, \quad \beta_n = |B_{\tau_n}| \text{ pour } n \geqslant 1 \end{array}}$$

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0, y),\ y \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t = 0\} \\ &\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : X_t = 0\}, \quad \beta_n = |B_{\tau_n}| \text{ pour } n \geqslant 1 \end{aligned}}$$

- ***Loi de*** (τ_n, β_n) *(AL, 1995)* : pour $y, z > 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}_{(0,y)}\{\tau_n \in dt, \beta_n \in dz\}/dt\,dz \\ &\quad = \frac{1}{\pi^2 yt}\, e^{-2(y^2+z^2)/t} \int_0^{+\infty} K_{i\gamma}\!\left(\frac{4yz}{t}\right) \frac{\gamma \sinh(\pi\gamma)}{[2\cosh(\pi\gamma/3)]^n}\, d\gamma \end{aligned}}$$

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0, y), y \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t = 0\} \\ \tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : X_t = 0\}, \quad \beta_n = |B_{\tau_n}| \text{ pour } n \geqslant 1 \end{array}}$$

- ***Loi de*** (τ_n, β_n) *(AL, 1995)* **: pour** $y, z > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}_{(0,y)}\{\tau_n \in dt, \beta_n \in dz\}/dt\, dz \\ \quad = \dfrac{1}{\pi^2 yt}\, e^{-2(y^2+z^2)/t} \displaystyle\int_0^{+\infty} K_{i\gamma}\left(\frac{4yz}{t}\right) \frac{\gamma \sinh(\pi\gamma)}{[2\cosh(\pi\gamma/3)]^n}\, d\gamma \end{array}}$$

- ***Démonstration :*** **utilisation d'une martingale**

$$M_t = e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} p_s(X_s, -|B_s|; 0, z)\, K_{i\gamma}\left(\sqrt{8\lambda}\, z\right) ds\, dz$$

$\Longrightarrow \mathbb{E}_{(0,y)}(M_{\tau_n}) = \mathbb{E}_{(0,y)}(M_{\tau_{n-1}}) \longrightarrow$ **relation de récurrence...**

3. Intégrale du MB

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0, y), y \neq 0$

$$\tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$$
$$\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : X_t = 0\}, \quad \beta_n = |B_{\tau_n}| \text{ pour } n \geqslant 1$$

- ***Loi de β_n (AL, 1995)* : pour $y, z > 0$**

$$\mathbb{P}_{(0,y)}\{\beta_n \in dz\}/dz = \frac{[3/(2\pi)]^n}{(n-1)!} \frac{y^{1/2} z^{3/2}}{z^3 + (-1)^{n+1} y^3} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} N_{k,n} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k} \left(\ln \frac{z}{y}\right)^{n-1-2k}$$

où les $N_{k,n}$ sont des entiers positifs explicites

- **La suite $(\tau_n, \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov**

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0,0)$

$$\tau_1^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless 1 : X_t = 0\}$$
$$\tau_n^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless \tau_{n-1}^{\pm} : X_t = 0\}, \quad \beta_n^{\pm} = \left|B_{\tau_n^{\pm}}\right| \text{ pour } n \geqslant 1$$

3. Intégrale du MB

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0, 0)$

$$\tau_1^\pm = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless 1 : X_t = 0\}$$
$$\tau_n^\pm = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless \tau_{n-1}^\pm : X_t = 0\}, \quad \beta_n^\pm = \left|B_{\tau_n^\pm}\right| \text{ pour } n \geqslant 1$$

- ***Loi de (τ_n^+, β_n^+)*** *(AL, 1995)* **:**

$$\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^+ \in dt, \beta_n^+ \in dz\}/dt\,dz$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2} \frac{t-1}{tz} e^{-(2t-1)z^2/[t(t-1)]}$$
$$\times \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2\cosh(\frac{\pi\gamma}{3})}\right) \frac{\gamma \sinh(\frac{\pi\gamma}{2})}{[2\cosh(\frac{\pi\gamma}{3})]^n}$$
$$\times W_{-1, i\gamma/2}\left(\frac{2z^2}{t(t-1)}\right) d\gamma$$

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0, 0)$

$$\tau_1^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix}\{t \gtrless 1 : X_t = 0\}$$
$$\tau_n^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix}\{t \gtrless \tau_{n-1}^{\pm} : X_t = 0\}, \quad \beta_n^{\pm} = \left|B_{\tau_n^{\pm}}\right| \text{ pour } n \geqslant 1$$

- ***Lois de** (τ_n^-, β_n^-) **et** (τ_n^+, β_n^+)* *(AL, 1995)* **: représentations intégrales en termes de fonctions de Whittaker...**

$$(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{\text{loi}}{=} \left(1/\tau_n^+, \beta_n^+/\tau_n^+\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

3. Intégrale du MB

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0, 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tau_1^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless 1 : X_t = 0\} \\ \tau_n^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless \tau_{n-1}^{\pm} : X_t = 0\}, \quad \beta_n^{\pm} = \left|B_{\tau_n^{\pm}}\right| \text{ pour } n \geqslant 1 \end{array}}$$

- ***Lois de** (τ_n^-, β_n^-) **et** (τ_n^+, β_n^+)* *(AL, 1995)* **: représentations intégrales en termes de fonctions de Whittaker...**

$$\boxed{(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n\in\mathbb{N}^*} \overset{\text{loi}}{=} \left(1/\tau_n^+, \beta_n^+/\tau_n^+\right)_{n\in\mathbb{N}^*}}$$

- ***Asymptotiques*** *(McKean, 1963)* **:**

$$\boxed{\ln(\tau_n^+) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8\pi}{\sqrt{3}} n, \ \ln(\beta_n^+) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\pi}{\sqrt{3}} n, \ \theta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{3}}{8} \ln(t) \text{ p.s.}}$$

- ***Démonstration :*** **loi des grands nombres**
$\beta_n = |y|\, b_1 \times \cdots \times b_n, \quad b_1, \ldots, b_n$ **i.i.d. de même loi que** β_1

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0,0)$

$$\tau_1^{\pm} = \begin{matrix}\inf\\ \sup\end{matrix} \{t \gtrless 1 : X_t = 0\}$$
$$\tau_n^{\pm} = \begin{matrix}\inf\\ \sup\end{matrix} \{t \gtrless \tau_{n-1}^{\pm} : X_t = 0\}, \quad \beta_n^{\pm} = \left|B_{\tau_n^{\pm}}\right| \text{ pour } n \geqslant 1$$

- ***Excursions*** *(AL, 2003)* **: pour F_t et G resp. $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_\infty$−mesurables**

$$\mathbb{E}_{(x,y)}\left(\sum_{t\in\mathbb{T}} F_t \times (G \circ \theta_t)\right)$$
$$= \mathbb{E}_{(x,y)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{\tau_n^-}\, \mathbb{E}_{(0,\beta_n^-)}(G) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{\tau_n^+}\, \mathbb{E}_{(0,\beta_n^+)}(G)\right)$$

où $\mathbb{T} = \{\tau_n^-, \tau_n^+, n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\theta_t \ : \ U_s \mapsto U_{s+t}$

3. Intégrale du MB

3.4 Passages successifs en 0 — $(X_0, B_0) = (0,0)$

$$\tau_1^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless 1 : X_t = 0\}$$
$$\tau_n^{\pm} = \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix} \{t \gtrless \tau_{n-1}^{\pm} : X_t = 0\}, \quad \beta_n^{\pm} = \left|B_{\tau_n^{\pm}}\right| \text{ pour } n \geqslant 1$$

- ***Excursions*** (AL, 2003) **:** pour F_t et G resp. $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_\infty$–mesurables

$$\mathbb{E}_{(x,y)}\left(\sum_{t\in\mathbb{T}} F_t \times (G \circ \theta_t)\right) = \mathbb{E}_{(x,y)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{\tau_n^-}\,\mathbb{E}_{(0,\beta_n^-)}(G) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{\tau_n^+}\,\mathbb{E}_{(0,\beta_n^+)}(G)\right)$$

  où $\mathbb{T} = \{\tau_n^-, \tau_n^+, n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\theta_t : U_s \mapsto U_{s+t}$
- ***Utilisation :*** processus réfléchi, ressuscité, rebonds...
- ***Références :*** Bertoin (2007), Jacob (2010), Lachal (1995, 2003)...

3.5 Dernier instant de passage en 0

$$\boxed{\tau_T^- = \sup\{t < T : X_t = 0\}, \quad \tau_T^+ = \inf\{t > T : X_t = 0\}}$$

3.5 Dernier instant de passage en 0

$$\boxed{\tau_T^- = \sup\{t < T : X_t = 0\}, \quad \tau_T^+ = \inf\{t > T : X_t = 0\}}$$

- ***Loi de (τ_T^-, τ_T^+) (AL, 1994) :***

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_T^- \in ds, \tau_T^+ \in d\sigma\}/ds\,d\sigma \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2} \int_0^{+\infty} K_0\left(4z\sqrt{\frac{\sigma}{s}}\right) z\, e^{2z}\, dz \int_0^{4z} e^{-3\theta/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\end{aligned}}$$

3. Intégrale du MB

3.5 Dernier instant de passage en 0

$$\boxed{\tau_T^- = \sup\{t < T : X_t = 0\}, \quad \tau_T^+ = \inf\{t > T : X_t = 0\}}$$

- ***Loi de*** (τ_T^-, τ_T^+) *(AL, 1994)* **:**

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_T^- \in ds, \tau_T^+ \in d\sigma\}/ds\,d\sigma \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2} \int_0^{+\infty} K_0\left(4z\sqrt{\frac{\sigma}{s}}\right) z\, e^{2z}\, dz \int_0^{4z} e^{-3\theta/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\end{aligned}}$$

- ***Dimension de Hausdorff*** *(Aspandiiarov & Le Gall, 1994)* **:**

$$\boxed{\dim\{t \in [0,1] : \forall s \in [0,1]\backslash\{t\}, \frac{1}{t-s}\int_s^t B_u\, du \leqslant B_t\} = \frac{1}{2} \text{ p.s.}}$$

- ***Démonstration :*** **estimations**

$$\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_t^+ > \varepsilon\} = \mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_\varepsilon^- < t\} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\sim} c\sqrt[4]{\varepsilon/t}$$

3.5 Dernier instant de passage en 0

$$\boxed{\tau_T^- = \sup\{t < T : X_t = 0\}, \quad \tau_T^+ = \inf\{t > T : X_t = 0\}}$$

- ***Utilisation :*** **analyse statistique de l'équation de Burgers**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- ***Références :*** **Isozaki & Watanabe (1994), Sinai (1992)**

3.6 Autre premier instant de passage

$$\boxed{\sigma_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\}}$$

- ***Loi de*** (σ_b, X_{σ_b}) *(Lefèbvre, 1989)* **: pour** $y > b$

$$\boxed{\mathbb{E}_{(x,y)}\left(e^{-\lambda\sigma_b + i\mu X_{\sigma_b}}\right) = e^{i\mu x} A(y)/A(b)}$$

où

$$A(y) = \mathrm{Ai}\left(2^{1/3}\frac{\lambda - i\mu y}{|\mu|^{1/3}} e^{\mathrm{sgn}(\mu) i\pi/3}\right)$$

- ***Démonstration :*** **problème de Sturm-Liouville, martingales...**

- ***Références :*** **Biane & Yor (1987), Lachal (1990), Lefèbvre et al. (1989)**

Partie IV

Intégrales itérées du MB

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

---

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Formule de Cameron-Martin :*** **pour F_t $\mathcal{F}_t$-mesurable**

$$\boxed{\mathbb{E}^{(P)}(F_t) = \mathbb{E}(\mathcal{E}_t F_t)}$$

avec

$$\mathcal{E}_t = \left.\frac{d\mathbb{P}^{(P)}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t P'(s)^2\, ds + \int_0^t P'(s)\, dB_s\right)$$

$\longrightarrow$ Nécessité d'introduire les intégrales itérées du MB

$$\boxed{X_t^{(n)} = \frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n\, dB_s, \quad n \in \mathbb{N}}$$

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Processus gaussien :*** **fonction de covariance**

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_s^{(n)} X_t^{(n)}\right) = \frac{1}{n!^2} \int_0^{s \wedge t} (s-u)^n (t-u)^n \, du}$$

$\longrightarrow$ **fonction de Green de** d^{2n+2}/dt^{2n+2}

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Processus gaussien :*** **fonction de covariance**

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_s^{(n)} X_t^{(n)}\right) = \frac{1}{n!^2} \int_0^{s\wedge t} (s-u)^n (t-u)^n \, du}$$

$\longrightarrow$ **fonction de Green de d^{2n+2}/dt^{2n+2}**

- ***Auto-similarité :***

$$\boxed{\left(X_{ct}^{(n)}\right)_{t\geqslant 0} \overset{\text{loi}}{=} \left(c^{n+1/2} X_t^{(n)}\right)_{t\geqslant 0}}$$

- ***Inversion du temps :***

$$\boxed{\left(X_{1/t}^{(n)}\right)_{t>0} \overset{\text{loi}}{=} \left(X_t^{(n)}/t^{2n+1}\right)_{t>0}}$$

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Couplage associé :***

$$\boxed{\left(U_t^{(n)}\right)_{t \geqslant 0} = \left(B_t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)_{t \geqslant 0}}$$

$\longrightarrow \left(U_t^{(n)}\right)_{t \geqslant 0}$ **diffusion gaussienne $(n+1)D$**

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Couplage associé :***

$$\boxed{\left(U_t^{(n)}\right)_{t\geqslant 0} = \left(B_t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)_{t\geqslant 0}}$$

$\longrightarrow \left(U_t^{(n)}\right)_{t\geqslant 0}$ diffusion gaussienne $(n+1)D$

- ***Générateur infinitésimal :***

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + x_0\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_{n-1}\,\frac{\partial}{\partial x_n}}$$

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Couplage associé :***

$$\boxed{\left(U_t^{(n)}\right)_{t \geqslant 0} = \left(B_t, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(n)}\right)_{t \geqslant 0}}$$

$\longrightarrow \left(U_t^{(n)}\right)_{t \geqslant 0}$ diffusion gaussienne $(n+1)D$

- ***Générateur infinitésimal :***

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_n}}$$

- ***Loi de*** $\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t^{(n)} = a\}$ ***:***

$\longrightarrow$ problème ouvert pour $n \geqslant 2$

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Pont de l'intégrale itérée du MB :***

$$\boxed{Y_t^{(n)} = \left(X_t^{(n)} \middle| \, U_0^{(n)} = U_1^{(n)} = 0\right), \; t \in [0,1]}$$

- ***Lien entre*** $\left(X_t^{(n)}\right)_{t \geqslant 0}$ ***et*** $\left(Y_t^{(n)}\right)_{t \in \,]0,1]}$ ***:***

$$\boxed{\left(Y_t^{(n)}\right)_{t \in \,]0,1]} \overset{\text{loi}}{=} \left(t^{2n+1}\, X_{1/t-1}^{(n)}\right)_{t \in \,]0,1]}}$$

- ***Loi du supremum de*** $Y_t^{(n)}$ ***:***

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} Y_t^{(n)} < x\right\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{t \geqslant 0} \left[X_t^{(n)} - x(t+1)^{2n+1}\right] < 0\right\}}$$

4. Intégrales itérées du MB

4.1 Dérive polynomiale :

$$\boxed{B_t^{(P)} = B_t + P(t), \quad P \text{ polynôme}}$$

- ***Utilisation :***
  - intégrales itérées du pont brownien et divers ponts d'intégrales itérées du MB
  - problèmes aux limites relatifs à d^{2n+2}/dt^{2n+2} sur $[0,1]$ avec diverses conditions aux limites en 0 et 1
  - statistiques de Kolmogorov-Smirnov intégrées
  - estimation d'une densité convexe...

- ***Références :*** Groeneboom Jongbloed & Wellner ($n = 1$, 1989, 1999), Henze & Nikitin ($n = 1$, 1999, 2000), Lachal (1996, 2001, 2002, 2011), Wahba (1978, 1983)...

4.2 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré pour $X^{(n)}$ (Watanabe, 1970) :***

$$\boxed{\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{X_t^{(n)}}{t^{n+1/2}\sqrt{2\ln\ln t}} = -\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{X_t^{(n)}}{t^{n+1/2}\sqrt{2\ln\ln t}} = \frac{1}{n!\sqrt{2n+1}} \text{ p.s.}}$$

$\longrightarrow$ $(X_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ **processus récurrent**

4.2 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré pour $X^{(n)}$*** *(Watanabe, 1970)* **:**

$$\boxed{\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{X_t^{(n)}}{t^{n+1/2}\sqrt{2\ln\ln t}} = -\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{X_t^{(n)}}{t^{n+1/2}\sqrt{2\ln\ln t}} = \frac{1}{n!\sqrt{2n+1}} \text{ p.s.}}$$

$\longrightarrow (X_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ **processus récurrent**

- ***Loi du logarithme pour $U^{(n)}$*** *(AL, 1997)* **:**

$$\boxed{\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{(\ln t)^{\varepsilon+1/2}}{\sqrt{t}} \|U_t^{(n)}\| = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \leqslant 0 \\ +\infty & \text{si } \varepsilon > 0 \end{cases} \text{ p.s.}}$$

$\longrightarrow (U_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ **processus transient si $n \geqslant 2$**

4. Intégrales itérées du MB

4.2 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré pour $X^{(n)}$** (Watanabe, 1970) :*

$$\boxed{\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{X_t^{(n)}}{t^{n+1/2}\sqrt{2\ln\ln t}} = -\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{X_t^{(n)}}{t^{n+1/2}\sqrt{2\ln\ln t}} = \frac{1}{n!\sqrt{2n+1}} \text{ p.s.}}$$

$\longrightarrow (X_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ **processus récurrent**

- ***Loi du logarithme pour $U^{(n)}$** (AL, 1997) :*

$$\boxed{\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{(\ln t)^{\varepsilon+1/2}}{\sqrt{t}} \|U_t^{(n)}\| = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \leqslant 0 \\ +\infty & \text{si } \varepsilon > 0 \end{cases} \text{ p.s.}}$$

$\longrightarrow (U_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ **processus transient si $n \geqslant 2$**

- ***Démonstrations :*** **diverses estimations fines sur la densité et Borel-Cantelli raffiné...**

4.2 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré de Chung*** *(Chen & Li, 2003)* **:**

$$\boxed{\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s^{(n)}\right|}{(t/\ln\ln t)^{n+1/2}} = \kappa_n \in]0,+\infty[\text{ p.s.}}$$

4. Intégrales itérées du MB

4.2 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré de Chung*** *(Chen & Li, 2003)* **:**

$$\boxed{\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s^{(n)}\right|}{(t/\ln\ln t)^{n+1/2}} = \kappa_n \in \,]0,+\infty[\text{ p.s.}}$$

- ***Démonstration :*** **probabilité des petites boules gaussiennes**

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \varepsilon^{2/(2n+1)} \ln \mathbb{P}\left\{ \sup_{s\in[0,1]} \left|X_s^{(n)}\right| < \varepsilon \right\} = -\kappa_n^{2/(2n+1)}$$

- ***Problème ouvert :*** **calcul exact de κ_n pour $n \geqslant 1$?**

4.2 Asymptotiques

- ***Test intégral 1 – classe asymptotique supérieure** (AL, 1997) :*

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int^{+\infty} e^{-f(t)^2/2}\,\frac{dt}{t}\,\left\{\begin{matrix}<\\=\end{matrix}\right\}+\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left\{\left\|U_t^{(n)}\right\| \underset{t\to+\infty}{<} c_n t^{n+1/2} f(t)\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\\ \displaystyle\int_{0^+} f(t)e^{-f(t)^2/2}\,\frac{dt}{t}\,\left\{\begin{matrix}<\\=\end{matrix}\right\}+\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left\{\left\|U_t^{(n)}\right\| \underset{t\to0^+}{<} \sqrt{t}\, f(t)\right\} = \left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\end{array}}$$

pour f positive croissante, $c_n = 1/\left(n!\,\sqrt{2n+1}\right)$

4.2 Asymptotiques

- ***Test intégral 1 – classe asymptotique supérieure (AL, 1997) :***

$$\int^{+\infty} e^{-f(t)^2/2}\frac{dt}{t}\begin{Bmatrix}<\\=\end{Bmatrix}+\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left\{\left\|U_t^{(n)}\right\| \underset{t\to+\infty}{<} c_n t^{n+1/2} f(t)\right\} = \begin{cases}1\\0\end{cases}$$

$$\int_{0^+} f(t) e^{-f(t)^2/2}\frac{dt}{t}\begin{Bmatrix}<\\=\end{Bmatrix}+\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left\{\left\|U_t^{(n)}\right\| \underset{t\to0^+}{<} \sqrt{t}\, f(t)\right\} = \begin{cases}1\\0\end{cases}$$

pour f positive croissante, $c_n = 1/\left(n!\,\sqrt{2n+1}\right)$

- ***Test intégral 2 – classe asymptotique supérieure (AL, 1997) :***

$$\int^{+\infty} f(t)^{(n+1)^2-2}\frac{dt}{t}\begin{Bmatrix}<\\=\end{Bmatrix}+\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left\{\left\|U_t^{(n)}\right\| \underset{t\to+\infty}{>} \sqrt{t}\, f(t)\right\} = \begin{cases}1\\0\end{cases}$$

$$\int_{0^+} f(t)^{\frac{(n+1)^2-2}{2n+1}}\frac{dt}{t}\begin{Bmatrix}<\\=\end{Bmatrix}+\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\left\{\left\|U_t^{(n)}\right\| \underset{t\to0^+}{>} t^{n+1/2} f(t)\right\} = \begin{cases}1\\0\end{cases}$$

pour $\sqrt{t}\, f(t)$ ou $t^{n+1/2} f(t)$ positive croissante $\geqslant$ ou $\leqslant$ à 1

4. Intégrales itérées du MB

4.2 Asymptotiques

- ***Autres résultats limites :***
  - **module de continuité**
  - **convergence quadratique**
  - **loi du logarithme itéré fonctionnelle**
  - **points réguliers**
  - **conditionnements...**
- ***Références :*** **Chen & Li (2003), Isozaki & Watanabe ($n = 1$, 1994), Khoshnevisan & Shi ($n = 1$, 1998), Lachal (1997, 2001, 2002), Profeta ($n = 1$, 2014), Zhang & Lin (2001, 2006)...**

4. Intégrales itérées du MB

4.3 Récapitulatif

- ***Avantages :***
  - **processus gaussien**
  - **auto-similarité**
  - **couplage diffusion (Markov)**

4.3 Récapitulatif

- ***Avantages :***
  - **processus gaussien**
  - **auto-similarité**
  - **couplage diffusion (Markov)**
- ***Inconvénients :***
  - **couplage markovien en dimension > 1**
  - **couplage anisotrope**
  - **accroissements non indépendants non stationnaires**

4. Intégrales itérées du MB

4.3 Récapitulatif

- ***Avantages :***
  - **processus gaussien**
  - **auto-similarité**
  - **couplage diffusion (Markov)**
- ***Inconvénients :***
  - **couplage markovien en dimension > 1**
  - **couplage anisotrope**
  - **accroissements non indépendants non stationnaires**
- ***Techniques :***
  - **propriété de Markov**
  - **EDO et EDP en dimension > 1**
  - **calcul stochastique**
  - **martingales**
  - **estimations asymptotiques**

Partie V

Fonctionnelles additives homogènes du MB

5. Fonctionnelles additives homogènes du MB

5.1 Une autre classe de fonctionnelles intégrales

$$X_t^{(\alpha)} = \int_0^t V_\alpha(B_s)\, ds + X_0^{(\alpha)}, \quad V_\alpha(y) = \begin{cases} y^\alpha & \text{si } y \geqslant 0 \\ -K\,|y|^\alpha & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}, \; K, \alpha > 0$$

5. Fonctionnelles additives homogènes du MB

5.1 Une autre classe de fonctionnelles intégrales

$$X_t^{(\alpha)} = \int_0^t V_\alpha(B_s)\, ds + X_0^{(\alpha)}, \quad V_\alpha(y) = \begin{cases} y^\alpha & \text{si } y \geqslant 0 \\ -K\,|y|^\alpha & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}, \quad K, \alpha > 0$$

- ***Lien avec les processus stables :***

  Pour $K = 1$, $V_\alpha(y) = sgn(y)\,|y|^\alpha$

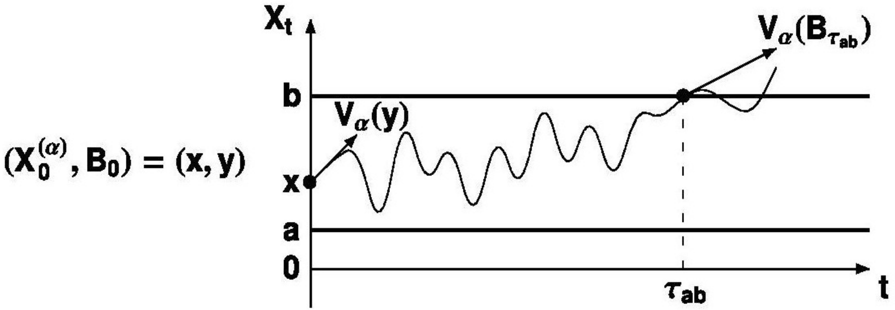
  Soit $\sigma_t = \inf\{s \geqslant 0 : L_s > t\}$ l'inverse du temps local brownien $\longrightarrow (X_{\sigma_t})_{t \geqslant 0}$ est un processus stable symétrique ($X_0^{(\alpha)} = 0$) :

  $$\boxed{\mathbb{E}\left(e^{iuX_{\sigma_t}^{(\alpha)}}\right) = e^{-ct|u|^{1/(\alpha+2)}}}$$

- ***Références :*** Biane & Yor (1987), McGill (1989), Rogers & Williams (1984),...

5.2 Premier temps de sortie de $[a, b]$

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\left\{ t > 0 : X_t^{(\alpha)} \notin [a, b] \right\}}$$



5.2 Premier temps de sortie de $[a,b]$

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\Big\{t > 0 : X_t^{(\alpha)} \notin [a,b]\Big\}}$$

- ***Loi de*** $B_{\tau_{ab}}$ *(AL, 2000)* **:** pour $x \in\,]a,b[$ et $z > 0$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}_{(x,0)}\{B_{\tau_{ab}} \in dz\}/dz\\ &= C\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{-\gamma} \frac{z^{\alpha-\gamma(\alpha+2)}}{(b-x)^{1-\gamma-1/(\alpha+2)}}\\ &\qquad \times e^{-z^{\alpha+2}/A(b-x)}\, M\!\left(-\gamma; 1-\gamma; \frac{x-a}{b-x}\,\frac{z^{\alpha+2}}{A(b-a)}\right)\end{aligned}}$$

où $\gamma = -\dfrac{1}{\pi}\,\text{arccot}\left(\dfrac{K^{-1/(\alpha+2)} + \cos(\frac{\pi}{\alpha+2})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+2})}\right)$

5.2 Premier temps de sortie de $[a, b]$

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\left\{t > 0 : X_t^{(\alpha)} \notin [a, b]\right\}}$$

- ***Probabilité de ruine :***

$$\boxed{\mathbb{P}_{(x,0)}\{\tau_b < \tau_a\} = C\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{-\gamma} {}_2F_1\left(-\gamma, \frac{\alpha+1}{\alpha+2} - \gamma; 1-\gamma; \frac{x-a}{b-a}\right)}$$

5. Fonctionnelles additives homogènes du MB

5.2 Premier temps de sortie de $[a,b]$

$$\boxed{\tau_{ab} = \inf\left\{t > 0 : X_t^{(\alpha)} \notin [a,b]\right\}}$$

- ***Probabilité de ruine :***

$$\boxed{\mathbb{P}_{(x,0)}\{\tau_b < \tau_a\} = C\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{-\gamma} {}_2F_1\left(-\gamma, \frac{\alpha+1}{\alpha+2}-\gamma; 1-\gamma; \frac{x-a}{b-a}\right)}$$

- ***Démonstration :*** **EDP, excursions...**
  Les moments de $B_{\tau_{ab}}$ vérifient l'équation d'Abel généralisée

$$\frac{1}{K^{1/(\alpha+2)}}\int_a^x \frac{u_n(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}} - \int_x^b \frac{u_n(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}} = v_n(x)$$

- ***Références :*** **Franklin & Rodemich (1968), Masoliver & Porrà (1995), McGill (1989), Lachal (2000, 2006), Rogers & Williams (1984), Rogozin (1972), Widom (1961)...**

5. Fonctionnelles additives homogènes du MB

5.3 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré de Chung** (Simon & AL, 2010) :*

$$\boxed{\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s^{(\alpha)}\right|}{(t/\ln\ln t)^{1+\alpha/2}} = \kappa_\alpha \in]0,+\infty[\text{ p.s.}}$$

5.3 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré de Chung*** *(Simon & AL, 2010)* **:**

$$\boxed{\underline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s^{(\alpha)}\right|}{(t/\ln\ln t)^{1+\alpha/2}} = \kappa_\alpha \in]0,+\infty[\text{ p.s.}}$$

- ***Démonstration :***

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P}\{\tau_{ab} > t\} = -\kappa(a,b)$$

qui entraîne la probabilité des petites boules

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{2/(\alpha+2)} \ln \mathbb{P}\left\{ \sup_{s\in[0,1]} \left|X_s^{(\alpha)}\right| < \varepsilon \right\} = -\kappa(-1,1) = -\kappa_\alpha^{2/(\alpha+2)}$$

5.3 Asymptotiques

- ***Loi du logarithme itéré de Chung** (Simon & AL, 2010) :*

$$\boxed{\liminf_{t\to+\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s^{(\alpha)}\right|}{(t/\ln\ln t)^{1+\alpha/2}} = \kappa_\alpha \in]0,+\infty[\text{ p.s.}}$$

- ***Démonstration :***

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbb{P}\{\tau_{ab} > t\} = -\kappa(a,b)$$

qui entraîne la probabilité des petites boules

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{2/(\alpha+2)} \ln \mathbb{P}\left\{ \sup_{s\in[0,1]} \left|X_s^{(\alpha)}\right| < \varepsilon \right\} = -\kappa(-1,1) = -\kappa_\alpha^{2/(\alpha+2)}$$

- ***Problèmes ouverts :***
  - calcul exact de κ_α pour $\alpha \neq 1$?
  - loi du logarithme itéré fonctionnelle ?
- ***Références :*** Isozaki & Kotani (2000), Lachal & Simon (2010)

MERCI

DE VOTRE ATTENTION !