Un panorama de lois remarquables pour le pseudo-processus régi par l'équation de type chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$ d'ordre $n > 2$

Aimé LACHAL

Institut Camille Jordan, INSA de Lyon

En hommage à Enzo Orsingher...

1 Construction

- ***Équation de la chaleur d'ordre supérieur***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \text{ où } \kappa_n = \pm 1.}$$

- ***Noyau de type chaleur :*** $p(t;x)$
  - caractérisé par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} p(t;x)\,dx = e^{\kappa_n t(-iu)^n} = \begin{cases} e^{-tu^n} & \text{pour } n \text{ pair} \\ e^{\pm itu^n} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

  - définit un pseudo-processus Markovien $(X(t))_{t\geqslant 0}$ gouverné par une mesure signée de variation totale infinie (qui n'est pas une probabilité) selon

$$\mathbb{P}_x\{X(t) \in dy\} = p(t;x-y)\,dy$$

et pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$, $x_0 = x$,

$$\mathbb{P}_x\{X(t_1) \in dx_1, \ldots, X(t_m) \in dx_m\} = \prod_{i=1}^{m} p(t_i - t_{i-1}; x_{i-1} - x_i)\,dx_i$$

Définition 1

$$\mathbb{E}_x\left[\lim_{m\to\infty} F\left(X\left(\frac{t}{m}\right), X\left(\frac{2t}{m}\right), \ldots, X\left(\frac{mt}{m}\right)\right)\right]$$

$$\overset{\text{déf1}}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\left[F\left(X\left(\frac{t}{m}\right), X\left(\frac{2t}{m}\right), \ldots, X\left(\frac{mt}{m}\right)\right)\right]$$

Définition 2

$$\mathbb{E}_x\left[\lim_{n\to\infty} F\left(X\left(\frac{1}{2^m}\right), \ldots, X\left(\frac{k}{2^m}\right), \ldots\right)\right]$$

$$\overset{\text{déf2}}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\left[F\left(X\left(\frac{1}{2^m}\right), \ldots, X\left(\frac{k}{2^m}\right), \ldots\right)\right]$$

Exemple

$$\mathbb{P}_x\left\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s) \leqslant a\right\} \quad \overset{\text{déf1}}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}_x\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant m} X\left(\frac{kt}{m}\right) \leqslant a\right\}$$

$$\overset{\text{déf2}}{=} \quad \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}_x\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant [2^m t]} X\left(\frac{k}{2^m}\right) \leqslant a\right\}$$

Bibliographie

- **Krylov (1960) : cas n pair**
- **Hochberg (1978) : cas $n = 4$**
- **Orsingher et al. (1991–2001) : cas $n = 3$ et $n = 4$**
- **Nishioka (1996–2001) : cas $n = 4$**
- **Nakajima & Sato (1999) : cas $n = 4$**
- **Lachal (2003–2007) : cas général**

2 Étude de certaines fonctionnelles

- ***Temps de séjour au-delà d'un niveau***

$$\boxed{T_a(t) = \text{mesure}\{s \in [0,t] : X(s) > a\} = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X(s)>a\}}\, ds}$$

$\longrightarrow$ loi de $T_0(t)$, éventuellement conditionnée par $\{X(t) = 0\}$?

- ***Maximum du pseudo-processus***

$$\boxed{M(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)}$$

$\longrightarrow$ lois de $M(t)$ et $(X(t), M(t))$?

- ***Premier temps de dépassement d'un niveau***

$$\boxed{\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X(t) > a\} \text{ pour } x < a}$$

$\longrightarrow$ loi de $(\tau_a, X(\tau_a))$, éventuellement sous l'effet d'une dérive constante ?

Relations entre ces fonctionnelles

- ***Relations entre les lois de*** τ_a, $M(t)$ ***et*** $T_a(t)$

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{\tau_a \geqslant t\} = \mathbb{P}_x\{M(t) \leqslant a\} = \lim_{\mu\to+\infty} \mathbb{E}_x\Big(e^{-\mu T_a(t)}\Big)}$$

- ***Relation entre les lois de*** $(\tau_a, X(\tau_a))$ ***et*** $(X(t), M(t))$

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a + i\mu X(\tau_a)}\Big) = (\lambda - \kappa_n (i\mu)^n) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x\Big(e^{i\mu X(t)} \mathbb{1}_{\{M(t)>a\}}\Big)\, dt}$$

- ***Techniques requises***
  - formule de Feynman-Kac (EDP et transformées de Fourier-Laplace)
  - algèbre de Vandermonde
  - identité de Spitzer

3 Loi du temps de séjour $T_0(t)$

3.1 *Formule de Feynman-Kac*

$$\varphi(t;x) = \mathbb{E}_x\Big[e^{-\int_0^t f(X(s))\,ds} g(X(t))\Big] \overset{\text{déf}}{=} \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[e^{-\frac{t}{m}\sum_{k=0}^m f(X(\frac{kt}{m}))} g(X(t))\Big]$$

est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \kappa_n \dfrac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} - f\varphi \\ \varphi(0;x) = g(x) \end{cases}$$

La transformée de Laplace

$$\Phi(\lambda;x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\varphi(t;x)\,dt$$

est solution de

$$\boxed{\kappa_n \frac{d^n \Phi}{dx^n} = (f+\lambda)\Phi - g}$$

3.2 *Application au temps de séjour* $T_0(t)$

On pose

$$U(\lambda, \mu; x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x\Big(e^{-\mu T_0(t)}\Big)\, dt$$

U est solution de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l} \kappa_n \dfrac{d^n U}{dx^n} = \left\{\begin{array}{ll} (\lambda+\mu)\, U - 1 & \text{sur }]0, +\infty[\\ \\ \lambda\, U - 1 & \text{sur }]-\infty, 0[\end{array}\right. \\ \\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad \dfrac{d^k U}{dx^k}(\lambda, \mu; 0^+) = \dfrac{d^k U}{dx^k}(\lambda, \mu; 0^-) \end{array}\right.$$

On introduit les racines n^{e} de κ_n : $(\theta_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ et

$$\begin{array}{rcl} J & = & \{j \in \{0, \ldots, n-1\} : \Re e(\theta_j) > 0\} \\ K & = & \{k \in \{0, \ldots, n-1\} : \Re e(\theta_k) < 0\} \end{array}$$

Proposition *Pour $x = 0$:*

$$\boxed{U(\lambda, \mu; 0) = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda^{\#K}(\lambda+\mu)^{\#J}}}}$$

Après inversion de la transformée de Laplace, on trouve :

Théorème 1 (A.L., 2003) *$T_0(t)$ suit une loi Bêta :*

$$\boxed{\mathbb{P}_0\{T_0(t) \in ds\}/ds = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\#K}{n}\,\pi\right) \frac{\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}{\sqrt[n]{s^{\#K}(t-s)^{\#J}}}}$$

En particulier, si n est pair, $T_0(t)$ suit la loi arcsinus :

$$\boxed{\mathbb{P}_0\{T_0(t) \in ds\}/ds = \frac{\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}{\pi\sqrt{s(t-s)}}}$$

3.3 *Application au temps de séjour* $T_0(t)$ *conditionnel*

On pose

$$V(\lambda, \mu; x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left[\mathbb{E}_x\Big(e^{-\mu T_0(t)}, X(t) \in dy\Big)/dy\right] dt$$

Proposition *Pour* $x = y = 0$ *:*

$$\boxed{V(\lambda, \mu; 0, 0) = \frac{1}{l_n \mu}[\sqrt[n]{\lambda + \mu} - \sqrt[n]{\lambda}]} \quad \textit{avec } l_n = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{n} & \textit{pour } n \textit{ pair} \\ 2\sin\dfrac{\pi}{2n} & \textit{pour } n \textit{ impair} \end{cases}$$

Après inversion de la transformée de Laplace, on trouve :

Théorème 2 (A.L., 2003) $(T_0(t)|X(t) = 0)$ *suit la loi uniforme sur* $[0, t]$ *:*

$$\boxed{\mathbb{P}_0\{T_0(t) \in ds | X(t) = 0\}/ds = \frac{1}{t}\,\mathbb{1}_{(0,t)}(s)}$$

4 Loi du maximum $M(t)$

On pose

$$W(\lambda; x, a) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathbb{P}_x\{M(t) < a\}\,dt$$

Proposition *Les lois de $M(t)$ et $T_a(t)$ sont reliées selon*

$$\boxed{W(\lambda; x, a) = \lim_{\mu \to +\infty} U(\lambda, \mu; x - a)}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mu \to +\infty} \mathbb{E}_x\left[e^{-\mu \int_0^t \mathbb{1}_{\{X(s)>a\}}\,ds}\right] \\
&\qquad = \quad \lim_{\mu \to +\infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{M(t)<a\}} + \mathbb{1}_{\{M(t)\geqslant a\}} e^{-\mu \int_0^t \mathbb{1}_{\{X(s)>a\}}\,ds}\right] \\
&\qquad = \quad \mathbb{P}_x\{M(t) < a\}
\end{aligned}$$

Proposition *Pour* $x < a$ *:*

$$\boxed{W(\lambda;x,a) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \sum_{j\in J} \frac{e^{\theta_j \sqrt[n]{\lambda}\,(x-a)}}{\prod\limits_{k\in J\setminus\{j\}} \left(1 - e^{i\frac{2(j-k)\pi}{n}}\right)}\right]}$$

Remarque : le potentiel de p a pour expression

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, p(t;x,a)\,dt = \frac{1}{n\lambda} \sum_{j\in J} \theta_j \sqrt[n]{\lambda}\, e^{\theta_j \sqrt[n]{\lambda}\,(x-a)}$$

Après inversion de la transformée de Laplace, on trouve :

Théorème 3 (A.L., 2003)

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{M(t) \geqslant a\} = 2\,\mathbb{P}_x\{X(t) \geqslant a\} + \sum_{j=0}^{\#J-1} \alpha_j \int_0^t \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(s;x-a)\,\frac{ds}{(t-s)^{1-\frac{j+1}{n}}}}$$

Corollaire *Le pseudo-processus* $(X(t))_{t\geqslant 0}$ *satisfait au principe de réflexion, i.e.* $\mathbb{P}_x\{M(t) \geqslant a\} = 2\,\mathbb{P}_x\{X(t) \geqslant a\}$*, uniquement dans le cas brownien.*

Exemples (rappel : $x < a$)

- $\boxed{n=2}$ *(mouvement brownien)*

$$W(\lambda; x, a) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{\sqrt{\lambda}(x-a)}\right]$$

- $\boxed{n=3}$ *(Orsingher, 1991)*

Cas $\kappa_3 = +1$:

$$W(\lambda; x, a) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{\sqrt[3]{\lambda}(x-a)}\right]$$

Cas $\kappa_3 = -1$:

$$W(\lambda; x, a) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{\sqrt[3]{\lambda}(x-a)/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}(x-a) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}(x-a)\right)\right]$$

- $\boxed{n=4}$ *(Hochberg 1978, Orsingher et al. 1994)*

$$W(\lambda; x, a) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{\sqrt[4]{\lambda}(x-a)/\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\lambda}(x-a) - \sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\lambda}(x-a)\right)\right]$$

5 Loi du couple $(X(t), M(t))$

Lemme (Identité de Spitzer)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\Big(e^{i\mu X(t)-\nu M(t)}\Big)\,dt = \frac{1}{\lambda}\,e^{(i\mu-\nu)x}\ \exp\left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\Big(\mathbb{E}_0\Big(e^{i\mu X(t)-\nu X(t)^+}\Big)-1\Big)\,\frac{dt}{t}\right]$$

Proposition

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x(e^{i\mu X(t)-\nu M(t)})\,dt = \frac{e^{(i\mu-\nu)x}}{\prod_{j\in J}(\sqrt[n]{\lambda}-(i\mu-\nu)\theta_j)\prod_{k\in K}(\sqrt[n]{\lambda}-i\mu\theta_k)}$$

Après inversion de la transformé de Laplace, on trouve :

Théorème 4 (A.L., 2007) *Pour* $z \geqslant x \vee y$ *:*

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}_x\{X(t) \leqslant y \leqslant z \leqslant M(t)\}\\ &\quad = \sum_{\substack{k\in K\\ 0\leqslant m\leqslant \# J-1}} \alpha_{km} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial^m p}{\partial x^m}(\sigma; x-z)\, \frac{I_{k0}(s-\sigma; z-y)}{(t-s)^{1-(m+1)/n}}\, ds\, d\sigma\end{aligned}}$$

avec

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} I_{k0}(t;\xi)\, dt = e^{\theta_k \sqrt[n]{\lambda}\, \xi}$$

Exemples

- $\boxed{n=3}$ *(Orsingher et al., 2000)*

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X(t) \leqslant y \leqslant z \leqslant M(t)\} = \int_0^t \int_0^s p(\sigma; x-z)\, q(s-\sigma; z-y)\, \frac{ds\, d\sigma}{(t-s)^{2/3}}}$$

avec, dans le cas $\kappa_3 = +1$:

$$\begin{aligned} p(t;\xi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(\xi\lambda - t\lambda^3)\, d\lambda \quad \text{(fonction d'Airy)} \\ q(t;\xi) &= \frac{\xi}{\pi\Gamma(1/3)t}\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^3+\frac{1}{2}\xi\lambda} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\lambda + \frac{\pi}{3}\right) d\lambda \end{aligned}$$

et dans le cas $\kappa_3 = -1$:

$$\begin{aligned} p(t;\xi) &= \frac{\xi}{\pi\Gamma(1/3)t}\left[\sqrt{3}\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^3+\xi\lambda}\, d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^3-\frac{1}{2}\xi\lambda} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\lambda + \frac{\pi}{3}\right) d\lambda\right] \\ q(t;\xi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(\xi\lambda + t\lambda^3)\, d\lambda \end{aligned}$$

- $\boxed{n=4}$ *(Orsingher et al., 2000)*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}_x\{X(t)\leqslant y\leqslant z\leqslant M(t)\} &= \int_0^t\int_0^s p(\sigma;x-z)\,q_1(s-\sigma;z-y)\,\frac{ds\,d\sigma}{(t-s)^{3/4}}\\ &\quad+\int_0^t\int_0^s \frac{\partial p}{\partial x}(\sigma;x-z)\,q_2(s-\sigma;z-y)\,\frac{ds\,d\sigma}{\sqrt{t-s}}\end{aligned}}$$

avec

$$\begin{aligned}p(t;\xi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^4}\cos(\xi\lambda)\,d\lambda\\ q_1(t;\xi) &= \frac{\xi}{\pi\sqrt{2}\,\Gamma(1/4)\,t}\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^4}\cos(\xi\lambda)\,d\lambda\\ q_2(t;\xi) &= \frac{\xi}{2\pi^2\,t}\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^4}\left(\cos(\xi\lambda)+\sin(\xi\lambda)-e^{-\xi\lambda}\right)\,d\lambda\end{aligned}$$

6 Loi du couple $(\tau_a, X(\tau_a))$ (n pair)

On suppose $x < a$.

Lemme *Les lois de* $(\tau_a, X(\tau_a))$ *et de* $(X(t), M(t))$ *sont reliées selon*

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a + i\mu X(\tau_a)}\Big) = (\lambda - \kappa_n (i\mu)^n) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}_x\Big(e^{i\mu X(t)}\, \mathbb{1}_{\{M(t)>a\}}\Big)\, dt}$$

En effet : $e^{-\lambda\tau_a + i\mu X(\tau_a)} \approx \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda \frac{k}{2^m} + i\mu X(\frac{k}{2^m})}\, \mathbb{1}_{\{M(\frac{k-1}{2^m}) \leqslant a < M(\frac{k}{2^m})\}}$

Proposition

$$\boxed{\mathbb{E}_x\Big(e^{-\lambda\tau_a + i\mu X(\tau_a)}\Big) = \sum_{j\in J} \frac{\displaystyle\prod_{k\in J\setminus\{j\}} \left(1 - \frac{i\mu}{\sqrt[n]{\lambda}}\, \bar{\theta}_k\right)}{\displaystyle\prod_{k\in J\setminus\{j\}} \left(1 - e^{i\frac{2(j-k)\pi}{n}}\right)}\, e^{\theta_j \sqrt[n]{\lambda}\,(x-a)}\, e^{i\mu a}}$$

Après inversion de la transformée de Laplace, on trouve :

Théorème 5 (A.L., 2007)

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{\tau_a \in dt, X(\tau_a) \in dz\}/dt\,dz = \sum_{k=0}^{\#J-1} \mathcal{J}_k(t; x-a)\, \delta_a^{(k)}(z)}$$

avec $\mathcal{J}_k(t;\xi) = \sum_{j\in J} c_{jk}\, I_{jk}(t;\xi)$ *et* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} I_{jk}(t;\xi)\,dt = \lambda^{-k/n} e^{\theta_j \sqrt[n]{\lambda}\,\xi}$

Corollaire (« Monopoles et multipoles »)

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X(\tau_a) \in dz\}/dz = \sum_{k=0}^{\#J-1} (-1)^k \frac{(x-a)^k}{k!}\, \delta_a^{(k)}(z)}$$

Exemple

- $\boxed{n = 4}$ *(Nishioka, 1997)*

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{\tau_a \in dt, X(\tau_a) \in dz\}/dt\,dz = \mathcal{J}_0(t; x-a)\,\delta_a(z) + \mathcal{J}_1(t; x-a)\,\delta_a'(z)}$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0(t;\xi) &= \frac{\xi}{2\pi t}\int_0^{+\infty}\left[e^{\xi\lambda} - \cos(\xi\lambda) + \sin(\xi\lambda)\right] e^{-t\lambda^4}\,d\lambda \\
\mathcal{J}_1(t;\xi) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\cos(\xi\lambda) + \sin(\xi\lambda) - e^{\xi\lambda}\right]\lambda^2\,e^{-t\lambda^4}\,d\lambda
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{X(\tau_a) \in dz\}/dz = \delta_a(z) - (x-a)\delta_a'(z)}$$

7 Pseudo-processus avec dérive (n pair)

On pose

$$\boxed{X^b(t) = X(t) + b\,t} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau_a^b = \inf\{t \geqslant 0 : X^b(t) > a\}} \quad \text{avec} \quad \inf\emptyset = +\infty$$

On introduit les racines $(n-1)^{\text{e}}$ de κ_n : $(\varphi_l)_{1\leqslant l\leqslant n-1}$ et

$$\tilde{J} = \{j \in \{1, \ldots, n-1\} : \Re e(\varphi_j) > 0\}$$

Théorème 6 (A.L., 2008) *Pour $x < a$ et $b < 0$:*

$$\boxed{\mathbb{P}_x\{\tau_a^b < \infty\} = \sum_{j\in\tilde{J}} \frac{e^{\varphi_j |b|^{\frac{1}{n-1}}(x-a)}}{\prod\limits_{k\in\tilde{J}\setminus\{j\}} \left(1 - e^{i\frac{2(j-k)\pi}{n-1}}\right)}}$$

Exemples (rappel : $x < a$ et $b < 0$)

- $\boxed{n = 2}$ *(mouvement brownien)*

$$\mathbb{P}_x\{\tau_a^b < \infty\} = e^{-b(x-a)}$$

- $\boxed{n = 4}$ *(Nakajima & Sato, 1999)*

$$\mathbb{P}_x\{\tau_a^b < \infty\} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{|b|}\,(x-a)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sqrt[3]{|b|}\,(x-a) + \frac{\pi}{6}\right)$$

- $\boxed{n = 6}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\{\tau_a^b < \infty\} \;=\; & \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{5}}\Big[e^{\sqrt[5]{|b|}\,(x-a)} \\ & + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\, e^{(\cos\frac{2\pi}{5})\sqrt[5]{|b|}\,(x-a)} \cos\left(\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)\sqrt[5]{|b|}\,(x-a) + \frac{2\pi}{5}\right)\Big]\end{aligned}$$