

Fiabilité

1 Énoncé du problème

On considère un équipement industriel qui subit des dommages (par exemples dus à l'usure) au cours du temps : ce système passe par les états d'usure progressifs e_0, e_1, \dots, e_N (e_0 : état neuf, e_N : état de panne). On note X_t l'état dans lequel se trouve le système à l'instant t et l'on étudie le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ à des instants d'observation $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$

Modélisation probabiliste

Introduisons la chaîne de Markov¹ homogène $(X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$. C'est une suite de v.a. définie par la condition d'évolution sans mémoire suivante :

$$\mathbb{P}(X_{t_k} = e_{i_k} \mid X_{t_1} = e_{i_1}, \dots, X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}) = \mathbb{P}(X_{t_k} = e_{i_k} \mid X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}).$$

Les états d'usure intermédiaires $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{k-2}}$ n'ont pas d'influence directe sur l'état présent e_{i_k} . Seule la connaissance du dernier état d'usure $e_{i_{k-1}}$ permet de prédire celui du présent.

Les probabilités de transition (probabilités de passer d'un état e_i à un état e_j entre deux instants d'observation consécutifs) sont définies par

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{t_k} = e_j \mid X_{t_{k-1}} = e_i) = \mathbb{P}_{e_i}(X_{t_1} = e_j), \quad 0 \leq i, j \leq N$$

et sont supposés ici indépendantes de k (la chaîne est homogène). La notation \mathbb{P}_{e_i} signifie que le système est dans l'état e_i et que l'on remet l'horloge à 0. Ces probabilités permettent de définir une matrice $P = (p_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$. Observant que chaque ligne de P représente une loi de probabilité, c'est-à-dire

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad \sum_{j=0}^N p_{ij} = 1,$$

la matrice P est dite *stochastique*.

Notons aussi $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{t_n} = e_j \mid X_{t_0} = e_i)$. On a la relation matricielle suivante (P^n désignant la puissance n^e de la matrice P) :

$$P^n = (p_{ij}^{(n)})_{0 \leq i, j \leq N}.$$

Vérifions cette formule par exemple dans le cas $n = 2$. On a, d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= \mathbb{P}(X_{t_2} = e_j \mid X_{t_0} = e_i) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X_{t_1} = e_k \mid X_{t_0} = e_i) \mathbb{P}(X_{t_2} = e_j \mid X_{t_0} = e_i, X_{t_1} = e_k) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X_{t_1} = e_k \mid X_{t_0} = e_i) \mathbb{P}(X_{t_2} = e_j \mid X_{t_1} = e_k) \\ &= \sum_{k=0}^N p_{ik} p_{kj}. \end{aligned}$$

1. Markov, Andreï Andreïevitch : mathématicien russe (Riazan 1856 – Pétrograd 1922).

Ce dernier terme est bien le terme générique de la matrice P^2 . De la même manière, on pourrait montrer la relation de récurrence

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^N p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} = \sum_{k=0}^N p_{ik} p_{kj}^{(n-1)},$$

laquelle conduit à la formule encadrée.

Dans notre exemple, le système ne rajeunit pas ; ceci se traduit donc par $p_{ij} = 0$ si $i > j$, P est alors une matrice triangulaire :

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0N-1} & p_{0N} \\ 0 & p_{11} & \dots & p_{1N-1} & p_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{N-1N-1} & p_{N-1N} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

On a naturellement $p_{NN} = 1$: si le système est dans l'état e_N (état de panne), il y reste. On appelle *fiabilité* du système à l'instant t_n la probabilité

$$\boxed{1 - p_{0N}^{(n)} = \mathbb{P}_{e_0}(X_{t_n} \neq e_N) = \mathbb{P}_{e_0}(T_N > t_n)}$$

où $T_N = \min\{t \in \mathbb{R}^+ : X_t = e_N\}$ est l'instant de panne du système. C'est la probabilité que le système soit encore en état de fonctionnement à l'instant t_n .

2 Calcul de la fiabilité

La matrice P étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux : $p_{11}, \dots, p_{N-1N-1}$ et $p_{NN} = 1$. On suppose les p_{ii} tous distincts pour simplifier le problème. La matrice P est donc diagonalisable. Du fait des relations

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad \sum_{j=i}^N p_{ij} = 1,$$

on voit que le vecteur $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre (à droite) associé à la valeur propre 1 :

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme P est triangulaire, on peut trouver une matrice de passage triangulaire Q telle que $P = QDQ^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} p_{00} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{N-1N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & * & \dots & * & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0N-1} & \alpha_{0N} \\ 0 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1N-1} & \alpha_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{N-1N-1} & \alpha_{N-1N} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{NN} \end{pmatrix}.$$

Remarquons $\alpha_{00} = \alpha_{NN} = 1$ et que $QQ^{-1} = Q^{-1}Q = I$ entraîne

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \sum_{i=0}^j \alpha_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad \sum_{j=i}^N \alpha_{ij} = 0.$$

La fiabilité se trouve sur la première ligne de P^n (que l'on récupère par multiplication à gauche de P^n par la matrice-ligne $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$), et c'est le dernier terme de cette ligne (que l'on

récupère par multiplication à droite de P^n par la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) :

$$\begin{aligned} (1 \ 0 \ \dots \ 0)P^n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= [(1 \ 0 \ \dots \ 0)Q]D^n[Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \\ &= (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} p_{00}^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{11}^n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{N-1,N-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{0N} \\ \vdots \\ \alpha_{N-1,N} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{iN} p_{ii}^n. \end{aligned}$$

Ainsi, la fiabilité du système s'écrit

$$\mathbb{P}_{e_0}(T_N > t_n) = 1 - p_{0N}^{(n)} = \sum_{i=0}^{N-1} (-\alpha_{iN}) p_{ii}^n$$

avec de plus $\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{iN} = -1$ (en cohérence avec $\mathbb{P}_{e_0}(T_N > t_0) = 1$).

Exemple numérique : soit $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice correspond à un sys-

tème à quatre états e_0, e_1, e_2, e_3 (e_0 étant l'état neuf et e_3 l'état de panne). On a la décomposition $P = QDQ^{-1}$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La fiabilité est donnée par

$$1 - (1 \ 0 \ 0 \ 0)P^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\mathbb{P}_{e_0}(T_N > t_n) = 3 \times 0,7^n - 2 \times 0,6^n.$$

Remarque : examinons la limite de P^n lorsque n tend vers l'infini. On a

$$P^n = QD^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui s'interprète selon

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{t_n} = e_j \mid X_{t_0} = e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{1, 2, 3\}, \\ 1 & \text{si } j = 4. \end{cases}$$

Quel que soit l'état initial (e_i), le système va tomber en panne tôt ou tard : l'état e_4 est *absorbant*.

3 Une étude concrète

On étudie la fiabilité d'un équipement constitué de tubes fluorescents. Pour cela, on effectue un prélèvement de 1000 tubes. Les observations sont modélisées par des v.a. N_{t_k} représentant le nombre de tubes fonctionnant à la date t_k . La quantité $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ est alors le nombre de tubes qui sont tombés en panne durant le laps de temps $]t_{k-1}, t_k]$. On consigne les observations n_{t_k} des v.a. N_{t_k} dans le tableau suivant :

époque t_k	nombre de tubes ayant duré	$n_{t_k} - n_{t_{k-1}}$	nombre de tubes restants n_{t_k}
0			1000
1	moins d'1 mois	20	980
2	de 1 à 2 mois	50	930
3	de 2 à 3 mois	60	870
4	de 3 à 4 mois	100	770
5	de 4 à 5 mois	110	660
6	de 5 à 6 mois	220	440
7	de 6 à 7 mois	210	230
8	de 7 à 8 mois	120	110
9	de 8 à 9 mois	70	40
10	de 9 à 10 mois	40	0

Les données étant groupées, on centre les intervalles et on réajuste les n_{t_k} correspondants par une interpolation linéaire. On définit la probabilité d'avarie sur $]t_{k-1}, t_k]$ selon

$$P(t_k) = \frac{n_{t_{k-1}} - n_{t_k}}{n_{t_{k-1}}} = 1 - \frac{n_{t_k}}{n_{t_{k-1}}}.$$

t_k	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	
n_{t_k}	990	955	900	820	715	550	335	170	75	20	
$P(t_k)$		0,035	0,057	0,089	0,128	0,231	0,391	0,493	0,559	0,773	1

On remplace au fur et à mesure les tubes avariés. Soit X_{t_k} l'âge d'un tube générique à la date t_k ; X_{t_k} est une v.a. à valeurs dans l'ensemble $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$ où e_1 est l'état « moins d'1 mois », et e_i l'état « entre $i - 1$ et i mois », pour $2 \leq i \leq 10$. Soit $p_{ij} = \mathbb{P}(X_{t_k} = e_j \mid X_{t_{k-1}} = e_i)$. On a

$$\begin{cases} p_{i1} &= \mathbb{P}(\text{le tube est tombé en panne durant le temps }]t_{k-1}, t_k] \mid X_{t_k} = e_i), \\ p_{i,i+1} &= 1 - p_{i1}, \\ p_{ij} &= 0 \text{ si } j \notin \{1, i+1\}. \end{cases}$$

En effet : si $j \neq 1$, le tube n'a pas été remplacé entre t_{k-1} et t_k donc $X_{t_{k-1}} = e_i \implies X_{t_k} = e_{i+1}$, c'est-à-dire $j = i + 1$. Voici la table des p_{i1} :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_{i1}	0,035	0,057	0,089	0,128	0,231	0,391	0,493	0,559	0,773	1

La matrice P s'écrit alors

$$P = \begin{pmatrix} 0,035 & 0,965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,057 & 0 & 0,943 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,089 & 0 & 0 & 0,911 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,128 & 0 & 0 & 0 & 0,872 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,769 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,391 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,609 & 0 & 0 & 0 \\ 0,493 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,507 & 0 & 0 \\ 0,559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,441 & 0 \\ 0,773 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,227 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice de Leslie² couramment utilisée en dynamique des populations. Notons que la somme des termes sur chaque ligne vaut 1 ; P est donc une matrice *stochastique* que l'on peut interpréter comme une matrice de *renouvellement*.

Soit $N_i(t_k)$ le nombre (aléatoire) de tubes d'âge e_i à la date t_k .

- Si $i = 1$, $N_i(t_k)$ est le nombre de tubes qui ont été remplacés à la date t_k suite à une panne survenue sur $]t_{k-1}, t_k]$;
- si $i \geq 2$, $N_i(t_k)$ est le nombre de tubes qui ne sont pas tombés en panne sur $]t_{k-1}, t_k]$.

On note $n_i(t_k)$ une valeur observée de $N_i(t_k)$ sur un échantillon. La quantité

$$\pi_i(t_k) = \frac{n_i(t_k)}{\sum_{i=1}^{10} n_i(t_k)} = \frac{n_i(t_k)}{1000}$$

représente alors la probabilité qu'un tube générique soit d'âge e_i à la date t_k :

$$\pi_i(t_k) = \mathbb{P}(X_{t_k} = e_i).$$

Posons enfin $\boldsymbol{\pi}(t_k) = (\pi_1(t_k), \dots, \pi_{10}(t_k))$. On a $\boldsymbol{\pi}(t_k) = \boldsymbol{\pi}(t_{k-1})P$ et $\boldsymbol{\pi}(t_0) = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$. D'où

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}(t_k) = \boldsymbol{\pi}(t_0)P^k.}$$

Ainsi, $\boldsymbol{\pi}(t_k)$ et la première ligne de la matrice P^k . Maple fournit les valeurs numériques aux instants d'observation t_k , $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}(t_1) &\approx (0,035; 0,965; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_2) &\approx (0,0562; 0,0338; 0,910; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_3) &\approx (0,0849; 0,0542; 0,0319; 0,829; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_4) &\approx (0,115; 0,0820; 0,0511; 0,0290; 0,723; 0; 0; 0; 0; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_5) &\approx (0,184; 0,111; 0,0773; 0,0466; 0,0253; 0,556; 0; 0; 0; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_6) &\approx (0,248; 0,177; 0,105; 0,0704; 0,0406; 0,0195; 0,0338; 0; 0; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_7) &\approx (0,221; 0,240; 0,168; 0,0953; 0,0614; 0,0312; 0,0119; 0,171; 0; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_8) &\approx (0,176; 0,214; 0,226; 0,153; 0,0831; 0,0472; 0,0190; 0,00600; 0,0759; 0) \\ \boldsymbol{\pi}(t_9) &\approx (0,267; 0,170; 0,202; 0,206; 0,133; 0,0639; 0,0287; 0,00963; 0,00265; 0,0172) \\ \boldsymbol{\pi}(t_{10}) &\approx (0,154; 0,162; 0,160; 0,184; 0,179; 0,103; 0,0389; 0,0146; 0,00426; 0,000600) \end{aligned}$$

Comme les tubes avariés sont systématiquement remplacés, on peut considérer l'observation de l'équipement perpétuelle : on observe l'état des tubes en une infinité de temps de la forme $t_k = k - 0,5$, $k \in \mathbb{N}$. Cela revient à considérer la chaîne de Markov $(X_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$, c'est un processus de *renouvellement*. Déterminons alors la limite $\boldsymbol{\pi}$ de $\boldsymbol{\pi}(t_k)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$:

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\pi}(t_k) = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \lim_{k \rightarrow +\infty} P^k$$

On a donc besoin de la première ligne de la limite de P^k .

2. Leslie, Paul H. : écologiste britannique (1900–1972)

Pour cela, on diagonalise la matrice P . Maple fournit les valeurs propres de P :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &\approx -0,489 \\
\lambda_3 &\approx 0,484 + 0,625 i \\
\lambda_4 &= \bar{\lambda}_3 \approx 0,484 - 0,625 i \\
\lambda_5 &\approx 0,101 + 0,602 i \\
\lambda_6 &= \bar{\lambda}_5 \approx 0,101 - 0,602 i \\
\lambda_7 &\approx -0,298 + 0,600 i \\
\lambda_8 &= \bar{\lambda}_7 \approx -0,298 - 0,600 i \\
\lambda_9 &\approx -0,525 + 0,245 i \\
\lambda_{10} &= \bar{\lambda}_9 \approx -0,525 - 0,245 i
\end{aligned}$$

ainsi que les vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 \approx \begin{pmatrix} -1,20 \\ 0,651 \\ -0,265 \\ 0,260 \\ 0,0303 \\ 0,341 \\ 0,496 \\ 0,687 \\ 0,757 \\ 2,45 \end{pmatrix} \quad V_3 \approx \begin{pmatrix} 0,531 + 0,694 i \\ -0,202 + 0,667 i \\ -0,578 + 0,166 i \\ -0,473 - 0,376 i \\ -0,0711 - 0,650 i \\ 0,324 - 0,675 i \\ 0,610 - 0,650 i \\ 0,868 - 0,542 i \\ 1,05 - 0,244 i \\ 1,10 + 0,00658 i \end{pmatrix} \quad V_4 = \bar{V}_3 \approx \begin{pmatrix} 0,531 - 0,694 i \\ -0,202 - 0,667 i \\ -0,578 - 0,166 i \\ -0,473 + 0,376 i \\ -0,0711 + 0,650 i \\ 0,324 + 0,675 i \\ 0,610 + 0,650 i \\ 0,868 + 0,542 i \\ 1,05 + 0,244 i \\ 1,10 - 0,00658 i \end{pmatrix}$$

$$V_5 \approx \begin{pmatrix} -0,522 + 0,378 i \\ -0,272 - 0,300 i \\ 0,194 - 0,228 i \\ 0,223 + 0,0657 i \\ 0,0573 + 0,106 i \\ 0,0814 - 0,0549 i \\ 0,403 - 0,172 i \\ 0,792 + 0,0764 i \\ 0,739 + 0,618 i \\ 0,470 + 0,947 i \end{pmatrix} \quad V_6 = \bar{V}_5 \approx \begin{pmatrix} -0,522 - 0,378 i \\ -0,272 + 0,300 i \\ 0,194 + 0,228 i \\ 0,223 - 0,0657 i \\ 0,0573 - 0,106 i \\ 0,0814 + 0,0549 i \\ 0,403 + 0,172 i \\ 0,792 - 0,0764 i \\ 0,739 - 0,618 i \\ 0,470 - 0,947 i \end{pmatrix}$$

$$V_7 \approx \begin{pmatrix} -0,556 + 0,948 i \\ -0,398 - 0,673 i \\ 0,588 - 0,0978 i \\ -0,0737 + 0,327 i \\ -0,118 - 0,302 i \\ 0,448 - 0,260 i \\ 0,394 - 0,0395 i \\ 0,356 - 0,432 i \\ 1,05 - 0,425 i \\ 1,64 + 0,114 i \end{pmatrix} \quad V_8 = \bar{V}_7 \approx \begin{pmatrix} -0,556 - 0,948 i \\ -0,398 + 0,673 i \\ 0,588 + 0,0978 i \\ -0,0737 - 0,327 i \\ -0,118 + 0,302 i \\ 0,448 + 0,260 i \\ 0,394 + 0,0395 i \\ 0,356 + 0,432 i \\ 1,05 + 0,425 i \\ 1,64 - 0,114 i \end{pmatrix}$$

$$V_9 \approx \begin{pmatrix} -0,886 + 0,909 i \\ 0,283 - 0,753 i \\ 0,0918 + 0,438 i \\ -0,0843 - 0,317 i \\ 0,270 + 0,0334 i \\ 0,0712 - 0,210 i \\ 0,592 - 0,374 i \\ 0,429 - 0,210 i \\ 0,728 - 0,663 i \\ 2,05 - 0,773 i \end{pmatrix} \quad V_{10} = \bar{V}_9 \approx \begin{pmatrix} -0,886 - 0,909 i \\ 0,283 + 0,753 i \\ 0,0918 - 0,438 i \\ -0,0843 + 0,317 i \\ 0,270 - 0,0334 i \\ 0,0712 + 0,210 i \\ 0,592 + 0,374 i \\ 0,429 + 0,210 i \\ 0,728 + 0,663 i \\ 2,05 + 0,773 i \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de P sont distinctes, donc P est diagonalisable, on peut la décomposer selon $P = QDQ^{-1}$ où Q est la matrice dont les colonnes sont les matrices-colonnes $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}$:

$$Q = (V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_5 \ V_6 \ V_7 \ V_8 \ V_9 \ V_{10})$$

et D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on remarque que toutes les valeurs propres autre que λ_1 (qui vaut 1) sont de module strictement inférieur à un. En conséquence, leurs puissances k^e tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini :

$$\forall j \in \{2, 3, \dots, 10\}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_j^k = 0$$

soit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = D^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec $P^k = QD^kQ^{-1}$, on obtient

$$\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi(t_k) = (1 \ 0 \ \dots \ 0)QD^\infty Q^{-1}.$$

Notons que $(1 \ 0 \ \dots \ 0)Q$ est la première ligne de Q , puis que $(1 \ 0 \ \dots \ 0)QD^\infty$ est la matrice-ligne dont tous les termes sont nuls excepté le premier qui est le premier terme de Q , soit 1. Ainsi $(1 \ 0 \ \dots \ 0)QD^\infty = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$ puis

$$\pi = (1 \ 0 \ \dots \ 0)Q^{-1}.$$

Numériquement, Maple fournit

$$\pi \approx (0, 179; 0, 173; 0, 163; 0, 148; 0, 129; 0, 0995; 0, 0606; 0, 0307; 0, 00136; 0, 00308).$$

De plus, avec $P = QDQ^{-1}$ et $(1 \ 0 \ \dots \ 0)D = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$, on voit que

$$\pi P = (1 \ 0 \ \dots \ 0)Q^{-1}P = (1 \ 0 \ \dots \ 0)DQ^{-1} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)Q^{-1} = \pi.$$

On vient de vérifier le théorème *ergodique* qui stipule que

$$\boxed{\pi(t_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \pi \text{ où } \pi \text{ est l'unique vecteur-probabilité solution de } \pi = \pi P.}$$

Le vecteur π est la *loi stationnaire* de la chaîne de Markov $(X_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$. C'est un vecteur propre à gauche de la matrice P associé à la valeur propre 1. Il représente la probabilité de chaque état du système en temps grand.

Remarque : on peut déterminer explicitement $\boldsymbol{\pi}$ en résolvant directement l'équation matricielle $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P$. En posant $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10})$, cette équation s'écrit

$$\begin{cases} -0,965 \pi_1 + 0,057 \pi_2 + 0,089 \pi_3 + 0,128 \pi_4 + 0,231 \pi_5 \\ \quad + 0,391 \pi_6 + 0,493 \pi_7 + 0,559 \pi_8 + 0,773 \pi_9 + \pi_{10} \approx 0 \\ \pi_2 \approx 0,965 \pi_1 & \pi_3 \approx 0,943 \pi_2 & \pi_4 \approx 0,911 \pi_3 & \pi_5 \approx 0,872 \pi_4 & \pi_6 \approx 0,769 \pi_5 \\ \pi_7 \approx 0,609 \pi_6 & \pi_8 \approx 0,507 \pi_7 & \pi_9 \approx 0,441 \pi_8 & \pi_{10} \approx 0,227 \pi_9 \end{cases}$$

soit, en reportant π_2 dans π_3 , puis π_3 dans π_4 , etc., approximativement,

$$\boldsymbol{\pi} \approx \pi_1(1; 0,965; 0,910; 0,830; 0,723; 0,556; 0,339; 0,172; 0,0757; 0,0172).$$

Enfin, la condition d'avoir un vecteur-probabilité, *i.e.* $\sum_{i=1}^{10} \pi_i = 1$, fournit la valeur $\pi_1 \approx 1/4,588$ et l'on retrouve

$$\boldsymbol{\pi} \approx (0,179; 0,173; 0,163; 0,148; 0,129; 0,0995; 0,0606; 0,0307; 0,00136; 0,00308).$$

Signalons pour terminer que l'utilisation de Maple doit se faire à une grande précision (une vingtaine de décimales) en amont pour conduire à des résultats cohérents et éviter de grossières erreurs d'arrondi.

Andrei Andreyevich Markov

Born: 14 June 1856 in Ryazan, Russia

Died: 20 July 1922 in Petrograd (now St Petersburg), Russia



Andrei Andreyevich Markov's mother was Nadezhda Petrovna, who was the daughter of a state worker, and his father was Andrei Grigorievich Markov, the son of a country deacon. Andrei Grigorievich Markov studied at a church seminary, then got a job as a clerk. The family moved to St Petersburg where Andrei Grigorievich served in the Forestry Department and then became a manager of various households and estates. Andrei Grigorievich married twice; with his first wife Nadezhda he had two sons and several daughters. Andrei Andreyevich was the oldest of the two boys while the younger was Vladimir. Although Vladimir died from tuberculosis at the age of 25, he had already gained an international reputation as a mathematician.

In his early years Markov was in poor health and up to the age of ten he could only walk with the assistance of crutches. His secondary schooling was at St Petersburg **Gymnasium** No 5 where he showed outstanding talents for mathematics but performed rather poorly in other subjects. He wrote his first mathematics paper while at the Gymnasium but his results on integration of linear differential equations which were presented in the paper were not new. However, writing the paper did result in him meeting Korkin and Zolotarev, two of the leading professors at the university. It was clear that mathematics was the right subject for Markov to study at university and, in 1874, he entered the Physics and Mathematics Faculty of St Petersburg University. There he enrolled in the seminar run by Korkin and Zolotarev but also attended lectures by Chebyshev, the head of the mathematics department. These were particularly stimulating to Markov, since Chebyshev often encouraged an atmosphere of research by posing new questions and problems for his students to investigate.

Markov graduated in 1878 having won the gold medal for submitting the best essay for the prize topic set by the faculty in that year—*On the integration of differential equations by means of **continued fractions***. He now wished to train to become a university professor and worked for his Master's degree over the next two years (this was at a level equivalent to a doctorate). He was awarded the degree in 1880 for his thesis *On the binary quadratic forms with positive determinant*. This thesis was outstanding:—

*This work, very highly esteemed by Chebyshev, represents one of the finest achievements of the St Petersburg school of **number theory**, and perhaps even of all Russian mathematics. It is enough to recall the sorts of questions in the field of rational approximation which at that time preoccupied the most prominent number theorists of France and Germany, to appreciate how much deeper into the field Markov had penetrated. It is therefore perhaps not surprising that, although the dissertation was published immediately (in French in *Mathematische Annalen*), it did not become generally absorbed by west European mathematicians, until from 1910 to the 1920s the Berlin mathematicians Frobenius and Remak attempted to master the set of ideas contained in Markov's work.*

After submitting his master's thesis, Markov began to teach at St Petersburg University as a **privatdozent** while working for his doctorate (equivalent to the **habilitation**). He was awarded his doctorate in 1884 for his dissertation *On certain applications of continued fractions*.

Markov had known Maria Ivanova Valvatyeva since they were children for she was the daughter of the owner of the estate which his father was managing. Markov had tutored Maria Ivanova in mathematics and later he proposed marriage to her. However Maria Ivanova's mother would not allow her daughter to marry the son of her estate manager until Markov had gained sufficient social status. In 1883 Maria Ivanova's mother agreed to the marriage which took place in that year.

Markov became an extraordinary professor at St Petersburg University in 1886 and an ordinary professor in 1893. Chebyshev proposed Markov as an adjunct of the Russian Academy of Sciences in 1886. He was elected as an extraordinary member in 1890 and an ordinary academician in 1896. He formally retired in 1905 but continued to teach for most of his life.

Markov's early work was mainly in number theory and analysis, algebraic continued fractions, limits of integrals, approximation theory and the convergence of series. After 1900 Markov applied the method of continued fractions, pioneered by his teacher Pafnuty Chebyshev, to **probability theory** :—

Markov was the most elegant spokesman for Chebyshev's ideas and directions of research in probability theory. Especially remarkable is his research relating to the theorem of Jacob Bernoulli known as the Law of Large Numbers, to two fundamental theorems of probability theory due to Chebyshev, and to the method of least squares.

He also studied sequences of mutually dependent variables, hoping to establish the limiting laws of probability in their most general form. He proved the central limit theorem under fairly general assumptions. Markov is particularly remembered for his study of Markov chains, sequences of random variables in which the future variable is determined by the present variable but is independent of the way in which the present state arose from its predecessors. This work founded a completely new branch of probability theory and launched the theory of stochastic processes. In 1923 Norbert Wiener became the first to treat rigorously a continuous Markov process. The foundation of a general theory was provided during the 1930s by Andrei Kolmogorov.

Sergei Bernstein, who continued to develop the theory of Markov chains, wrote :—

A Markov's classic course on the computation of probabilities, and his original memoirs, models of accuracy and clarity of exposition, contributed to a very large extent to the transformation of the theory of probability into one of the most perfected areas of mathematics, and to the wide dissemination of Chebyshev's methods and directions of research. His profound analysis in the spirit of Chebyshev of the dependencies among observed random phenomena allowed Markov to extend probability theory in an essential way through the introduction and investigation of dependent random quantities.

Markov was also interested in poetry and he made studies of poetic style—perhaps surprisingly Kolmogorov had similar interests. It is worth pointing out, however, that although Markov developed his theory of Markov chains as a purely mathematical work without considering physical applications, he did apply the ideas to chains of two states, namely vowels and consonants, in literary texts. His interest in poetry was not, therefore, an entirely separate interest from his mathematical work.

As a lecturer, Markov demanded much of his students :—


His lectures were distinguished by an irreproachable strictness of argument, and he developed in his students that mathematical cast of mind that takes nothing for granted. He included in his courses many recent results of investigations, while often omitting traditional questions. The lectures were difficult, and only serious students could understand them... During his lectures he did not bother about the order of equations on the blackboard, nor about his personal appearance.

Markov lived through a period of great political activity in Russia and, having firm opinions, he became heavily involved. Maksim Gorky, the Russian short-story writer, novelist and left wing activist, was elected a member of the Russian Academy of Sciences in 1902, but his election was soon withdrawn for political reasons on the Tsar's orders. Markov protested strongly and refused

to accept honours awarded him on the following year. In June 1907 Tsar Nicholas dissolved the Second Duma which had been elected with majority on the left. Markov repudiated his membership and might have expected to suffer severe consequences but the authorities chose not to make an example of an elderly and distinguished academician. In 1913 the Romanov dynasty, which had been in power in Russia since 1613, celebrated their 300 years of power. This was not likely to improve their already weak position. Markov showed his disapproval of the celebration but holding celebrations of his own—he celebrated 200 years of the Law of Large Numbers! The Russian Revolution began early in 1917 as food supplies ran low. In September of that year Markov requested the Academy to send him to a disadvantaged town in the Russian interior. He was sent to Zaraisk, a small country town, where he taught mathematics in the secondary school without receiving any remuneration. He returned to St Petersburg but his health was now deteriorating and he had an eye operation. Although by 1921 he was in such a bad way that he was hardly able to stand, yet he continued to lecture on probability at the university. His death in July 1922 came after months of the most severe suffering.

Markov had a son (of the same name) who was born on 9 September 1903 and followed his father in also becoming a renowned mathematician.

Article by J.J. O'Connor and E.F. Robertson

School of Mathematics and Statistics 
University of St Andrews, Scotland

The URL of this page is

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Markov.html>
