TD F – La formule de Taylor-Lagrange

Cours

1 Introduction

Nous avons vu au semestre 1 la formule de Taylor pour les polynômes :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k\,!}(X-a)^k.$$

Remarque. — D'un point de vue algébrique, ce résultat correspond à l'expression du polynôme P dans la base $\big(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\big)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

Par ailleurs, nous avons vu dans le chapitre sur les développements limités la formule de Taylor-Young, valable pour une fonction f n fois dérivable en a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + o\big((x-a)\big).$$

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la formule de Taylor-Lagrange (FTL). Celle-ci est une généralisation du théorème des accroissements finis (TAF).

Elle fait intervenir la même expression polynômiale que les deux autres formules de Taylor, mais ses hypothèses sont différentes, et surtout elle ne s'utilise pas de la même manière : comme le TAF, elle permet d'obtenir des résultats **globaux** valables sur tout un intervalle (approximation de f par un polynôme, inégalités ou encadrements), contrairement à la formule de Taylor-Young qui donne des résultats **locaux** (valables seulement au voisinage de a).

2 Forme générale

Théorème 1 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n) Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\boxed{\exists c \in\ ]a, b[,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(b-a)^k + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}}.$$

Cette formule est aussi valable si $b < a$, avec $c \in]b, a[$.

Remarques.

- En particulier, cette formule est vraie lorsque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ ou $[b, a]$.
- Attention, le réel c dépend à la fois de l'intervalle $[a, b]$ et de l'ordre n.
- Lorsque $n \geqslant 1$, a et b ne jouent pas le même rôle dans la formule.

Exercice 1 1. En prenant $n = 0$, vérifier que la FTL à l'ordre 0 donne le théorème des accroissements finis.

2. En prenant $f = P$ un polynôme de degré n et $b = x$ la variable, vérifier que l'application de la FTL à P à l'ordre n donne la formule de Taylor pour les polynômes.

Exemple 1 Soit a et b deux réels tels que $a < b$. La fonction sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Appliquons-lui la FTL sur $[a, b]$ à l'ordre $n = 2$:

$$\begin{aligned}\exists c \in\ ]a, b[,\ \mathrm{sh}(b) &= \mathrm{sh}(a) + \mathrm{sh}'(a)(b-a) + \frac{\mathrm{sh}''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{\mathrm{sh}^3(c)}{6}(b-a)^3 \\ &= \mathrm{sh}(a) + \mathrm{ch}(a)(b-a) + \frac{\mathrm{sh}(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{\mathrm{ch}(c)}{6}(b-a)^3.\end{aligned}$$

On peut par exemple en déduire que pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{sh}(x) > x + \frac{1}{6}x^3$.

En effet, en posant $a = 0$ et $b = x$, on obtient que pour tout $x > 0$, il existe $c \in]0, x[$ tel que $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{\mathrm{ch}(c)}{6}x^3$. Or $\mathrm{ch}(c) > 1$ et $x^3 > 0$, donc pout tout $x > 0$, on a $\mathrm{sh}(x) > x + \frac{1}{6}x^3$.

Exemple 2 Soit a et b deux réels tels que $a < b$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$. On peut donc lui appliquer la FTL à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$. La FTL donne alors :

$$\exists c \in\ ]a, b[,\ \mathrm{e}^b = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^a}{k\,!}(b-a)^k + \frac{e^c}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Exercice 2 1. Appliquer la formule ci-dessus lorsque $a = 0$ et $b = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \mathrm{e}$.

Exercice 3 1. Soit $x \neq 1$. Écrire la FTL à l'ordre 1 pour $f(t) = \sqrt{t}$, $a = 1$ et $b = x$.

2. Sans calculatrice, encadrer f'' sur $[1, 4]$. Quel encadrement de $\sqrt{1,04}$ peut-on en déduire ?

Exemple 3 Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La même application de la FTL que dans l'exemple 2 avec $a = 0$ et $b = x$ donne :

il existe $c_x \in]0, x[$ ou $]x, 0[$ tel que : $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k\,!}(x-0)^k + \frac{\mathrm{e}^{c_x}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$, soit :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}x^k + \frac{\mathrm{e}^{c_x}}{(n+1)!}x^{n+1} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \mathrm{e}^{c_x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi e^x peut être approché par le polynôme $P_n : x \mapsto 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!}$ avec une erreur de $\mathrm{e}^{c_x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Cherchons une valeur de $n \in \mathbb{N}$ à partir de laquelle l'erreur $|\,\mathrm{e}^x - P_n(x)|$ est majorée par 10^{-3} pour tout x dans $I = [-1, 1]$.

Soit $x \in I\backslash\{0\}$. Comme $c_x \in]0, x[$ ou $]x, 0[$, alors x et c_x sont entre -1 et 1, donc $|x| \leqslant 1$ et $0 < \mathrm{e}^{c_x} \leqslant \mathrm{e}$.

Donc $|\,\mathrm{e}^x - P_n(x)| = \left|\mathrm{e}^{c_x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \mathrm{e}^{c_x}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$.

Pour que cette erreur soit majorée par 10^{-3}, il suffit alors que $\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire que $(n+1)! \geqslant 10^3\,\mathrm{e} \simeq 2718,3$. Alors $n = 6$ suffit (car $7\,! = 5040$).

Ainsi sur $[-1, 1]$, e^x est approché par le polynôme $P_6 : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^6}{6!}$ à 10^{-3} près.

Remarque. — Comme dans l'exemple précédent, on utilise souvent la FTL sur un intervalle de la forme $[a, x]$ ou $[x, a]$. La formule s'exprime dans ce cas de la manière suivante.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $n+1$ fois dérivable sur I et soit $a \in I$. Il existe alors un réel c dans l'intervalle d'extrémités a et x tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

TD

Exercice 4 1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2(1+x)^2}$.

2. Quel encadrement de $\ln(2)$ peut-on en déduire ? Et de $\ln(1,1)$?
   Par quelle méthode pourrait-on obtenir des encadrements plus précis ?

Exercice 5 1. (a) Montrer que pour tout réel x, $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{|x|^5}{120}$.

   (b) En déduire sans calculatrice une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-2} près.
   (c) Par une méthode similaire, déterminer une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-3} près.
   (d) Déterminer sans calculatrice un réel α tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, le réel $x - \frac{x^3}{6}$ soit une valeur approchée de $\sin x$ à 10^{-7} près (on ne cherche pas forcément le meilleur réel α possible).

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 6 (En autonomie) Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \leqslant \mathrm{sh}(x) \leqslant x\,\mathrm{ch}(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{x^4}{24}$.
   Quel encadrement de $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ peut-on en déduire ?

Exercice 7 On considère un objet se déplaçant le long d'une ligne droite.

On note $f(t)$ la distance parcourue entre l'instant 0 et l'instant t (exprimé en secondes).

On suppose que la vitesse initiale de l'objet est de + 2 m.s^{-1} et que son accélération (pas forcément constante au cours du mouvement) reste comprise entre + 0,4 m.s^{-2} et + 1 m.s^{-2}.

À l'aide de la FTL, encadrer (sans calculatrice) la distance parcourue par l'objet en 100 secondes.

Exercice 8 1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée k-ième de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

2. Écrire la FTL à l'ordre n appliquée à f avec $a = 0$ et $b = 1$.
3. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   A l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 (Inégalités de Kolmogorov) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. Dans tout l'exercice on notera $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.

Le but de cet exercice est de prouver que si f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$, alors f' aussi est bornée sur $\mathbb{R}$, et de majorer M_1 en fonction de M_0 et M_2.

On suppose donc pour toute la suite que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ (M_0 et M_2 sont donc des nombres réels *finis*).

On rappelle l'inégalité triangulaire $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a+b| \leqslant |a| + |b|$.

1. On fixe un $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit $h > 0$. Appliquer la FTL à f entre x et $x+h$ à l'ordre 1.
   (b) En déduire l'inégalité : $\forall h > 0, |f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.
   (c) En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$, et que $\boxed{M_1 \leqslant M_0 + M_2}$ (majoration notée ★).
2. *On se propose de trouver une autre majoration de M_1 par une autre méthode.*
   (a) Étudier la fonction $\varphi : h \mapsto \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
   (b) En déduire que $\boxed{M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}}$ (majoration notée ♡).
3. *Application.* — Pour la fonction $f(x) = \exp(-x^2)$:
   (a) Calculez la valeur de M_0 (on ne demande pas M_1).
   (b) On donne ci-dessous le tableau de variations de f'', le fait que f'' est paire et aussi $\mathrm{e}^{-3/2} \simeq 0.22$. Donner sans justifier la valeur de M_2.

x	0		$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	-2	$\nearrow$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-3/2}}{2}$	$\searrow$	0

   (c) Comparez les deux majorations ★ et ♡ obtenues pour M_1 ; laquelle est-elle la meilleure ? (on donne $\sqrt{2} \simeq 1.41$).

En complément...

https ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/cours_PC/chap05_Polynomes_Taylor_Lagrange_WEB.pdf