TP Maple n° 3 — Intégration, intégration approchée

Charger le package `student` avec la commande `with(student)` puis consulter l'aide sur les commandes suivantes : `intparts`, `changevar`, `leftsum`, `leftbox`, `trapezoid`.

Ex. 1

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos t)^2 \cos(3t)\sqrt{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t, \qquad B = \int_0^1 \frac{t^4}{1+t^6}\,\mathrm{d}t, \qquad C = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 t\cos t}{1+\sin^4 t+\cos^4 t}\,\mathrm{d}t.$$

2. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{x}}$, trouver une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}}$.
3. En utilisant une intégration par parties, trouver une primitive de $t \longmapsto \arcsin^6 t$.

Ex. 2 On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{2x^2-3} \frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel le domaine de définition de f ?
2. Tracer la courbe représentative de f.

Ex. 3 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Le but de l'exercice est d'évaluer numériquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

La méthode des rectangles. On découpe l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles égaux, puis, sur chacun de ces intervalles, on approche l'intégrale de f par l'aire du rectangle ayant pour base cet intervalle et pour hauteur la valeur de f en l'extrémité gauche (ou droite) de l'intervalle.

1. Justifier l'emploi de cette méthode.
2. Écrire une procédure $\mathrm{Grect}(f,a,b,n)$ (resp. Drect) qui prend en entrée f, a, b et n et calcule la valeur approchée de I par la méthode des rectangles à gauche (resp. à droite).
3. Dans la suite on prendra $f(x) = \exp(-x^2), a = 0, b = 1$.
   (a) Tester la fonction Grect (resp. Drect) en prenant $n = 10, 100, 1000$.
   (b) Comparer la fonction Grect (resp. Drect) avec la fonction Maple `leftsum` (resp. `rightsum`) du package `student`.
   (c) Comparer avec la valeur approchée donnée par Maple.
   (d) Utiliser une boucle while, pour trouver le plus petit entier n tel que $|I - \mathrm{Drect}(f,a,b,n)| \leqslant 0,3$.
4. Utiliser la fonction `leftbox` pour faire des dessins.

La méthode des trapèzes. On découpe l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles égaux, puis, sur chacun de ces intervalles, on approche cette fois l'intégrale de f par l'aire du du trapèze ayant pour sommets les extrémités de l'intervalle et les images par f de ces extrémités. *On peut montrer que l'on approche ainsi la valeur de l'intégrale de f sur $[a,b]$.*

1. Écrire une procédure $\mathrm{Trap}(f,a,b,n)$ qui prend en entrée f, a, b et n et calcule la valeur approchée de I par la méthode des trapèzes.
2. Dans la suite on prendra $f(x) = \exp(-x^2), a = 0, b = 1$.
   (a) Tester la fonction Trap en prenant $n = 10, 100, 1000$.
   (b) Comparer la fonction Trap avec la fonction Maple `trapezoid` du package `student` puis avec la valeur approchée donnée par Maple.
   (c) Utiliser une boucle `while`, pour trouver le plus petit entier n tel que $|I - \mathrm{Trap}(f,a,b,n)| \leqslant 0,3$.
3. Comparer avec la méthode des rectangles.