TD0 – Calculs

Objectifs :

1. Revoir les définitions et les calculs basiques utilisant les racines carrées, les valeurs absolues et la trigonométrie, qui seront réinvesties dans la suite du cours d'analyse en mathématiques.
2. Apprendre à être plus rigoureux dans les raisonnements en rédigeant complètement les résolutions d'équations.

1 Valeur absolue

Définition 1 (Valeur absolue) La **valeur absolue** d'un réel x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

La valeur absolue d'un nombre peut s'interpréter comme une distance.

Propriété 1 (Valeur absolue et distance)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $|x|$ est la distance de x à 0 sur l'axe réel.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le nombre $|a - b|$ est la distance entre a et b.

Propriété 2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$, on a

$$|x| = M \quad \text{si et seulement si} \quad x = M \text{ ou } x = -M;$$

$$|x| \leqslant M \quad \text{si et seulement si} \quad -M \leqslant x \leqslant M.$$

Exercice 1 Résoudre l'équation $|2x - 3| = 8$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Résoudre l'inéquation $|2x - 3| \leqslant 8$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x + 1| - |x| + |x - 2|$.
Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue (on distinguera plusieurs cas), et tracer l'allure de son graphe. Résoudre ensuite l'équation $f(x) = 3/2$.

Propriété 3 (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démonstration. — La propriété 2 donne les encadrements $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. On en déduit :

$$-\big(|x| + |y|\big) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|.$$

Donc la propriété 2 de nouveau donne $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

2 Racine carrée

Définition 2 (Racine carrée) La **racine carrée** d'un nombre réel positif $x \in \mathbb{R}_+$ est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut x.

Remarque. — On a $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On n'a donc pas toujours $\sqrt{x^2} = x$: cette égalité est fausse pour les réels strictement négatifs.

Exercice 4 Résoudre l'inéquation $\sqrt{2x - 3} \leqslant \sqrt{-x + 6}$ dans $\mathbb{R}$.

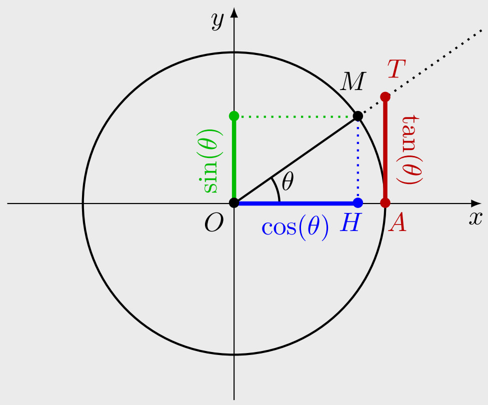
Exercice 5 Résoudre l'inéquation $\sqrt{2x + 7} < -x - 1$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Résoudre l'inéquation $\sqrt{x + 7} \geqslant -x - 1$ dans $\mathbb{R}$.

3 Trigonométrie

3.1 Cercle trigonométrique

Définition 3 (Cercle trigonométrique) On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre).



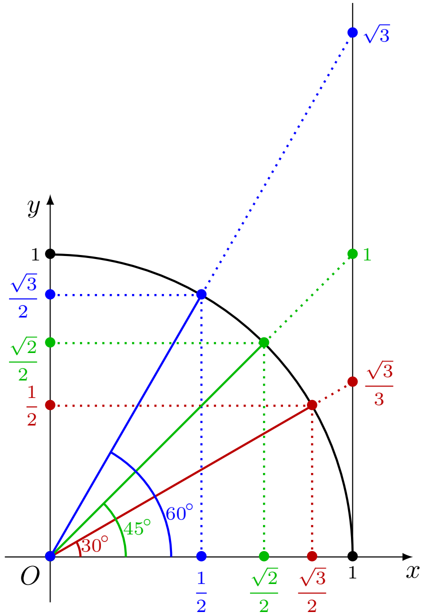
En notant M le point du cercle tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ radians, on voit que $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point M et $\sin(\theta)$ son ordonnée. On définit $\tan(\theta)$ comme étant la longueur AT.

En utilisant la géométrie dans les triangles rectangles HOM et AOT, on trouve :

Propriété 4 Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\quad \tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Contrairement au cosinus et au sinus, on voit que la tangente n'est pas définie pour tous les réels. En effet, la fonction tangente est définie sur tout réel θ tel que $\cos(\theta) = 0$. Les solutions de cette équation sont précisément les θ de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

À l'aide de triangles rectangles bien choisis, on obtient le tableau ci-dessous des valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus et donc la fonction tangente.



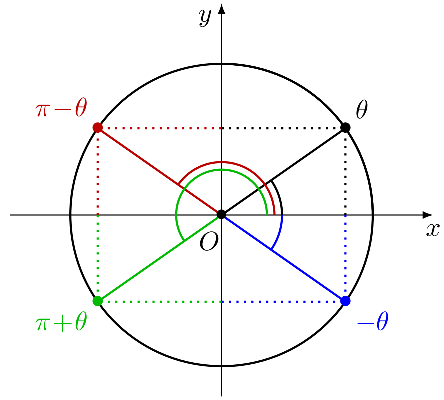
Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini	0

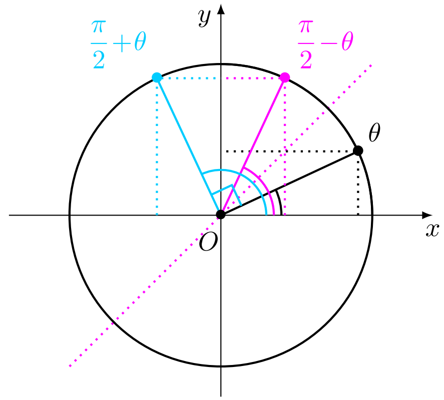
Les relations ci-dessous ne sont pas à apprendre, mais à savoir retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

Comme θ et $\theta + 2\pi$ ont la même image sur le cercle trigonométrique, on obtient les premières formules de trigonométrie. On dit que les fonctions cos, sin et tan sont *périodiques* et 2π est une période pour chacune de ces fonctions. En fait, la fonction tangente est même π-périodique.

Propriété 5 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

relation fondamentale	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$		
périodicité	$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$	$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$	$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
parité	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
angles supplémentaires	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
demi-tour	$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
angles complémentaires	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
quart de tour	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$





Exercice 7 Calculer les valeurs suivantes à l'aide du cercle trigonométrique :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \quad \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \quad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) \quad \sin\left(\frac{11\pi}{2}\right) \quad \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \quad \sin\left(\frac{71\pi}{6}\right) \quad \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Propriété 6 (Quelques formules)
Formules d'addition : pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \qquad \sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$
$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi \qquad \sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$$

Formules de duplication : pour $\theta = \varphi$:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta) \qquad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

Exercice 8 En utilisant l'égalité $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

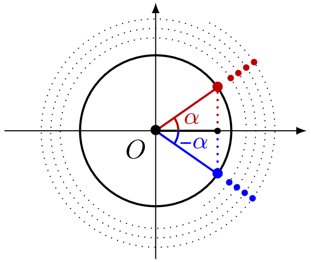
Exercice 9 A l'aide des formules de duplication, calculer $\cos\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$ et en déduire $\sin\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

3.2 Equations et inéquations trigonométriques

À l'aide du cercle trigonométrique, on résout, les équations d'inconnue x, où α est fixé :

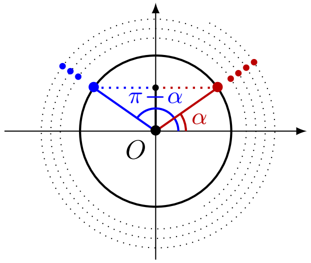
$$\cos(x) = \cos(\alpha) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Ensemble des solutions : $\{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$



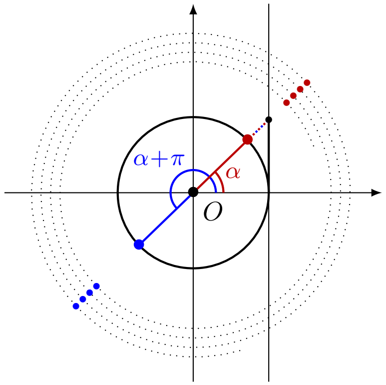
$$\sin(x) = \sin(\alpha) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Ensemble des solutions : $\{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$



$$\tan(x) = \tan(\alpha) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + k\pi$$

Ensemble des solutions : $\{\alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$



Exercice 10 Résoudre les équations ou inéquations suivantes dans l'intervalle proposé :

1. a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$. b) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$, sur $I = [0, 2\pi]$.
2. a) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$. b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$, sur $I = [0, 2\pi]$, sur $J = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.
3. a) $\cos x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$. b) $\cos x < \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$, sur $I = [-\pi, \pi]$.
4. $\sin x > -\dfrac{1}{2}$ sur $I = [0, 3\pi]$.
5. a) $\tan x = \sqrt{3}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I = [-\pi, \pi]$. b) $\tan x \geqslant 1$ sur $I = [0, 2\pi]$.
6. $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I = [-\pi, \pi]$.

Exercice 11

> Si $a \in [-1, 1]$, la touche `cos`$^{-1}$ ou `arccos` de la calculatrice permet d'obtenir un réel α *contenu dans l'intervalle* $[0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$.
>
> Si $b \in [-1, 1]$, la touche `sin`$^{-1}$ ou `arcsin` de la calculatrice permet d'obtenir un réel β *contenu dans l'intervalle* $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\beta) = b$.

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près des réels θ, φ et ψ tels que :

1. $\cos\theta = -0,85$ et $\theta \in [\pi, 2\pi]$.
2. $\cos\varphi = 0,4$; $\sin\varphi < 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$.
3. $\sin\psi = 0,7$ et $\psi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos 2x + \cos x = 0$.
2. $\cos 2x + \cos x = -1$.
3. $\cos 2x + 2\sin^2 x - 2\sin x \leqslant 0$.
4. $\cos 4x - 2\sqrt{3}\cos 2x + \dfrac{5}{2} = 0$.
5. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x \geqslant 0$.
6. $\cos 3x + \sin 3x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

En complément...

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_trigonometrie.pdf