TD A – Symbole $\sum$, factorielle et binôme de Newton

1 Le symbole Sigma Σ

Notation (Le symbole $\sum$) Si m et n sont deux entiers tels que $m \leqslant n$ et si a_k est une expression qui dépend de k pour $m \leqslant k \leqslant n$, on note

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Par exemple,

$$\sum_{k=m}^{n} k = m + (m+1) + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$$

$$= \frac{\text{nb de termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m + r^{m+1} + \cdots + r^{n-1} + r^n = \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^m\left(1 - r^{n-m+1}\right)}{1-r} \quad \text{pour } r \neq 1$$

$$= 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

N.B. Les dernières formules restent valables pour toute somme arithmétique ou géométrique.

En particulier, on rappelle que (à savoir par cœur)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad \text{pour } r \neq 1.}$$

Exercice 1

1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$:

   $$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 150^3\,; \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{66}\,; \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{29}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

   $$\sum_{p=1}^{n} p.n = \sum_{k=1}^{n} k.n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) n = k\left(\sum_{k=1}^{n} n\right); \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \times b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{30} (-1)^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5$ c) $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} (2k-4)$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^k}$

   e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{5k-31}}{7^{2k+1}}$ f) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n}$ g) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$ h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} jk$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Compléter les sommes suivantes :

   $$\sum_{j=0}^{n} f(2+j) = \sum_{?}^{?} f(k) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(n-i) = \sum_{?}^{?} f(j) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{?} ? = \sum_{?}^{?} \frac{1}{p}$$

Exercice 2

1. (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une expression simplifiée (sans symbole $\sum$) de la somme $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

2. De même simplifier l'expression de $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

   (Voir la définition 1 pour la signification du symbole « ! ».)

Exercice 3

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k \times k!) = (n+1)! - 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

---

2 Factorielle et binôme de Newton

Définition 1 (Factorielle) On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n} \qquad (\text{« factorielle } n \text{ »})$$

et l'on pose $0\,! = 1$. On peut définir $n\,!$ par récurrence selon $(n+1)! = n\,! \times (n+1)$.

Définition 2 (Coefficients binomiaux) Soit A un ensemble fini à n éléments et soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. On appelle combinaison de k éléments de A un sous-ensemble de A de cardinal k. On note $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») le nombre de combinaisons de k éléments parmi n. On peut démontrer que :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k\,!}}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés « coefficients binomiaux », car on peut établir la formule du binôme de Newton suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\ &= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\end{aligned}}$$

Remarque : cette formule peut être démontrée par récurrence sur n.
On peut aussi la montrer par dénombrement : pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ fixé, quand on développe $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ termes}}$, les termes $x^k y^{n-k}$ s'obtiennent en choisissant k fois le terme x dans les parenthèses (et donc $n-k$ fois le terme y).
Il y a exactement $\binom{n}{k}$ choix possibles, et donc le coefficient de $x^k y^{n-k}$ est égal à $\binom{n}{k}$.

Par exemple, pour les valeurs $2, 3, 4$ de n :

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes :

a) **symétrie des coefficients :**
pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$;

b) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$;

c) **formule du triangle de Pascal :**
pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Pour calculer $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k et n, on peut utiliser le triangle de Pascal :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Notation (Le symbole $\prod$) Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$ et $u_p, u_{p+1}, \dots, u_{q-1}, u_q$ des nombres. On note

$$\boxed{\prod_{i=p}^{q} u_i = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_{q-1} \times u_q}$$

Par exemple, $n\,! = \prod_{i=1}^{n} i$, $e^{\sum_{i=1}^{n} u_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{u_i}$ et si $u_1, \dots, u_n > 0$, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln u_i$.

Exercice 1 (Factorielle)

1. Calculer $\frac{101\,!}{99\,!}$ sans calculatrice.
2. Simplifier $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$, $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n\,!}{(n-1)!}$, $\frac{(n-1)!}{n\,!} - \frac{n\,!}{(n+1)!}$.
3. Montrer que $\frac{(2n)!}{n\,!}$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le calculer pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\,n\,!$ et $\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n\,!}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de $W_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
6. (a) Montrer que pour $n \geqslant 10$, $n\,! \geqslant 9\,! \times 10^{n-9}$.
   (b) En déduire la limite de $\frac{n!}{9^n}$ lorsque $n \to +\infty$.
   (c) Établir en utilisant la même méthode une minoration similaire de $n\,!$ pour $n \geqslant 100$.
7. Montrer, à l'aide de $k\,! \geqslant 2^{k-1}$ valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 2$.

Exercice 2 (Formule du binôme de Newton)

1. Soit a, b, x des réels. Développer $(a+b)^6$, $(2x-1)^5$ et $(x+a+b)^3$.
2. Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^4 + 2x^3 - 1$. Calculer $P(x+1)$.
3. Déterminer les coefficients de $a^4b^2c^3$ et $a^4b^3c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.
4. $(*)$ En considérant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \quad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

5. $(*)$ Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $1.01^{10} \approx 1.105$. Trouver de même une valeur approchée de 0.99^8 à 10^{-3} près.

***Exercice 3 (Étude d'un binôme)**

On s'intéresse dans cet exercice au développement de $(2+3)^{59}$. Pour tout $k \in [\![0, 59]\!]$ on note $\alpha_k = \binom{59}{k} 3^k 2^{59-k}$. On a $(2+3)^{59} = \sum_{k=0}^{59} \alpha_k$. L'exercice se propose de déterminer quel est le plus grand des termes α_k.

1. Dans cette question on fixe $k \in [\![0, 29]\!]$ un entier compris entre 0 et 29.
   (a) Montrer qu'alors on a $30 \leqslant 59 - k \leqslant 59$. Que représente le nombre $59 - k$ pour le nombre k ?
   (b) Démontrer que $\frac{\alpha_k}{\alpha_{59-k}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{59-2k}$.
   (c) Expliquer alors pourquoi pour chaque coefficient α_k, $k \in [\![0, 29]\!]$, il y a toujours un autre coefficient α_k, $k \in [\![30, 59]\!]$, qui lui est supérieur.
2. On peut donc affirmer qu'en trouvant le plus grand des α_k pour les seules valeurs de k comprises entre 30 et 59 on détermine en fait le plus grand de tous les termes α_k. Soit $k \in [\![30, 58]\!]$ un entier compris entre 30 et 58.
   (a) Démontrer que $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{3}{2} \times \frac{59-k}{k+1}$.
   (b) Calculer $\frac{\alpha_{36}}{\alpha_{35}}$, puis comparer les nombres $\alpha_{30}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{35}$.
   (c) À partir de l'ensemble des questions précédentes, déterminer quel est le plus grand des termes de la somme $\sum_{k=0}^{59} \binom{59}{k} 3^k 2^{59-k}$.

En complément...

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/ diaporama_sigma.pdf

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/ diaporama_binome.pdf