TD C – Primitives

1 Rappels

Définition 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On appelle **primitive de f sur I** une fonction F dérivable sur I vérifiant $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Remarque. — Dans la définition précédente il n'est pas nécessaire que I soit un intervalle ; en revanche pour les propriétés suivantes I doit être un intervalle.

Propriété 1 Si f admet une primitive F sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Une primitive de f sur I peut se noter $\int f(x)\,\mathrm{d}x$: par exemple, $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$.

Le « d$\star$ » pointe la variable : $\int \cos(axt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ax}\sin(axt) + C$.

Propriété 2 Si f admet une primitive sur un intervalle I, alors pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Théorème 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors :

1. pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I ;
2. soit F une primitive de f sur I et $a, b \in I$; alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercice 1 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer les primitives de $x \mapsto x^\alpha$, en précisant le domaine de validité.

On distinguera les cas : $\alpha \in \mathbb{N}$; $\alpha = -1$; α entier inférieur ou égal à -2 ; et enfin les autres valeurs de α.

Compléter alors le tableau suivant (à connaître !).

$f(x)$	$F(x)$	Intervalles de validité
x^α avec $\alpha \neq -1$		
$\frac{1}{x}$		
e^x		
$\ln(x)$		
$\sin(x)$		
$\cos(x)$		
$\mathrm{ch}(x)$		
$\mathrm{sh}(x)$		
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\frac{1}{1+x^2}$		
$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$		

Remarque. — Certaines primitives du tableau font apparaître les fonctions arctan et arcsin, ce sont les fonctions réciproques de tan et sin. Pour une valeur réelle donnée, elles renvoient un angle. On a :

tan : $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective et a pour réciproque arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

De même, sin : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$ est bijective et a pour réciproque arcsin : $[-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Théorème 2 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit a et b dans I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. (Linéarité) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
3. $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

De nombreux calculs de primitives se font en reconnaissant la dérivée d'une expression. En particulier, on peut utiliser la formule de la dérivée d'une composée.

Propriété 3 Soit f une application dérivable sur un intervalle I et g une application dérivable sur $f(I)$.

Alors $g\circ f$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x))$.

Exemple 1 1. $\displaystyle\int 6x^2\,\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \int 2\times(3x^2)\,\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{e}^{x^3}+k$.

2. Sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\times 2(\ln x)^1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2+k$.

Exercice 2 Déterminer les primitives des fonctions suivantes (en précisant les ensembles de définition).

1. $x(x^3+2)$
2. $\cos(4x)$
3. $\dfrac{9}{x+5}$
4. $\tan(x)$
5. $\dfrac{4}{(x-1)^2}$
6. $\mathrm{sh}(2x-\frac{\pi}{3})$
7. e^{-3x+5}
8. $\dfrac{2}{1+(\frac{x}{7})^2}$
9. $\dfrac{4x-10}{x^2-5x+6}$
10. $\sqrt{2x+8}$
11. $\dfrac{1}{\sqrt{2-8x^2}}$
12. $(4-3x)^5$
13. $x\mathrm{e}^{3x^2-5}$
14. $\dfrac{1}{x\ln(x)}$
15. $\tan^2(x)$

Exercice 3 (Primitives des puissances de cos et sin)

1. Calculer une primitive de $x\mapsto\cos^3(x)$ en utilisant la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.
2. Pourquoi cette méthode ne fonctionne-t-elle plus avec la recherche d'une primitive de $x\mapsto\cos^4(x)$?
3. Linéariser les fonctions $x\mapsto\sin^2(x)$ et $x\mapsto\cos^4(x)$, puis en déduire leurs primitives.

Exercice 4 (Primitives de certaines fractions rationnelles)

On appelle **fraction rationnelle** toute fonction formée par le quotient de deux polynômes.

1. Pour primitiver une fraction rationnelle, on commence par simplifier la fraction afin que le degré du numérateur soit strictement inférieur à celui du dénominateur.
   (a) (Astuce à retenir) En ajoutant « $+2-2$ » au numérateur, déterminer $\displaystyle\int\frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x$. Par une méthode similaire, calculer $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x+5}\,\mathrm{d}x$.
   (b) À l'aide d'une division euclidienne, calculer $\displaystyle\int\frac{2x^2+x+5}{x+1}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
2. (a) Soit $f : x\longmapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$. Déterminer des réels a et b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$, on ait $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-3}$. En déduire une primitive de f.
   (b) Déterminer de même une primitive de $g : x\longmapsto\dfrac{1}{2x^2-8}$.

Exercice 5 (En autonomie) Calculer les intégrales suivantes (toutes les constantes qui apparaissent sont supposées strictement positives) :

1. $\displaystyle\int_0^2\left(\mathrm{e}^{2x}+x\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^2|x|\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1(x^2y+z^2x)\,\mathrm{d}y$
5. $\displaystyle\int_{V_0}^{V_1}\frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V$
6. $\displaystyle\int_0^\pi\big(A\cos(\omega t+\varphi)+B\big)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_{z_A}^{z_B}\frac{z}{(z^2+R^2)^\alpha}\,\mathrm{d}z$

2 Intégration par parties

Théorème 3 Pour u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$ on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

De même, pour les primitives, on a :

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

ou encore sous forme différentielle :

$$\int u(x)\,\mathrm{d}\big(v(x)\big) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}\big(u(x)\big).$$

Remarque. — Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable à dérivée continue (vu en OMNI).

Exemple 2 Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x 1\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (x\,\mathrm{e}^x-0\,\mathrm{e}^0)-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0) = (x-1)\,\mathrm{e}^x+1$$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^x(t+1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^2\sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^x t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^1\arctan(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 7 (En autonomie) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Changement de variable

Théorème 4 Soit I un intervalle, soit $\varphi : [a,b] \to I$ de classe C^1, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors :
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Formellement on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$ et l'on peut écrire $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 3 Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$.

Trouver une primitive n'étant pas évident, on effectue un changement de variable choisi pour simplifier l'intégrale. Cela se fait selon les étapes suivantes :

① choix du changement de variable (souvent donné) : $t = x^2$;

② remplacement du bloc différentiel : $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$;

③ remplacement des bornes : $\begin{cases} t = 1 \longleftrightarrow x = \sqrt{1} \\ t = 2 \longleftrightarrow x = \sqrt{2} \end{cases}$ donc les bornes de l'intégrale deviennent 1 et $\sqrt{2}$.

Puis le calcul :
$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x+x^2}\,2x\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\big[\ln(1+x)\big]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= 2\ln(1+\sqrt{2}) - 2\ln(2)$$

Exemple 4 Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\cos t}\,\mathrm{d}t$.

① changement de variable : $u = \cos t$

② remplacement du bloc différentiel : $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$

③ remplacement des bornes : $\begin{cases} t = 0 \longleftrightarrow u = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow u = 0 \end{cases}$; **attention, ici la fonction** $u = \cos$ **décroît, on conserve l'ordre d'écriture** $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_1^0$.

Puis le calcul :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2-\cos t}\big(-\sin(t)\,\mathrm{d}t\big) = \int_1^0 -\frac{1}{2-u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2-u}\,\mathrm{d}u = \big[-\ln|2-u|\big]_0^1 = -\ln(1) + \ln(2) = \ln(2)$$

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ (on posera $u = e^x$)
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (on posera $x = \sin(t)$)
3. $\displaystyle\int_1^7 \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$ (on posera $t = x+2$)
4. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ (pour $x > 0$)
5. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x+x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ (on posera $t = \ln x$)
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ (on posera $t = \cos(x)$)

Exercice 9 (En autonomie) Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^x$ (sans bornes).

Exercice bilan

1. (a) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, déterminer $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^n}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

   (c) Donner la forme canonique du trinôme x^2+2x+3.
   En déduire $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{3+\sin t}\,\mathrm{d}t$

   (d) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ (poser $x = \mathrm{e}^t$)

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = \tan u$)

En complément...

Intégrale de Riemann

Aimé Lachal

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap08_Integrale_Riemann_WEB.pdf

Calcul de primitives

Aimé Lachal

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap09_Primitives_WEB.pdf

Intégrale de Gauss

Aimé Lachal

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_gauss.pdf

Primitives et équations différentielles

Aimé Lachal

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_primitives_equations_differentielles.pdf

Fractions rationnelles avec Maple

Aimé Lachal

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_fractions_rationnelles/fractions_rationnelles.html

Série de Riemann

Aimé Lachal

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf

Entre Machin et Plouffe...

Aimé Lachal

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_machin_plouffe.pdf