TP Maple n° 2 — Suites et approximation

Ex. 1 Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \text{et} \qquad v_n = 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. Tracer sur un graphique les deux suites pour n variant de 1 à 100.
3. Calculer la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$. En donner une valeur approchée.

Ex. 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. On peut alors définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in [a,b]$.
La procédure suivante permet de visualiser sur un graphique l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
graphe := proc(f,u0,n,a,b)
local L, i, u, v, m, M, marge;
u := evalf(u0);
L := [[u,0]];
for i from 1 to n do
    v := evalf(f(u));
    L := [op(L), [u,v], [v,v]];
    u := v;
end do;
return plot([L, f(x), x], x=a..b, color=[green,red,blue], scaling=constrained);
end proc;
```

1. Tester cette procédure avec la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3/2 - x}$ sur l'intervalle $[0, 1.5]$, en prenant $u_0 = 0.2$ et $n = 10$.
2. On étudie maintenant la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(t) = e^{-t}$; on remarquera que $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ et qu'elle est décroissante.
   (a) Écrire une procédure `Rec` prenant en entrée l'entier naturel n et retournant une valeur approchée de u_n.
   (b) Utiliser la procédure `Rec` pour afficher les 50 premiers termes de la suite. Quelle remarque peut-on faire ?
   (c) Utiliser la procédure `graphe` pour faire une conjecture à propos du comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Justifier que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout n, par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones puis qu'elles sont toutes les deux convergentes. Conclure.

Ex. 3 **La méthode de dichotomie.**

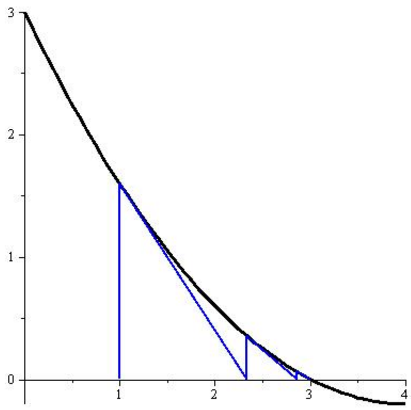
Étant donnée une fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins un réel $r \in\,]a,b[$ tel que $f(r) = 0$. La méthode de la dichotomie est un algorithme de calcul approché de r lorsqu'il est unique.
Voici une description de cet algorithme : on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Si a_n et b_n ont été construits, on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$;
– si $f(a_n)f(c_n) = 0$, on arrête le calcul car on a trouvé r ;
– si $f(a_n)f(c_n) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
– si $f(a_n)f(c_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

À chaque étape, $r \in [a_n, b_n]$ et $|r - c_n| \leqslant \dfrac{|b_n - a_n|}{2}$. Si $\delta_n = \dfrac{|b_n - a_n|}{2}$, alors δ_n est un majorant de l'erreur commise lorsqu'on prend c_n pour une valeur approchée de r. Dans la suite, on désigne par ε une valeur strictement positive, fixée au départ, que l'on nomme « erreur maximale autorisée ».

1. On considère la fonction $f : x \longmapsto \cos x - x^2 + 1$.
   (a) Tracer le graphe de la fonction sur le segment $[0, 2]$.
   (b) Il semble, graphiquement, que $f(1.1)$ et $f(1.2)$ soient de signe contraire. Le confirmer.
   (c) On fixe ici $a = 1.1$, $b = 1.2$ et $\varepsilon = 10^{-8}$. Écrire un programme Maple qui réalise l'algorithme de dichotomie appliqué à la fonction f sur $[a, b]$ avec une erreur maximale autorisée de ε. Il devra satisfaire aux exigences suivantes :
   – la valeur calculée par le programme s'affiche ;
   – un message signale à l'utilisateur si la valeur proposée est exactement la racine ou s'il s'agit d'une valeur approchée ;
   – un autre indique le nombre d'étapes effectuées dans la dichotomie.
2. Faire le même travail pour calculer, à 10^{-8} près, l'unique zéro de la fonction $g : x \longmapsto e^{-x} - \sin x$ dans $[0, 1]$.

Ex. 4 **La méthode de Newton.**

La méthode de dichotomie ne tient compte que des valeurs de f. Une autre méthode permettant de déterminer une valeur approchée d'un zéro r (supposé unique) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ et dont la dérivée f' ne s'annule pas est la méthode de Newton (ou méthode des tangentes) ; celle-ci tient compte des valeurs prises par f et par f'.
En voici une description :
– on choisit une valeur approchée x_0 de r (donnée par exemple par la méthode de la dichotomie) ;
– on remplace la courbe par sa tangente puis on calcule le zéro de l'approximation affine associée à cette tangente (ce zéro est généralement plus proche du zéro r de f) ;
– on réitère le procédé.



Ceci conduit au calcul des termes de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme x_0, et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Avec des hypothèses convenables sur f et sur x_0, on montre que la méthode la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r.

1. Écrire une procédure `Newton` qui prend en entrée une fonction f, une valeur initiale x_0 et un nombre $\varepsilon > 0$ puis retourne une valeur x_n telle que $|f(x_n)| < \varepsilon$ ainsi que le nombre d'itérations nécessaires à son obtention. (On admettra que la valeur x_n est une valeur approchée de r à ε près.)
2. Déterminer une valeur approchée de r à 10^{-8} près dans le cas de $f : x \longmapsto \cos x - x^2 + 1$ puis de $g : x \longmapsto e^{-x} - \sin x$ partant de $x_0 = 1$.
3. Comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus à l'aide de la méthode de dichotomie.
4. Utiliser la méthode de Newton pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près puis comparer avec la valeur approchée donnée directement par la commande `evalf`.