TD E – Intégration

Cours

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment (vu en OMNI)

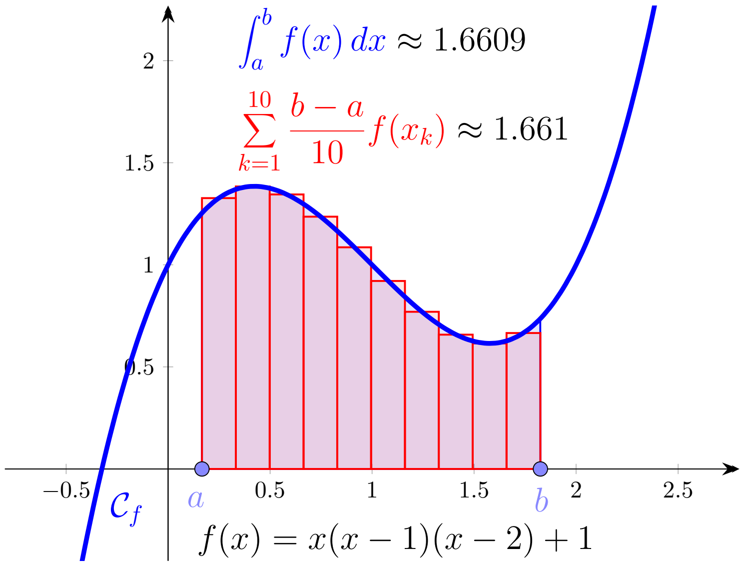
1.1 Définition

Soit a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$. On considère une fonction f **continue** sur $[a, b]$.

Définition 1 (Sommes de Riemann) On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, avec $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, et on considère la somme des aires algébriques des rectangles de largeur $a_{k+1} - a_k$ et de hauteur $f(x_k)$ où $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$. Cette somme est appelée somme de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$. Elle est donnée par

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(a_{k+1} - a_k).$$

L'aire algébrique signifie que l'on compte l'aire du rectangle négativement lorsque $f(x_k) < 0$.



Théorème 1 (Et définition (admis)) Pour toute subdivision $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et pour toute suite de points $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ vérifiant les hypothèses précédentes, la suite des sommes de Riemann de f est convergente.

Sa limite, qui ne dépend que de f et de $[a, b]$, est appelée **l'intégrale de f sur $[a, b]$** et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou simplement $\displaystyle\int_a^b f$. Autrement dit :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(a_{k+1} - a_k) \right].$$

Remarque. — La lettre x dans l'intégrale n'a aucune importance, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre. On dit que la variable d'intégration est une lettre **muette**.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\clubsuit)\,\mathrm{d}\clubsuit = \dots$$

Remarque. — Le réel $\displaystyle\int_a^b f$ représente donc l'aire algébrique entre la courbe de f (dans un repère orthonormé), l'axe (Ox) et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.
"Algébrique" signifie que l'on compte négativement les aires des parties situées au-dessous de (Ox) et positivement celles situées au-dessus.

Remarque. — Lorsque $a = b$, alors toutes les sommes de Riemann de f sur $[a, b]$ sont nulles, donc $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

1.2 Propriétés de l'intégrale déduites de la définition par sommes

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale.

La plupart se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques (elles sont vraies pour des sommes de Riemann d'aires de rectangles, donc par passage à la limite, pour les intégrales).

Propriété 1 Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$.

1. **Linéarité :** $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\quad \displaystyle\int_a^b (\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g.$
2. **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0.$
3. **Croissance :** Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$
4. **Relation de Chasles :** Si c est un point de $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$
5. **Inégalité avec les valeurs absolues :** $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$
6. **Fonction continue positive d'intégrale nulle :**
   Si f est continue sur $[a,b]$ et $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors :
$$\int_a^b f=0 \iff \forall t\in[a,b],\ f(t)=0.$$

Remarque. — Attention : $\displaystyle\int fg \neq \int f \times \int g$ (erreur très fréquente !).

Définition 2 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$. On définit :
$$\int_b^a f=-\int_a^b f.$$

Remarque. —

1. Si $a>b$, les propriétés de linéarité restent valables mais pas les propriétés de croissance et de positivité. On a tout intérêt à écrire $\displaystyle -\int_b^a f$ plutôt que $\displaystyle\int_a^b f$.
2. La relation de Chasles a lieu quel que soit l'ordre des éléments a, b et c de I.

Exercice 1 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n : x\mapsto x^n\ln(1+x^3)$ et $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

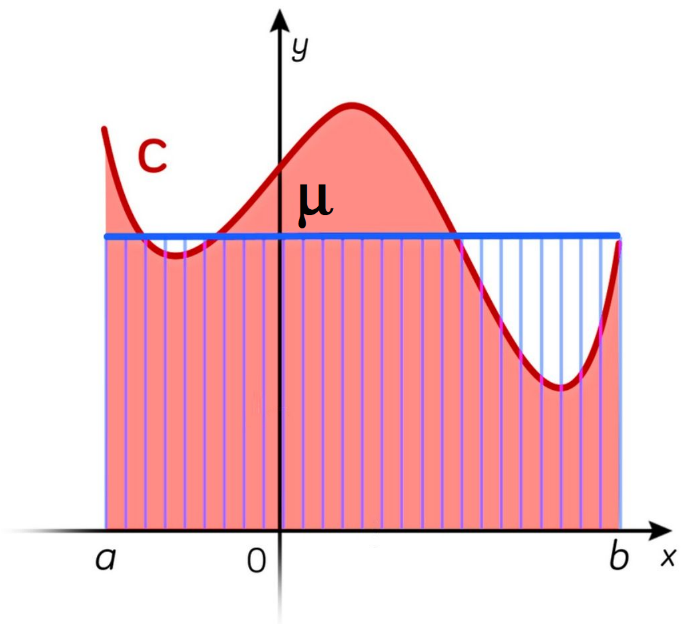
1. Déterminer le signe de I_n puis le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Que peut-on en déduire au sujet de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Déterminer la limite de (I_n) à l'aide d' un encadrement de f_n sur $[0,1]$.
3. Soit g une application continue sur $[0,1]$, bornée entre m et M, et soit $J_n=\displaystyle\int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Déterminer la limite de (J_n).

2 Formule de la moyenne pour les fonctions continues

Définition 3 Pour une fonction f continue sur $[a,b]$ avec $a<b$, le nombre $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$ est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$.
C'est la hauteur algébrique d'un rectangle de largeur $[a,b]$ qui a la même aire que celle donnée par $\displaystyle\int_a^b f$.

Exemple 1 La valeur moyenne de $t\mapsto t$ sur $[a,b]$ est
$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Propriété 2 (Formule de la moyenne) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$. Alors il existe $c\in[a,b]$ tel que
$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$
Autrement dit, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est atteinte par f.



Exercice 2 (Preuve du théorème) On note μ la valeur moyenne de f.

1. D'après le cours (théorème des bornes atteintes), comme f est continue sur $[a,b]$, elle admet sur $[a,b]$ un minimum m et un maximum M. Montrer que $m \leqslant \mu \leqslant M$.
2. Conclure à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 3 (Exemple d'utilisation)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $h(x) = \int_x^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Exemples : Dans le cas où $f(t) = \dfrac{3t^2}{t^2+1}$, calculer $h(x)$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
   De même, lorsque $f(t) = \dfrac{5t}{|t|+2}$, calculer $h(x)$ pour $x > 0$, puis $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
2. Cas général :
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in [x, 3x]$ tel que $h(x) = 2xf(c_x)$.
   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(c_x)$.
   (c) En déduire un équivalent simple de h en $+\infty$, puis $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

3 Intégrales et primitives

Voir le TDC – Primitives pour les rappels sur les primitives. Voici le théorème qui fait le lien entre primitive et intégrale :

Théorème 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout $a \in I$, la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exercice 4 (Preuve du théorème) On veut montrer que pour tout $x_0 \in I$, $F'(x_0)$ existe et vaut $f(x_0)$.

1. Soit $x \in I, x \neq x_0$. Montrer que le taux d'accroissement de F en x_0 vaut $\dfrac{1}{x-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. A l'aide de la formule de la moyenne, en déduire que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

On peut maintenant énoncer le théorème fondamental du calcul intégral qui sera la clé pour calculer des intégrales.

Théorème 3 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et a et b deux points de I. Alors f admet des primitives sur I et, pour toute primitive F de f, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \overset{\text{notation}}{=} \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

C'est une conséquence du théorème précédent.

TD

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. En majorant la fonction intégrée, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
4. À l'aide de la somme $(I_0+I_1) - (I_1+I_2) + (I_2+I_3) - \cdots + (-1)^{n-1}(I_{n-1}+I_n)$, déterminer la limite de S_n, où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 6 (Un équivalent de $\ln(n!)$)

1. (a) Montrer à l'aide d'encadrements de ln que pour tout $k \geqslant 2$,
   $$\int_{k-1}^k \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \ln k \leqslant \int_k^{k+1} \ln t\,\mathrm{d}t.$$
   (b) Faire un dessin pour illustrer graphiquement cette propriété.
   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_2^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = x\ln x - x + 1$.
3. En déduire que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.

Exercice 7 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'un encadrement de $(1-x)^n\,\mathrm{e}^x$, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. À l'aide d'une IPP, montrer que $I_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)!} + I_n$.
3. En déduire avec une somme télescopique que $\mathrm{e} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 8 Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^2 (t-1)^2 \big(P(t)\big)^4 \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\varphi(P) = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul.
2. Ce résultat reste-t-il vrai pour ψ définie par $\psi(P) = \displaystyle\int_0^2 (t-1)\big(P(t)\big)^4 \, \mathrm{d}t$?

En complément...

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap08_Integrale_Riemann_WEB.pdf

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_gauss.pdf

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_machin_plouffe.pdf