INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Équations différentielles Formules de Taylor

1 Équations différentielles

Commande utile : dsolve

1. Trouver à l'aide de Maple les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :
   - $y'(t) + 3y(t) = e^t - 3\cos(t)$;
   - $y''(t) + y'(t) + y(t) = t\sin(t)$;
   - $y''(t) + 5y'(t) - 2(t) = e^{-5t}\cos(3t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
2. Soit $\omega > 0$. Résoudre à l'aide de Maple l'équation $y''(t)+y'(t)+y(t) = \sin(\omega t)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Représenter les solutions sur l'intervalle $[0, 50]$ pour plusieurs valeurs de ω (comprises par exemple entre 0.1 et 5). Expliquer l'allure des courbes obtenues.
3. Demander à Maple de résoudre l'équation différentielle $y''(t) + ay(t) = \cos(t)$, où $a \in \mathbb{R}$. Que penser du résultat donné ? Comment forcer Maple à résoudre l'équation dans le cas $a < 0$? On pourra utiliser la commande assuming. *Noter que Maple a des limites : qu'arrive-t-il quand on remplace la condition $a < 0$ par $a = 1$?*

2 Développements limités et asymptotiques avec Maple

Commande utile : taylor

1. Tester la commande > taylor(sin(x),x=0,7) ;

   Que penser du résultat ? Comment modifier cette commande pour obtenir le développement limité de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 7 ?
2. Soit $f : x \mapsto (x + 5)\arctan\left(x^2 + x + 1\right) + \dfrac{2 + x^2 - x^3}{\sqrt{5 + x^4}}$.
   (a) À l'aide de Maple, donner le développement limité de $f(x)$ en 0, puis en 1, à l'ordre 5.
   (b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 ainsi que la position relative de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de l'origine. Vérifier graphiquement.
   (c) La commande taylor peut également être appliquée en l'infini. Déterminer l'équation des asymptotes à la courbe représentant f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (d) Représenter sur un même graphique la fonction f, les asymptotes à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et la partie régulière du développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

3 Une fonction plate

On définit la fonction $g : x \mapsto e^{-1/x^2}$.

1. La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Tracer la représentation graphique de g sur l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Expliquer la réponse obtenue lorsqu'on applique la commande taylor à $g(x)$ en 0.
4. (a) Calculer $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$ et $g^{(4)}(x)$ pour $x \neq 0$.
   (b) Montrer que le prolongement de g est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Quel est le développement limité d'ordre n de $g(x)$ en 0 pour $n \in \mathbb{N}^*$?
   (d) Expliquer le titre de cette partie.

4 Approximation de la fonction sinus au voisinage de 0

On cherche à étudier la manière dont la partie polynomiale du développement de Taylor à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point a de l'intervalle I approche la fonction dans un voisinage de ce point. La formule de Taylor-Lagrange permet d'affirmer que, pour tout $x \in I$, il existe un réel $c \in I$ tel que

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{avec} \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

1. La fonction `ptaylor` définie ci-dessous calcule pour une fonction f suffisamment dérivable la partie polynomiale d'ordre n de son développement de Taylor-Lagrange en a :

   > ptaylor :=(f,n,a)->convert(taylor(f(x),x=a,n+1),polynom) ;

   Expliquer le rôle des différentes instructions qui entrent dans l'expression de `ptaylor`. Recopier la fonction `ptaylor` puis la tester en donnant la partie polynomiale du développement de Taylor-Lagrange de la fonction sinus en 0 à l'ordre 5 et à l'ordre 6. Faire de même en $3\pi/2$.
2. Soit $E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Représenter sur un même graphique la fonction sinus et la fonction polynomiale p_n pour $n \in E$ et $a = 0$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. Commenter les résultats obtenus.
3. On note `erreur` la fonction qui à x, n et a associe la différence entre $\sin(x)$ et $p_n(x)$. Construire la fonction `erreur`.
4. Représenter sur un même graphique la différence entre la fonction sinus et la fonction polynomiale p_n pour $n \in E$ et $a = 0$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
5. Déterminer graphiquement à partir de quelle valeur de n la fonction polynomiale p_n approche sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ la fonction sinus avec une erreur inférieure à 10^{-2}.
6. Si on souhaite que l'erreur soit inférieure à 10^{-3}, quelle valeur de n faut-il prendre ?
7. Déterminer graphiquement à partir de quelle valeur de n la fonction polynomiale p_n approche sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ la fonction sinus avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

8. On souhaite approcher la fonction sinus par la fonction polynomiale p_5. Déterminer graphiquement sur quel intervalle centré en $a = 0$ l'erreur commise reste inférieure à 10^{-4}.
9. Supposons que la dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ de f sur l'intervalle I soit bornée par un réel positif M :
$$\forall x \in I \qquad |f^{n+1}(x)| \leqslant M.$$
Dans ce cas, l'erreur d'approximation de f par p_n en $x \in I$ vérifie :
$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant M \, \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   (a) Expliquer, en utilisant cette majoration, les observations qui ont pu être faites visuellement.
   (b) Déterminer à partir de cette majoration le degré de la fonction polynomiale p_n qui permet d'approcher sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ pour $a = 0$ la fonction sinus avec une erreur inférieure à 10^{-4}.
   (c) Vérifier visuellement, en utilisant la méthode graphique précédente, que cette valeur convient effectivement.