INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

TD B – Systèmes linéaires

Cours

On travaille dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont deux entiers naturels non nuls.

1 Les systèmes linéaires d'équations

Définition 1 On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout système d'équations (S) de la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2)\\ \qquad\vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & (L_n)\end{cases}$$

— $x_1,\dots,x_p$ sont les **inconnues** du système ;

— les $a_{ij}\in\mathbb{K}$ sont donnés : ce sont les **coefficients** du système ;

— les $b_i\in\mathbb{K}$ sont donnés. On dit que $(b_1,\dots,b_n)$ est le **second membre** du système ;

— Si le second membre est nul, le système est dit **homogène**.

— le tableau $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np}\end{pmatrix}$ formé des coefficients du système est appelé **matrice associée au système.** Le système d'indexation adopté (i,j où i est le numéro de l'équation/ligne de la matrice, et j le numéro de l'inconnue/colonne de la matrice), est celui du calcul matriciel (par exemple en Matlab, ou Python).

Exemple 1

— Le système $(S_1) : \begin{cases} 3x-2y+z=3\\ x+\ \ y-z=4\end{cases}$ est linéaire, à 2 équations et 3 inconnues, de matrice associée $\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. On sait le résoudre facilement par substitution, mais pour des systèmes plus grands il existe un algorithme qui permet de ne pas tourner en rond : la **méthode du pivot de Gauss** (voir partie 2) qui sera à privilégier pour les cas généraux.

— Le système (S_2) $\begin{cases} xy+z \qquad = 2\\ x+e^y+3z=3\end{cases}$ n'est pas linéaire (à cause de xy ou de e^y). Il n'a pas de matrice associée. On n'est pas sûr de savoir le résoudre.

Définition 2 On appelle **solution** du système (S) tout $p-$uplet $(x_1,\dots,x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations du système.

Exemple 2 On peut vérifier que $(2,1,-1)$ et $(0,-7,-11)$ sont des triplets solutions de (S_1).

Définition 3 On dit qu'un système est **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon, on dit qu'il est **incompatible**.

Exemple 3 Le système $(S_3) : \begin{cases} x-3y=\ \ 7\\ 2x-6y=10\end{cases}$ est incompatible (on voit que les lignes sont incompatibles en multipliant la ligne L_1 par 2).

Définition 4 Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils ont le **même ensemble de solutions**. On note alors $(S)\iff(S')$. Résoudre (S) et (S') revient alors au même.

Exemple 4 Les systèmes $\begin{cases}3x-2y+z=3\\ x+\ \ y-z=4\end{cases}$ et $\begin{cases}3x-2y+\ \ z=\ \ 3\\ 3x+3y-3z=12\end{cases}$ sont équivalents (on a juste multiplié la deuxième ligne par 3).

2 Systèmes triangulaires et échelonnés

Définition 5 Un système linéaire est dit **triangulaire** lorsqu'il y a autant d'inconnues que d'équations ($n=p$) et que les coefficients sous la diagonale sont nuls : $a_{ij}=0$ pour tout $i>j$.

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1)\\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2)\\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n & (L_n)\end{cases}$$

Exemple 5 $\begin{cases}3x-\ \ y+2z=\ \ 0\\ \qquad 2y+\ \ z=-2\\ \qquad\qquad 5z=\ \ 10\end{cases}$ est triangulaire, $\begin{cases}3x-\ \ y+2z=\ \ 0\\ \qquad 2y+\ \ z=-2\\ x\qquad\ -5z=\ \ 10\end{cases}$ ne l'est pas.

Exemple 6 Le système $\begin{cases}3x+2z=0\\ 5z\qquad=6\\ 2y+\ \ z=-2\end{cases}$ est bien triangulaire ; en échangeant des lignes il devient $\begin{cases}3x\qquad+2z=0\\ \quad 2y+\ \ z\ =-2\\ \qquad\quad 5z=6\end{cases}$. Le résoudre est immédiat : en remontant du bas vers le haut, la ligne 3 donne z, la ligne 2 donne y et enfin la ligne 1 donne x :

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}z = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{1}{2}(z+2) = -\frac{8}{5} \\ z = \frac{6}{5} \end{cases}.$$

Remarque. Si tous les a_{ii} sont non nuls alors le système est dit **système de Cramer** et possède **une unique solution**. Sinon, le système peut être **incompatible** ou au contraire posséder une **infinité** de solutions.

Définition 6 On dit qu'un système linéaire (S) de n équations et p inconnues est **échelonné** si :

— chaque ligne où il y a des coefficients a_{ij} non nuls commence par davantage de zéros que la précédente,

— si la i^{e} ligne de coefficients a_{ij} est nulle, alors les lignes suivantes le sont aussi.

Le premier coefficient non nul a_{ij} d'une ligne i donnée s'appelle un **pivot** du système.

Dans le schéma suivant, les pivots a_{ij} non nuls sont nommés p_i, les inconnues x'_i sont les x_i qui ont éventuellement été permutés, et les d_i sont le second membre.

$$(S) \quad \begin{cases} p_1x'_1 + c_{12}x'_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{1p}x'_p = d_1 & (L_1) \\ \qquad p_2x'_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{2p}x'_p = d_2 & (L_2) \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad p_rx'_r + \cdots + c_{rp}x'_p = d_r & (L_r) \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} & \\ \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_n & \end{cases}$$

L'entier r qui correspond au nombre d'équations non triviales d'un système échelonné, est appelé **rang** du système.

Pour arriver à une forme échelonnée, donc immédiate à résoudre en remontant les équations, on peut effectuer les opérations élémentaires suivantes qui assurent que le système obtenu est équivalent au système initial (et donc, qu'ils ont le même rang et les même solutions) :

Définition 7 On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système les trois opérations suivantes :

— multiplier une ligne par un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ **non nul**. Notation : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

— ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne. Notation : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

— permuter deux lignes. Notation : $L_i \longleftrightarrow L_j$.

On a le résultat suivant.

Propriété Effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'un système $(\mathcal{S})$ le transforme en un système équivalent.

Remarque. Les opérations suivantes ne changent pas non plus l'ensemble des solutions :

— enlever une équation triviale du type $0 = 0$.

— si deux équations sont proportionnelles, enlever l'une des deux.

— ajouter à une ligne une combinaison de plusieurs autres lignes, par exemple : $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 - 5L_2$.

Danger n° 1 : les opérations sur les lignes sont successives et non simultanées !

Exemple 7 En effectuant simultanément ces opérations :

$$\begin{cases} x = 1 & \\ y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ z = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 1 \\ z - y = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases},$$

le dernier système a une infinité de solutions alors que le système initial avait un seul triplet solution (systèmes non équivalents).

Danger n° 2 : attention de ne pas faire disparaître des lignes arbitrairement !

Exemple 8 Soit m un paramètre réel et le système $(S_1)\begin{cases} x \qquad = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$. L'opération $L_1 \leftarrow mL_1 - L_2$ donne le système $(S_2)\begin{cases} \quad - y = m - 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$. Or pour $m = 0$, (S_1) a pour solution $(1, 1)$ alors que (S_2) a pour solutions $(x, 1), x \in \mathbb{R}$. La ligne L_1 a disparu car, lorsque $m = 0$, l'opération élémentaire revient à remplacer L_1 par L_2.

Fort de ces quelques remarques, voici un algorithme de résolution de systèmes linéaires dû au mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

3 Algorithme du pivot de Gauss

La méthode, que nous détaillerons sur des exemples, consiste à utiliser les **opérations élémentaires sur les lignes** pour transformer un système linéaire en un système **échelonné équivalent**, et donc, immédiat à résoudre.
On pourra se rendre compte, en étudiant les exemples, que si après échelonnement des n équations d'un système, il en reste r, alors en notant p le nombre d'inconnues :

- si $r = p$, il y a un **unique** $p-$uplet solution ;
- si $r < p$ alors il y a une **infinité** de solutions qui s'écriront en fonction de certaines inconnues (au nombre de $p - r$, à savoir écrire correctement !) ;
- si on obtient une ligne du type $1 = 0$, alors le système est **incompatible** et il **n'**y a **pas** de solution.

Ce sont les **trois seules** possibilités.

On combine les lignes entre elles pour faire disparaître les inconnues successivement. Si le système possède p inconnues, il y a au maximum p étapes. C'est l'algorithme le plus efficace dans le cas général, même si on peut parfois faire plus rapide avec de la substitution, dans des cas particuliers simples.

Le « **pivot** » est le nom de l'inconnue choisie dans une ligne pour éliminer les inconnues similaires des autres lignes.

On a le théorème suivant.

Théorème Quel que soit le choix des opérations élémentaires, le nombre d'équations du système échelonné obtenu à l'issue de la méthode est le même. C'est le **rang** du système.

Exemple 9

Transformons le système $(S) : \begin{cases} 2x - 3y + 8z = 3 & (L_1) \\ -x + 2y - 5z = 1 & (L_2) \\ 3x - 4y + 12z = 5 & (L_3) \end{cases}$ en système échelonné.

- Étape 1 : on choisit $-x$ comme pivot, pour cela on permute les lignes 1 et 2 afin que $-x$ soit en haut à gauche (on gardera toujours le même nom pour les lignes).
- Étape 2 : On ajoute aux lignes 2 et 3 un multiple de la ligne 1.
- Étape 3 : y étant un bon pivot, on le choisit pour éliminer le y de la ligne 3.

$$(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\overset{\text{étape 1}}{\iff}} \begin{cases} -x + 2y - 5z = 1 & (L_1) \\ 2x - 3y + 8z = 3 & (L_2) \\ 3x - 4y + 12z = 5 & (L_3) \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\overset{\text{étape 2}}{\iff}} \begin{cases} -x + 2y - 5z = 1 & (L_1) \\ y - 2z = 5 & (L_2) \\ 2y - 3z = 8 & (L_3) \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\overset{\text{étape 3}}{\iff}} \begin{cases} -x + 2y - 5z = 1 & (L_1) \\ y - 2z = 5 & (L_2) \\ z = -2 & (L_3) \end{cases}$$

Au bout de 2 étapes, le système est échelonné de **rang 3**, il reste à le résoudre de proche en proche.

$$(S) \iff \begin{cases} x = 2y - 5z - 1 \\ y = 2z + 5 \\ z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - 5z - 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

On trouve ainsi un unique triplet solution $(11, 1, -2)$.

Exemple 10 (Exemple de système avec un paramètre)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Transformons le système $(S) : \begin{cases} 2x - 3y + 8z = 3 & (L_1) \\ -x + 2y - 5z = 1 & (L_2) \\ 3x - 4y + 11z = \alpha & (L_3) \end{cases}$ en système échelonné.

- Étape 1 : on choisit $-x$ comme pivot, pour cela on permute les lignes 1 et 2 afin que $-x$ soit en haut à gauche (on gardera toujours le même nom pour les lignes).
- Étape 2 : On ajoute aux lignes 2 et 3 un multiple de la ligne 1.
- Étape 3 : y étant un bon pivot, on le choisit pour éliminer le y de la ligne 3.

$$(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\overset{\text{étape 1}}{\iff}} \begin{cases} -x + 2y - 5z = 1 & (L_1) \\ 2x - 3y + 8z = 3 & (L_2) \\ 3x - 4y + 11z = \alpha & (L_3) \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\overset{\text{étape 2}}{\iff}} \begin{cases} -x + 2y - 5z = 1 & (L_1) \\ y - 2z = 5 & (L_2) \\ 2y - 4z = \alpha + 3 & (L_3) \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\overset{\text{étape 3}}{\iff}} \begin{cases} -x + 2y - 5z = 1 & (L_1) \\ y - 2z = 5 & (L_2) \\ 0 = \alpha - 7 & (L_3) \end{cases}$$

Au bout de 2 étapes, le système est échelonné, il reste une équation de compatibilité $\alpha - 7 = 0$.

- Si $\alpha \neq 7$, le système (S) est **incompatible** donc n'admet pas de solution.
- Si $\alpha = 7$, le système (S) est **compatible**, de **rang 2** et

$$(S) \iff \begin{cases} x = 2y - 5z - 1 \\ y = 2z + 5 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z + 9 \\ y = 2z + 5 \end{cases}$$

On trouve ainsi une **infinité** de solutions ; x et y dépendent de z. L'ensemble des solutions s'écrit $\{(-z + 9, 2z + 5, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 11 (Systèmes non carrés)

1. Un système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \\ 2x+y=7 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+\ \ y= & 3 \\ \ \ -2y= & -1 \\ \ \ -\ \ y= & 1 \end{cases}$$

Les lignes 2 et 3 sont **incompatibles** : **aucune** solution.

2. Un autre système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \\ 2x+y=7 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+\ \ y= & 4 \\ \ \ -2y= & -2 \\ \ \ -\ \ y= & -1 \end{cases}$$

Les lignes 2 et 3 sont **redondantes** : on en retire une et on continue la résolution. Cela donne $\begin{cases} x+y=4 \\ \quad y=1 \end{cases}$, un système triangulaire de **rang 2** fournissant $x=3, y=1$; d'où une **unique** solution, le couple $(3,1)$.

3. Un système de 2 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x+\ \ y+z=1 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} x+y+\ \ z= & 1 \\ \quad y-2z= & -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3z+2 \\ y=\ \ 2z-1 \end{cases}$$

x et y dépendent de z, le système est de **rang 2**. Il y a une **infinité** de solutions qui s'écrivent $(-3z+2, 2z-1, z)$ avec $z\in\mathbb{R}$.

Remarque. Avec d'autres choix on pourrait trouver y et z qui dépendent de x, ou x et z qui dépendent de y, mais le rang resterait toujours 2.

TD

On utilisera obligatoirement la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 1 Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x+2y-\ \ 3z=a \\ 2x+6y-11z=b. \\ x-2y+\ \ 7z=c \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode de Gauss, transformer le système (S) en système échelonné.
2. Quelle relation les paramètres a,b,c doivent-ils satisfaire pour que (S) admette au moins une solution ?
3. Le système (S) peut-il admettre une solution unique ?
4. Résoudre (S) dans le cas où $a=1$ et où (S) admet au moins une solution.
5. On se place dans l'espace muni d'une base.

   Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les trois vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-3\\-11\\7\end{pmatrix}$.

   Soit $\vec{p}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\3\\k\end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k peut-il s'écrire sous la forme $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 (en autonomie) Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x-\ \ y+3z=6 \\ 3x-2y+7z=14 \\ x+3y-3z=-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-\ \ y+2z=7 \\ 8x+2y-2z=9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+\ \ y-\ \ z=10 \\ x+\ \ y+4z=-9 \\ 7x+5y+\ \ z=14 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ x+2y-3z=6 \\ 7x+4y-\ \ z=22 \end{cases}$

Exercice 3 Résoudre les systèmes linéaires :

1. $\begin{cases} x-\ \ 3y+\ \ z=1 \\ 2x+\ \ \ \ y-\ \ z=-1 \\ x+11y-5z=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-\ \ y-\ \ z=4 \\ -x+\ \ y-5z=-7 \\ 3x-2y+4z=11 \\ 3x+4y-2z=11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=3 \\ x+2y-\ \ z=2 \\ x\qquad\ \ +3z=4 \\ 2x+\ \ y+4z=7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+\ \ t=-1 \end{cases}$

Exercice 4 Résoudre les systèmes linéaires suivants en discutant sur la valeur de $a\in\mathbb{R}$:

$$(S):\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x-\ \ y+az=1 \\ 3x+2y+\ \ z=2 \end{cases} \qquad (T):\begin{cases} x+\ \ y+az=a^2 \\ x+ay+\ \ z=a \\ ax+\ \ y+\ \ z=1 \end{cases}$$

Exercice 5 Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ le système $(S) : \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x + 8y - 14z = b \\ 2x + 4z = c \end{cases}$ admet-il au moins une solution ?

Exercice 6 Discuter et résoudre les systèmes suivants où a et b sont des paramètres :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + 2az + t = a \\ x + by + z + t = 2b \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - 3y - 4z = 10 \\ x - 2y + z = 15 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

Exercice 7 Discuter selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, du nombre de solutions du système suivant, d'inconnues x, y, z : $\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 0 \\ 3x + 5y = 0 \\ x + \alpha y + 2z = 0 \end{cases}$

Exercice 8 (en autonomie) On se place dans l'espace muni d'une base. Soit k un réel.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les trois vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ k \end{pmatrix}$.

1. Pour quelle(s) valeurs(s) de k existe-t-il 3 réels a, b, c tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$?
   Dans ce cas, déterminer les triplets (a, b, c) qui conviennent.
2. Interpréter géométriquement ces résultats.

Exercice 9 Proposer des systèmes linéaires (S_1), (S_2) et (S_3) à 3 équations et 3 inconnues tels que :

1. (S_1) possède une infinité de solutions et $(1, 2, 3)$ est une des solutions ;
2. $(1, 2, 3)$ est l'unique solution de (S_2) ;
3. $(1, 2, 3)$ et $(1, 1, 1)$ sont des solutions de (S_3).

Exercice 10 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire à deux équations et deux inconnues $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ait une solution unique.

En complément...

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap11_Systemes_Lineaires_WEB.pdf

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_systemes_lineaires.pdf

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_carres_magiques_ordre3.pdf