



Sports-études année 1

# COURS DE MATHÉMATIQUES

*Première partie : analyse*

Aimé LACHAL

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON



# Avertissement

Ce cours de mathématiques s'adresse aux élèves de l'année 1 de la section sportive de haut niveau de l'INSA. Il est constitué de deux parties :

- partie 1 : *analyse* ;
- partie 2 : *algèbre linéaire*.

La partie 1, qui se déroule au premier semestre, commence par deux courts chapitres, les courbes planes paramétrées et les équations différentielles, nécessitant des connaissances acquises en année 0 : calcul différentiel et calcul des primitives des fonctions d'une variable. Ils seront respectivement complétés en année 2 par un chapitre sur les courbes gauches et les surfaces et un chapitre sur les équations aux dérivées partielles. Elle comporte ensuite une importante partie centrée sur la théorie des séries (séries numériques, suites et séries de fonctions, séries de Fourier) qui demande une bonne maîtrise des suites numériques et des intégrales généralisées (vues en année 0). Cette théorie sera complétée en année 2 par un chapitre sur les séries entières. L'objectif de cette théorie est de savoir affronter des problèmes de convergence puis de calculer certaines sommes comportant une infinité de termes. Ces questions se rencontrent dans divers domaines des sciences de l'ingénieur : par exemple, les séries de Fourier interviennent de manière cruciale dans le traitement du signal et de nombreux phénomènes vibratoires.

La partie 2, qui se déroule au second semestre, concerne la théorie des espaces vectoriels. On donne les bases de la structure d'espace vectoriel (prolongeant ou complétant les structures algébriques abordées en année 0 : groupes, anneaux, corps), puis on introduit les applications linéaires entre espaces vectoriels qui transportent cette structure et qui permettent de définir un calcul matriciel. L'objectif final est la diagonalisation des matrices et la réduction des endomorphismes conduisant à des applications importantes :

- résolution de systèmes différentiels linéaires ;
- étude de suites définies par des relations de récurrence linéaires ;
- réduction des coniques.

Elle sera complétée en année 2 par un chapitre sur les espaces vectoriels normés. Le calcul matriciel sera utilisé en calcul différentiel à plusieurs variables ainsi que dans l'étude des quadriques de l'espace.

Chaque chapitre est suivi d'exercices traités en séances de travaux dirigés. Ce document écrit est plus complet que l'exposé du cours oral. En particulier, les parties dactylographiées en petits caractères sont soit des parties de démonstration délicates ou hors-programme, qui sont insérées dans ce cours par souci de complétude, soit des remarques ou compléments anecdotiques, pour satisfaire les esprits curieux. Elles pourront être omises en première lecture.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes paramétrées</b>	<b>1</b>
1	Introduction . . . . .	1
2	Fonctions vectorielles . . . . .	1
2.1	Continuité, dérivabilité . . . . .	2
2.2	Variations simultanées . . . . .	3
2.3	Tangente . . . . .	3
2.4	Réduction de l'ensemble d'étude . . . . .	7
2.5	Branches infinies . . . . .	7
2.6	Plan d'étude . . . . .	9
3	Quelques courbes particulières . . . . .	11
3.1	Droites . . . . .	11
3.2	Cercles . . . . .	12
3.3	Coniques . . . . .	12
3.4	Coordonnées polaires . . . . .	18
4	Compléments : propriétés métriques . . . . .	19
4.1	Longueur, abscisse curviligne . . . . .	19
4.2	Circulation d'un champ de vecteurs . . . . .	20
4.3	Courbure . . . . .	21

<b>2</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>25</b>
1	Introduction . . . . .	25
2	Généralités . . . . .	26
3	Équations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	27
3.1	Cas général . . . . .	27
3.2	Cas $a$ constant . . . . .	31
4	Équations différentielles linéaires du second ordre . . . . .	34
4.1	Cas général . . . . .	34
4.2	Cas $a$ et $b$ constants . . . . .	35
5	Autres équations . . . . .	42
5.1	Équation d'Euler . . . . .	42
5.2	Équation de Bernoulli . . . . .	43
5.3	Équation de Riccati . . . . .	45
5.4	Équation à variables séparables . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>51</b>
1	Introduction . . . . .	51
2	Rappels sur les suites numériques . . . . .	53
2.1	Généralités . . . . .	53
2.2	Suites arithmétiques . . . . .	56
2.3	Suites géométriques . . . . .	57
3	Séries numériques : définitions générales . . . . .	61
4	Séries numériques à termes positifs . . . . .	63
4.1	Règles de comparaison . . . . .	63
4.2	Règle de Cauchy . . . . .	64
4.3	Règle de d'Alembert . . . . .	65

4.4	Comparaison avec une intégrale, critère de Riemann . . . . .	66
5	Séries numériques à termes réels ou complexes . . . . .	69
5.1	Convergence absolue, semi-convergence . . . . .	69
5.2	Séries alternées, règle d'Abel . . . . .	71
5.3	Sommation par tranches . . . . .	74
5.4	Convergence commutative . . . . .	76
5.5	Série produit . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>85</b>
1	Suites de fonctions . . . . .	85
1.1	Convergences simple et uniforme . . . . .	85
1.2	Continuité, intégration, dérivation . . . . .	88
2	Séries de fonctions . . . . .	91
2.1	Convergences simple, uniforme et normale . . . . .	91
2.2	Règle d'Abel uniforme . . . . .	92
2.3	Continuité, intégration, dérivation . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>101</b>
1	Introduction . . . . .	101
2	Preliminaires, séries trigonométriques . . . . .	103
2.1	Orthogonalité . . . . .	103
2.2	Signaux élémentaires . . . . .	104
2.3	Séries trigonométriques . . . . .	105
3	Séries de Fourier . . . . .	108
4	Application aux cordes vibrantes . . . . .	115
4.1	Position du problème . . . . .	115

4.2	Construction d'une solution . . . . .	116
4.3	Corde de guitare . . . . .	118
4.4	Corde de piano . . . . .	120
5	Application à la propagation de la chaleur . . . . .	121
5.1	Position du problème . . . . .	121
5.2	Construction d'une solution . . . . .	122

# Chapitre 1

## Courbes paramétrées

### 1 Introduction

Une fonction numérique d'une variable réelle peut être représentée graphiquement dans le plan par une courbe d'équation cartésienne  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathcal{D}_f$ . Cette courbe est plus précisément définie comme étant l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x, f(x))$  dans le plan :  $\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)), x \in \mathcal{D}_f\}$ ; c'est un *graphe*. Elle a la particularité d'évoluer de la gauche vers la droite sans retour selon la direction de l'axe orienté (de la gauche vers la droite)  $Ox$  puisqu'à chaque abscisse correspond au plus une ordonnée. Si maintenant l'on remplace  $x$  par une fonction  $t \in I \mapsto x(t)$  non nécessairement monotone,  $t$  désignant une variable temporelle par exemple et si l'on pose  $y(t) = f(x(t))$ , la courbe correspondante  $\mathcal{C}_f = \{M(x(t), y(t)), t \in I\}$  peut à présent évoluer dans un sens comme dans un autre selon la direction de l'axe  $Ox$ . On a cette fois affaire à une courbe *paramétrée*.

Prenons l'exemple d'un cercle. L'intersection de ce cercle avec une droite parallèle à l'axe  $Oy$  non tangente au cercle, lorsqu'elle est non vide, contient deux points : cela montre que le cercle ne peut pas être considéré comme le graphe d'une fonction numérique et ne peut donc pas être décrit par une courbe d'équation  $y = f(x)$ . On verra qu'il admet toutefois une *représentation paramétrique*.

### 2 Fonctions vectorielles

Une *fonction vectorielle* est une fonction  $\vec{F}$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans l'ensemble des vecteurs du plan  $\mathcal{P}$  ou de l'espace  $\mathcal{V}$ . Par exemple, si  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère de l'espace  $\mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{F} : I &\longrightarrow \vec{\mathcal{V}} \\ x &\longmapsto x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \end{aligned}$$

où  $x, y, z$  sont des fonctions définies sur  $I$  à valeurs réelles. La *courbe paramétrée associée* est l'ensemble des points  $M(t)$  tels que  $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{F}(t) : \mathcal{C} = \{M(t), t \in I\}$ . Le point  $M(t)$  a pour coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On dit que le système d'équations

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I, \text{ est une } \textit{représentation paramétrique} \text{ de } \mathcal{C}.$$

La représentation graphique d'une fonction numérique d'une variable réelle  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  est un exemple de courbe paramétrée associée à la fonction vectorielle  $\vec{F}$  définie par  $\vec{F}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$ .

Deux aspects sont à prendre en compte lors de l'examen d'une courbe paramétrée :

- l'aspect *statique* qui est la visualisation globale de la courbe  $\mathcal{C}$ , « support graphique » de la fonction vectorielle  $\vec{F}$ ;
- l'aspect *dynamique* qui est la visualisation progressive de la courbe  $\mathcal{C}$  au cours du temps si le paramètre  $t$  est par exemple une variable temporelle. Dans ce cas, il y a un sens de parcours à suivre le long du support statique, le point courant  $M(t)$  peut repasser plusieurs fois par une même position, fait qui n'est pas toujours visible lors de l'observation globale de la courbe.

## 2.1 Continuité, dérivabilité

**Définition 2.1** La fonction vectorielle  $\vec{F}$  est continue (resp. dérivable) lorsque ses composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont continues (resp. dérivables). En cas de dérivabilité, on note  $\vec{F}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ .

Rappelons que si  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  et si on suppose le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé direct, alors les produits scalaire et vectoriel des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  et la norme du vecteur  $\vec{u}$  sont respectivement définis par

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u}' &= xx' + yy' + zz', \\ \vec{u} \wedge \vec{u}' &= (yz' - y'z)\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}, \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}$$

Énonçons quelques propriétés élémentaires.

**Proposition 2.1** Soit  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$  deux fonctions vectorielles dérivables,  $\varphi$  une fonction numérique dérivable et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $\vec{F} + \vec{G}$ ,  $\lambda\vec{F}$ ,  $\vec{F} \circ \varphi$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{G}$  et  $\vec{F} \wedge \vec{G}$  sont dérivables et l'on a

$$\begin{aligned}(\vec{F} + \vec{G})' &= \vec{F}' + \vec{G}', \\ (\lambda\vec{F})' &= \lambda\vec{F}', \\ (\vec{F} \circ \varphi)' &= \varphi'(\vec{F}' \circ \varphi) \\ (\vec{F} \cdot \vec{G})' &= \vec{F}' \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \vec{G}', \\ (\vec{F} \wedge \vec{G})' &= \vec{F}' \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \vec{G}'.\end{aligned}$$

Si la fonction  $\vec{F}$  est de norme constante, alors  $\vec{F} \cdot \vec{F}' = 0$ .

EXEMPLE.

Soit  $\vec{F}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$ . Les vecteurs dérivée et dérivée seconde sont donnés par  $\vec{F}'(t) = -(\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j}$  et  $\vec{F}''(t) = -(\cos t)\vec{i} - (\sin t)\vec{j}$ . On a  $\|\vec{F}'(t)\| = 1$  et  $\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 0$ . D'autre part,  $\vec{F}''(t) = -\vec{F}(t)$  et  $(\vec{F} \wedge \vec{F}')'(t) = \vec{F}'(t) \wedge \vec{F}'(t) + \vec{F}(t) \wedge \vec{F}''(t) = -\vec{F}(t) \wedge \vec{F}(t) = \vec{0}$  comme cela était prévisible puisque  $\vec{F}(t) \wedge \vec{F}'(t) = \vec{k}$ .

On ne considérera dans la suite plus que des courbes planes et ce dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## 2.2 Variations simultanées

Les signes des dérivées des composantes de la fonction vectorielle  $\vec{F}$  indiquent le sens d'évolution de la courbe. Quatre cas de figure sont envisageables (voir Fig. 1.1 et 1.2) :

1. lorsque  $x' > 0$ , la courbe évolue de la gauche vers la droite ;
  - (a) si  $y' > 0$ , elle se dirige vers le haut ;
  - (b) si  $y' < 0$ , elle se dirige vers le bas ;
2. lorsque  $x' < 0$ , la courbe évolue de la droite vers la gauche ;
  - (a) si  $y' > 0$ , elle se dirige vers le haut ;
  - (b) si  $y' < 0$ , elle se dirige vers le bas.

$t$	+	$t$	+	$t$	-	$t$	-
$x'(t)$	+	$x'(t)$	+	$x'(t)$	-	$x'(t)$	-
$y'(t)$	+	$y'(t)$	-	$y'(t)$	+	$y'(t)$	-
$x$	$\nearrow$	$x$	$\nearrow$	$x$	$\searrow$	$x$	$\searrow$
$y$	$\nearrow$	$y$	$\searrow$	$y$	$\nearrow$	$y$	$\searrow$

FIGURE 1.1 – Sens de variation

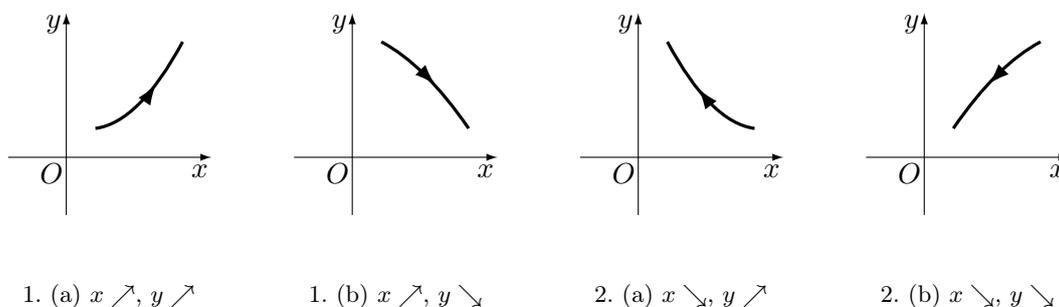


FIGURE 1.2 – Évolution de la courbe

## 2.3 Tangente

Examinons le comportement local de la courbe au voisinage d'un point  $M(t_0)$ . Pour cela, on étudie la position de la corde  $M(t_0)M(t_0+h)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Notons tout d'abord que les vecteurs  $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$  et  $\frac{1}{h} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$  sont colinéaires, ils définissent donc la même direction. On a

$$\frac{1}{h} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{1}{h} [\vec{F}(t_0+h) - \vec{F}(t_0)] = \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \vec{i} + \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \vec{j}.$$

Si la fonction  $\vec{F}$  est dérivable en  $t_0$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \vec{F}'(t_0).$$

- Lorsque  $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ , l'égalité précédente signifie que la corde  $M(t_0)M(t_0+h)$  tend vers une position limite dont la direction est donnée par  $\vec{F}'(t_0)$  (voir Fig. 1.3). Cette position limite est une droite appelée *tangente* à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $M(t_0)$ .

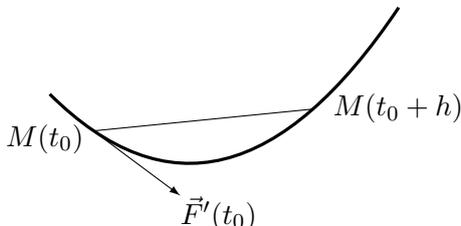


FIGURE 1.3 – Tangente en  $M(t_0)$

- Lorsque  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ , en écrivant l'égalité précédente sous la forme

$$\frac{1}{h} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \left[ \vec{i} + \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{x(t_0+h) - x(t_0)} \vec{j} \right],$$

on observe que les vecteurs  $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$  et  $\left[ \vec{i} + \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{x(t_0+h) - x(t_0)} \vec{j} \right]$  définissent la même direction. Par conséquent, si le rapport  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  admet une limite  $p$  lorsque  $t \rightarrow t_0$  (c'est *a priori* une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$  puisque  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$  ou encore  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ ), la règle de L'Hôpital<sup>1</sup> nous enseigne que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{x(t_0+h) - x(t_0)} = p$$

ce qui implique que la corde  $M(t_0)M(t_0+h)$  tend vers une position limite dont la direction est donnée par la pente  $p$ . En particulier, si  $p = 0$ , cette position limite est horizontale et si  $p = \infty$ , elle est verticale comme on le voit en écrivant de manière analogue

$$\frac{1}{h} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \left[ \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{y(t_0+h) - y(t_0)} \vec{i} + \vec{j} \right]$$

et en observant que dans ce cas

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{y(t_0+h) - y(t_0)} = 0.$$

Résumons cette étude.

**Proposition 2.2** *Supposons la fonction  $\vec{F}$  dérivable en  $t_0$ .*

- Si  $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ , la courbe admet une tangente en  $M(t_0)$  : c'est la droite passant par  $M(t_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{F}'(t_0)$ .
- Si  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$  et si la limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = p$  existe (éventuellement infinie), la courbe admet une tangente en  $M(t_0)$  de direction  $p$ . Si  $p = 0$ , cette tangente est horizontale et si  $p = \infty$ , elle est verticale.

1. L'Hôpital, Guillaume François Antoine, Marquis de : mathématicien français (Paris 1661–Paris 1704)

**Définition 2.2** *Supposons la fonction  $\vec{F}$  dérivable en  $t_0$ . On dit que le point  $M(t_0)$  est régulier (resp. singulier ou stationnaire) lorsque  $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$  (resp.  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ ).*

COMPLÉMENT 1 : CONCAVITÉ

Supposons que la fonction  $\vec{F}$  soit deux fois dérivable au voisinage de  $t_0$  et que  $M(t_0)$  soit un point régulier tel que  $\vec{F}'(t_0)$  ne soit colinéaire ni à  $\vec{j}$  ni à  $\vec{F}''(t_0)$  (on dit que le point  $M(t_0)$  est *bi-régulier*) ; ces deux conditions se traduisent par  $\vec{F}'(t_0) \wedge \vec{j} \neq \vec{0}$  et  $\vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}''(t_0) \neq \vec{0}$ , soit encore  $x'(t_0) \neq 0$  et  $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) \neq 0$ . Le rapport  $p(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$  représente, lorsqu'il est défini, la pente de la tangente à la courbe en  $M(t)$ . Son sens de variation est donné par le signe de sa dérivée (voir Fig. 1.4) :

$$p'(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2}.$$

1. Si  $x'(t_0) > 0$ , la courbe évolue de la gauche vers la droite au voisinage de  $M(t_0)$  et
  - (a) si  $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) > 0$ , la pente de la tangente à  $\mathcal{C}$  est une fonction croissante au voisinage de  $t_0$ , on dit que la courbe est *convexe* au voisinage de  $M(t_0)$  (ou encore *tourne sa concavité vers les  $y > 0$* ) ;
  - (b) si  $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) < 0$ , la pente de la tangente à  $\mathcal{C}$  est une fonction décroissante au voisinage de  $t_0$ , on dit que la courbe est *concave* au voisinage de  $M(t_0)$  (ou encore *tourne sa concavité vers les  $y < 0$* ).
2. Si  $x'(t_0) < 0$ , la courbe évolue de la droite vers la gauche au voisinage de  $M(t_0)$  et cette fois les résultats décrits précédemment sont inversés.

En résumé, on a le critère suivant.

**Théorème 2.1** *Supposons la fonction vectorielle  $\vec{F}$  deux fois dérivable au voisinage de  $t_0$ .*

- Si  $x'(t_0)[x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)] > 0$ , la courbe tourne sa concavité vers les  $y > 0$  au voisinage de  $M(t_0)$ .
- Si  $x'(t_0)[x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)] < 0$ , la courbe tourne sa concavité vers les  $y < 0$  au voisinage de  $M(t_0)$ .

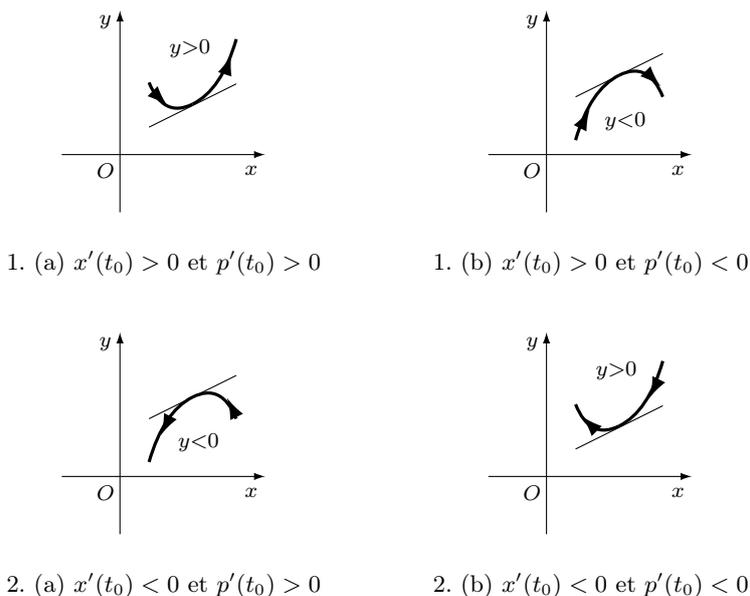


FIGURE 1.4 – Concavité

## COMPLÉMENT 2 : ÉTUDE D'UN POINT SINGULIER

La formule de Taylor<sup>2</sup>-Young<sup>3</sup> pour les fonctions numériques s'étend aisément au cas des fonctions vectorielles et s'énonce comme suit.

**Théorème 2.2 (Formule de Taylor-Young vectorielle)** Si la fonction vectorielle  $\vec{F}$  est  $n$  fois dérivable en  $t_0$ , on a

$$\vec{F}(t_0 + h) = \vec{F}(t_0) + h\vec{F}'(t_0) + \frac{h^2}{2!} \vec{F}''(t_0) + \frac{h^3}{3!} \vec{F}'''(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \vec{F}^{(n)}(t_0) + h^n \vec{\varepsilon}_n(h)$$

où  $\vec{\varepsilon}_n$  est une fonction vectorielle tendant vers  $\vec{0}$  lorsque  $t \rightarrow t_0$ .

Si  $M(t_0)$  est un point singulier,  $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ . Introduisons donc le premier vecteur-dérivée  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$  non nul s'il existe :

$$\vec{F}(t_0) = \vec{F}'(t_0) = \vec{F}''(t_0) = \cdots = \vec{F}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}.$$

Par un raisonnement similaire à celui précédemment mené, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} &= \vec{F}(t_0+h) - \vec{F}(t_0) \\ &= h\vec{F}'(t_0) + \frac{h^2}{2!} \vec{F}''(t_0) + \frac{h^3}{3!} \vec{F}'''(t_0) + \cdots + \frac{h^p}{p!} \vec{F}^{(p)}(t_0) + h^p \vec{\varepsilon}_p(h) \\ &= \frac{h^p}{p!} \vec{F}^{(p)}(t_0) + h^p \vec{\varepsilon}_p(h) \end{aligned}$$

ce qui montre que la corde  $M(t_0)M(t_0+h)$  admet une position limite dirigée par le vecteur  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ . La courbe admet donc encore dans ce cas une position tangente en  $M(t_0)$  : c'est une tangente si  $p$  est impair et une demi-tangente si  $p$  est pair (voir Fig. 1.5). Pour avoir davantage d'informations au voisinage de  $M(t_0)$ , on poussera le développement de Taylor-Young à un ordre plus élevé. On introduira plus précisément le premier vecteur-dérivée  $\vec{F}^{(q)}(t_0)$  non colinéaire à  $\vec{F}^{(p)}(t_0)$  s'il existe, ce qui se traduit en termes de produit vectoriel par :

$$\vec{F}^{(p)}(t_0) \wedge \vec{F}^{(p+1)}(t_0) = \vec{F}^{(p)}(t_0) \wedge \vec{F}^{(p+2)}(t_0) = \cdots = \vec{F}^{(p)}(t_0) \wedge \vec{F}^{(q-1)}(t_0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{F}^{(p)}(t_0) \wedge \vec{F}^{(q)}(t_0) \neq \vec{0}.$$

Dans ces conditions, le triplet  $(M(t_0), \vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0))$  constitue un repère (le *repère local*) dans lequel il devient facile de décrire l'allure locale de la courbe. On a en effet

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{h^p}{p!} [1 + \delta(h)] \vec{F}^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \vec{F}^{(q)}(t_0) + h^q \vec{\varepsilon}_q(h)$$

où  $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$ . Ainsi, dans le repère local, le point  $M(t_0+h)$  est « très proche » du point de coordonnées  $\left(\frac{h^p}{p!}, \frac{h^q}{q!}\right)$ . Quatre cas de figure sont possibles (voir Fig. 1.5). Introduisons pour simplifier les notations  $\vec{u} = \vec{F}^{(p)}(t_0)$  et  $\vec{v} = \vec{F}^{(q)}(t_0)$ .

- Si  $p$  est impair et  $q$  pair : la coordonnée de  $M(t_0)$  sur  $\vec{u}$  change de signe au voisinage de  $t_0$ , alors que celle sur  $\vec{v}$  reste positive; c'est un point *ordinaire*. L'exemple type est  $p = 1, q = 2$  (point régulier) ou  $p = 3, q = 4$  (point *méplat*).
- Si  $p$  et  $q$  sont impairs : cette fois la coordonnée sur  $\vec{v}$  change de signe au voisinage de  $t_0$ , donc la courbe traverse sa tangente; c'est un point d'*inflection*. L'exemple type est  $p = 1, q = 3$  (point régulier) ou  $p = 3, q = 5$ .
- Si  $p$  est pair et  $q$  impair : la coordonnée de  $M(t_0)$  sur  $\vec{u}$  reste positive au voisinage de  $t_0$ , alors que celle sur  $\vec{v}$  change de signe. La courbe admet une demi-tangente en  $M(t_0)$  et elle la traverse; c'est un point de *rebroussement de première espèce*. L'exemple type est  $p = 2, q = 3$ .
- Si  $p$  et  $q$  sont pairs : cette fois la coordonnée sur  $\vec{v}$  reste positive au voisinage de  $t_0$ , donc la courbe reste du même côté de sa demi-tangente en  $M(t_0)$ ; c'est un point de *rebroussement de deuxième espèce*. L'exemple type est  $p = 2, q = 4$ .

2. Taylor, Brook : mathématicien anglais (Middlesex 1685–Londres 1731)

3. Young, William-Henry : mathématicien anglais (Londres 1863–Lausanne 1942)

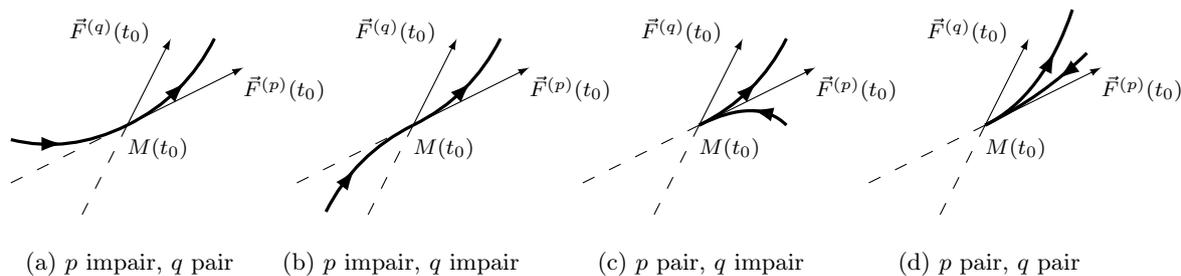


FIGURE 1.5 – Allure locale de la courbe au voisinage d'un point singulier

## 2.4 Réduction de l'ensemble d'étude

Supposons que l'ensemble de définition  $I$  de la fonction  $\vec{F}$  se scinde en deux parties :  $I = I_1 \cup I_2$ . On notera  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ) l'arc de courbe correspondant à  $I_1$  (resp.  $I_2$ ) :  $\mathcal{C}_1 = \{M(t), t \in I_1\}$  (resp.  $\mathcal{C}_2 = \{M(t), t \in I_2\}$ ). Soit  $\varphi$  une bijection de  $I_1$  sur  $I_2$ . Dans les cas ci-dessous, l'arc  $\mathcal{C}_2$  peut se déduire de l'arc  $\mathcal{C}_1$  par une transformation géométrique simple (voir Fig. 1.6).

- (a) Si l'on a  $\forall t \in I_1, \begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$ , ce qui s'écrit encore  $\forall t \in I_1, M(\varphi(t)) = s_{Oy}(M(t))$  où  $s_{Oy}$  est la symétrie par rapport à l'axe  $Oy$  parallèlement à l'axe  $Ox$ , alors l'arc  $\mathcal{C}_2$  se déduit de l'arc  $\mathcal{C}_1$  par cette symétrie.
- (b) Si l'on a  $\forall t \in I_1, \begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ , ce qui s'écrit encore  $\forall t \in I_1, M(\varphi(t)) = s_{Ox}(M(t))$  où  $s_{Ox}$  est la symétrie par rapport à l'axe  $Ox$  parallèlement à l'axe  $Oy$ , alors  $\mathcal{C}_2$  se déduit de  $\mathcal{C}_1$  par cette symétrie.
- (c) Si l'on a  $\forall t \in I_1, \begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ , ce qui s'écrit encore  $\forall t \in I_1, M(\varphi(t)) = s_O(M(t))$  où  $s_O$  est la symétrie de centre  $O$ , alors  $\mathcal{C}_2$  se déduit de  $\mathcal{C}_1$  par cette symétrie.
- (d) Si l'on a  $\forall t \in I_1, \begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$ , ce qui s'écrit encore  $\forall t \in I_1, M(\varphi(t)) = s_\Delta(M(t))$  où  $s_\Delta$  est la symétrie par rapport à la droite  $\Delta$  d'équation  $x = y$  parallèlement à la droite d'équation  $y = -x$ , alors  $\mathcal{C}_2$  se déduit de  $\mathcal{C}_1$  par cette symétrie.
- (e) Si l'on a  $\forall t \in I_1, \begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$ , ce qui s'écrit encore  $\forall t \in I_1, M(\varphi(t)) = M(t)$ , alors  $\mathcal{C}_2$  est identique à  $\mathcal{C}_1$ .

## 2.5 Branches infinies

Lorsqu'on a  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$  ou  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$ , il y a lieu de rechercher une branche infinie.

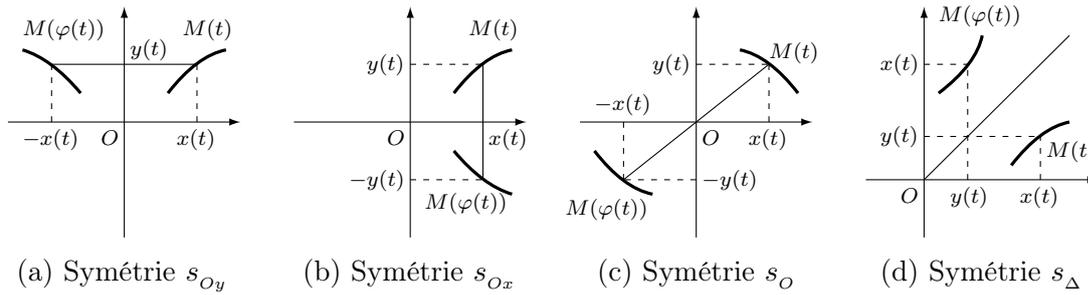


FIGURE 1.6 – Symétries

### 2.5.1 Asymptotes

(a) *Asymptotes horizontales* : si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b,$$

la droite d'équation  $y = b$  est *asymptote* à la courbe. Si plus précisément  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b^+$  (resp.  $b^-$ ), la courbe se situe localement au-dessus (resp. au-dessous) de son asymptote.

(b) *Asymptotes verticales* : si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty,$$

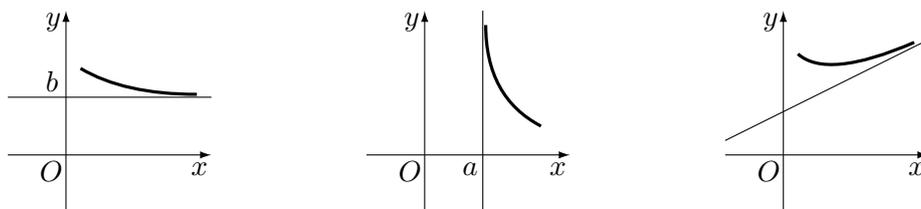
la droite d'équation  $x = a$  est *asymptote* à la courbe. Si plus précisément  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a^+$  (resp.  $a^-$ ), la courbe se situe localement à droite (resp. à gauche) de son asymptote.

(c) *Asymptotes obliques* : la recherche d'une asymptote oblique se fait selon le même procédé que celui utilisé pour les courbes  $y = f(x)$  : si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b$$

alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est *asymptote* à la courbe. Si plus précisément  $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b^+$  (resp.  $b^-$ ), la courbe se situe localement au-dessus (resp. au-dessous) de son asymptote.

Les trois cas de figures précédents sont illustrés ci-dessous (Fig. 1.7).



(a) Asymptote horizontale      (b) Asymptote verticale      (c) Asymptote oblique

FIGURE 1.7 – Asymptotes

### 2.5.2 Branches paraboliques

Si dans la recherche précédente on trouve au moins une limite infinie, la courbe n'a pas d'asymptote en  $t = t_0$ , cependant elle admet une direction asymptotique :

(a) si l'on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty,$$

alors la courbe admet une *branche parabolique de direction asymptotique l'axe  $Oy$*  ;

(b) si l'on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = \infty,$$

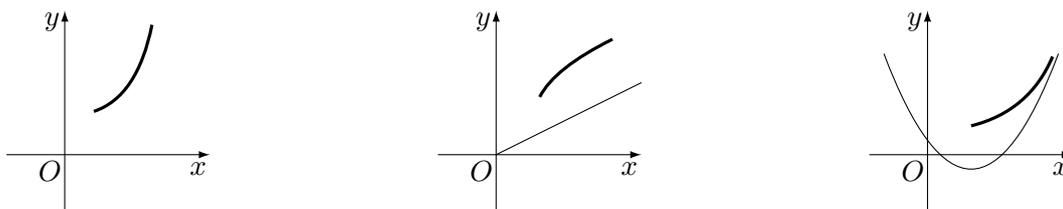
alors la courbe admet une *branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation  $y = ax$*  ;

(c) si l'on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)^2} = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax^2(t)] = b \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax^2(t) - bx(t)] = c,$$

alors la courbe admet une *parabole asymptote d'équation  $y = ax^2 + bx + c$* .

Les trois cas de figures précédents sont illustrés ci-dessous (Fig. 1.8).



(a) Direction asymptotique  $Oy$  (b) Direction asymptotique  $y = ax$  (c) Parabole asymptote

FIGURE 1.8 – Branches paraboliques

## 2.6 Plan d'étude

Voici un plan que l'on pourra suivre pour étudier une courbe paramétrée :

- réduction de l'ensemble d'étude ;
- calcul du vecteur-dérivée ;
- étude des variations des coordonnées  $x$  et  $y$  ;
- étude des points singuliers s'il y en a ;
- recherche de branches infinies ;
- tracé de la courbe.

EXEMPLE.

$$\text{Étude détaillée de la courbe de représentation paramétrique} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{t^3 - t^2 - 2}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^3 + t^2 + 2}{t^2 + 1} \end{array} \right., t \in \mathbb{R}.$$

- Réduction de l'ensemble d'étude : on a  $\begin{cases} x(-t) = -y(t) \\ y(-t) = -x(t) \end{cases}$ , donc  $M(-t) = s_{\Delta'}(M(t))$  où  $s_{\Delta'}$  est la symétrie par rapport à la droite  $\Delta'$  d'équation  $y = -x$  parallèlement à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ . Il suffit d'étudier la fonction sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
- Calcul du vecteur-dérivée : On a

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t(t^3 + 3t + 2)}{(t^2 + 1)^2} \\ y'(t) = \frac{t(t^3 + 3t - 2)}{(t^2 + 1)^2} \end{cases}$$

Le polynôme  $t^3 + 3t - 2$  admet une unique racine réelle qui est positive et que l'on notera  $t_0$ , et alors le polynôme  $t^3 + 3t + 2$  admet une unique racine réelle qui est  $-t_0$ . La fonction  $x'$  s'annule pour  $t = 0$  et  $t = -t_0$  et  $y'$  s'annule pour  $t = 0$  et  $t = t_0$ . On posera alors  $x_0 = \frac{t_0^3 - t_0^2 - 2}{t_0^2 + 1}$  et  $y_0 = \frac{t_0^3 + t_0^2 + 2}{t_0^2 + 1}$ .

- Variations simultanées : dressons le tableau des variations sur  $\mathbb{R}$  (les variations sur  $[0, +\infty[$  seraient suffisantes).

$t$	$-\infty$		$-t_0$		$0$		$t_0$		$+\infty$
$x'(t)$		+	0	-	0	+			
$y'(t)$		+		+	0	-	0		+
$x$	$-\infty$	$\nearrow$	$-y_0$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$	$x_0$	$\nearrow$	$+\infty$
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$-x_0$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$y_0$	$\nearrow$	$+\infty$

- Étude du point singulier : on a  $x'(0) = y'(0) = 0$  donc le point  $M(0)$  de coordonnées  $(-2, 2)$  est singulier. Effectuons un développement limité des fonctions  $x$  et  $y$  au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} x(t) &= -2 + t^2 + t^3 + o(t^3) \\ y(t) &= 2 - t^2 + t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\overrightarrow{M(0)M(t)} = t^2\vec{u} + t^3\vec{v} + t^3\vec{\varepsilon}(t)$$

avec  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{\varepsilon}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \vec{0}$ . Cette relation nous apprend que le point singulier  $M(0)$  est un point de rebroussement de première espèce de demi-tangente orientée par  $\vec{u}$ .

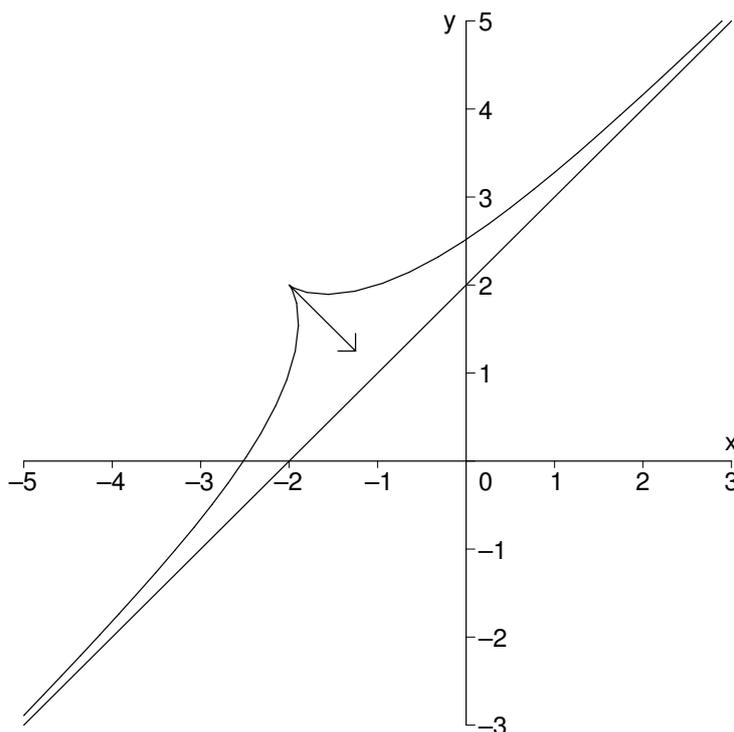
- Recherche de branches infinies : on a  $x(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t$  et  $y(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t$  ce qui entraîne  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$ .

Il y a donc une branche infinie dans la direction de la droite d'équation  $y = x$ . Comme

$$y(t) - x(t) = \frac{2(t^2 + 2)}{t^2 + 1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 2^+, \text{ la courbe admet la droite d'équation } y = x + 2 \text{ pour}$$

asymptote. De plus  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) > x(t) + 2$ , la courbe se situe donc toujours au-dessus de son asymptote.

- Tracé de la courbe :



### 3 Quelques courbes particulières

#### 3.1 Droites

Soit  $A(a, b)$  un point du plan et  $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$  un vecteur. On note  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . Soit  $M(x, y)$  un point générique du plan. On a

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  est

$$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En éliminant le paramètre  $t$  lorsque  $\alpha \neq 0$ , on obtient une représentation cartésienne : on reporte  $t = \frac{x-a}{\alpha}$  dans  $y = \beta t + b$ , ce qui donne  $y = \frac{\beta}{\alpha}(x-a) + b$  ou encore

$$\beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0.$$

Soit  $A(a, b)$  et  $B(c, d)$  deux points du plan. On note  $\mathcal{S}$  le segment  $[A, B]$ . On a, pour un point générique du plan  $M(x, y)$ ,

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \iff \exists t \in [0, 1], \begin{cases} x = (c-a)t + a \\ y = (d-b)t + b \end{cases}$$

Le système  $\begin{cases} x = (c-a)t + a \\ y = (d-b)t + b \end{cases}, t \in [0, 1]$ , est une représentation paramétrique du segment  $\mathcal{S}$ .

### 3.2 Cercles

Soit  $A(a, b)$  un point du plan et  $R$  un réel positif. Notons  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A$  et de rayon  $R$ . On a

$$M \in \mathcal{C} \iff \|\overrightarrow{AM}\| = R \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

On a obtenu une représentation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$  :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.}$$

Pour en obtenir une représentation paramétrique, on utilise le fait que tout couple de réels  $(x, y)$  vérifiant  $x^2 + y^2 = 1$  peut s'écrire  $(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Cette écriture est unique si l'on restreint le paramètre  $t$  à un intervalle de la forme  $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ . On obtient ainsi une représentation paramétrique du cercle  $\mathcal{C}$  parcouru une fois dans le sens direct :

$$\begin{cases} x = R \cos t + a \\ y = R \sin t + b \end{cases}, t \in [0, 2\pi[.$$

Le système  $\begin{cases} x = R \cos t + a \\ y = R \sin t + b \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est une représentation paramétrique du cercle  $\mathcal{C}$  parcouru une infinité de fois dans le sens direct.

### 3.3 Coniques

Les coniques, décrites par Pascal<sup>4</sup> dans un traité posthume datant de 1668, sont des courbes planes obtenues comme section d'un cône de l'espace par un plan. On démontre que ces courbes ont pour représentation cartésienne générale

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

En écartant les cas « dégénérés » d'ensembles triviaux (ensemble vide, ensemble réduit à un point, à une ou deux droites), on distingue trois familles typiques de coniques : les *ellipses*, les *hyperboles* et les *paraboles*.

#### 3.3.1 Ellipse

*Définition analytique* : l'équation réduite d'une ellipse  $\mathcal{E}$  par rapport à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Le point  $O$  est le *centre* de l'ellipse, les points  $A(a, 0)$ ,  $A'(-a, 0)$ ,  $B(0, b)$  et  $B'(0, -b)$  en sont les *sommets* et les réels positifs  $a$  et  $b$  en sont les *longueurs des demi-axes* (voir Fig. 1.9). En utilisant la représentation paramétrique d'un cercle donnée plus haut, on obtient immédiatement une représentation paramétrique de  $\mathcal{E}$  parcourue une fois dans le sens direct :

$$\boxed{\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[.}$$

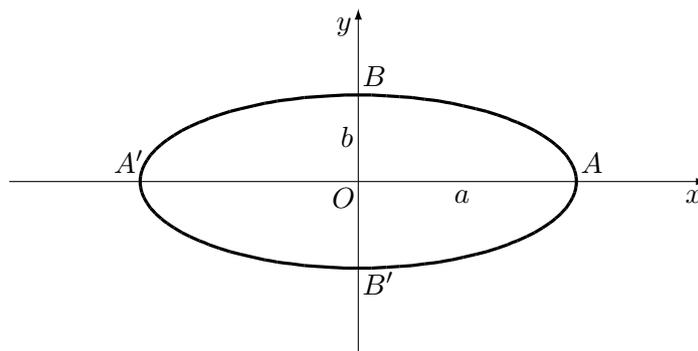


FIGURE 1.9 – Ellipse

Dans le cas où  $a = b$ , l'ellipse  $\mathcal{E}$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ .

Déterminons la tangente à  $\mathcal{E}$  en un point  $M_0(x_0, y_0)$  associé au paramètre  $t_0$ . On a

$$\vec{F}'(t_0) = -(a \sin t_0) \vec{i} + (b \cos t_0) \vec{j} = -\frac{a}{b} y_0 \vec{i} + \frac{b}{a} x_0 \vec{j}$$

et la tangente en  $M_0$  a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{a}{b} y_0 \lambda \\ y = y_0 + \frac{b}{a} x_0 \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R},$$

de laquelle on tire l'équation cartésienne  $\frac{b}{a} x_0(x - x_0) + \frac{a}{b} y_0(y - y_0) = 0$ , soit encore, puisque  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ,

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.}$$

#### COMPLÉMENT : DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ELLIPSE

Supposons que  $a \geq b$  et posons  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

— *Définition bifocale* : soient  $F(c, 0)$  et  $F'(-c, 0)$ . Alors  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$\|\vec{FM}\| + \|\vec{F'M}\| = 2a.$$

Les points  $F$  et  $F'$  sont les *foyers* de  $\mathcal{E}$  (voir Fig. 1.10). La distance entre les foyers  $\|\vec{FF'}\| = 2c$  est la *distance focale*.

DÉMONSTRATION.

On a les équivalences suivantes :

---

4. Pascal, Blaise : mathématicien, physicien, philosophe et écrivain français (Clermont 1623–Paris 1662)

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{FM}\| + \|\overrightarrow{F'M}\| = 2a &\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\
&\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\iff (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{et } C_1 \\
&\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x \quad \text{et } C_1 \\
&\iff (x+c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 \quad \text{et } C_1, C_2 \\
&\iff \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \quad \text{et } C_1, C_2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et } C_1, C_2,
\end{aligned}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont les conditions respectives  $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \leq 2a$  et  $x \geq -\frac{a^2}{c}$ . Ces conditions sont indispensables pour respecter les équivalences lors des « passages aux carrés ». En fait, elles s'avèrent redondantes dès que l'on a  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .  $\square$

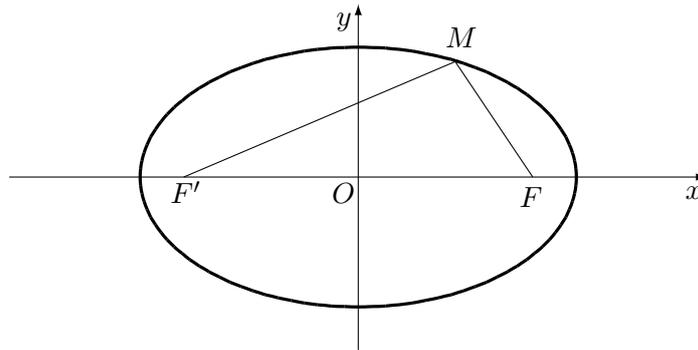


FIGURE 1.10 – Ellipse : définition bifocale

— *Définition monofocale* : soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  les droites d'équations respectives  $x = \frac{a^2}{c}$  et  $x = -\frac{a^2}{c}$ . Alors  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$\|\overrightarrow{FM}\| = e d(M, \mathcal{D}) \quad \text{ou encore} \quad \|\overrightarrow{F'M}\| = e d(M, \mathcal{D}'),$$

où  $e = \frac{c}{a} < 1$  est l'excentricité de  $\mathcal{E}$ ; les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont les *directrices* de  $\mathcal{E}$  (voir Fig. 1.11).  
DÉMONSTRATION.

On a

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{FM}\| = e d(M, \mathcal{D}) &\iff (x-c)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \\
&\iff (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

$\square$

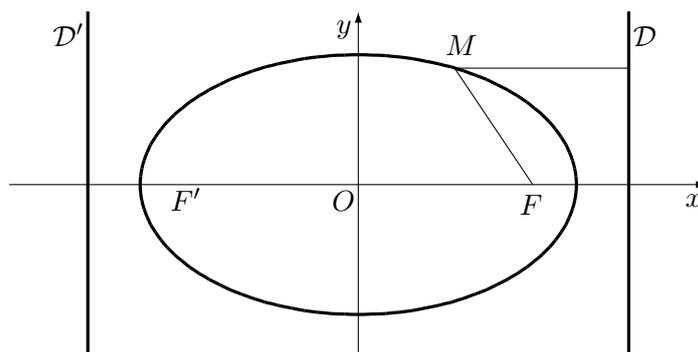


FIGURE 1.11 – Ellipse : définition monofocale

### 3.3.2 Hyperbole

*Définition analytique* : l'équation réduite d'une hyperbole  $\mathcal{H}$  par rapport à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Le point  $O$  est le *centre* de l'hyperbole, les points  $A(a, 0)$  et  $A'(-a, 0)$  en sont les *sommets* et le réel positif  $a$  en est la *longueur du demi-axe transverse*  $Ox$  (voir Fig. 1.12). En utilisant les fonctions hyperboliques, on voit que tout couple de réels  $(x, y)$  vérifiant  $x^2 - y^2 = 1$  et  $x \geq 0$  peut s'écrire  $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; de plus, cette écriture est unique. De même tout couple de réels  $(x, y)$  vérifiant  $x^2 - y^2 = 1$  et  $x \leq 0$  peut s'écrire  $(-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . On voit ainsi que l'hyperbole  $\mathcal{H}$  est constituée de deux branches  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  dont des représentations paramétriques sont

$$\boxed{\text{pour } \mathcal{H}_1 : \begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ et pour } \mathcal{H}_2 : \begin{cases} x = -a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

On démontre de la même manière que pour l'ellipse que la tangente à  $\mathcal{H}$  en un point  $M_0(x_0, y_0)$  a pour équation cartésienne

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.}$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ , il y a lieu d'étudier les branches infinies de  $\mathcal{H}$ . Pour  $\mathcal{H}_1$  par exemple on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \operatorname{th} t = \frac{b}{a}$ , puis  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( y(t) - \frac{b}{a} x(t) \right) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} b e^{-t} = 0^-$ , ce qui montre que la droite  $\mathcal{D}^+$  d'équation  $y = \frac{b}{a} x$  est asymptote à  $\mathcal{H}_1$ . De plus,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) < \frac{b}{a} x(t)$ , donc  $\mathcal{H}_1$  est au-dessous de  $\mathcal{D}^+$ . On montrerait de même qu'elle est asymptote à  $\mathcal{H}_2$  et que la droite  $\mathcal{D}^-$  d'équation  $y = -\frac{b}{a} x$  est aussi asymptote à  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ . En résumé,  $\mathcal{H}$  admet deux asymptotes d'équations  $y = \pm \frac{b}{a} x$ , équations qui s'écrivent encore

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.}$$

Lorsque  $a = b$ , les asymptotes sont les bissectrices du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , elles sont donc orthogonales. On dit que  $\mathcal{H}$  est une hyperbole *équilatère*.

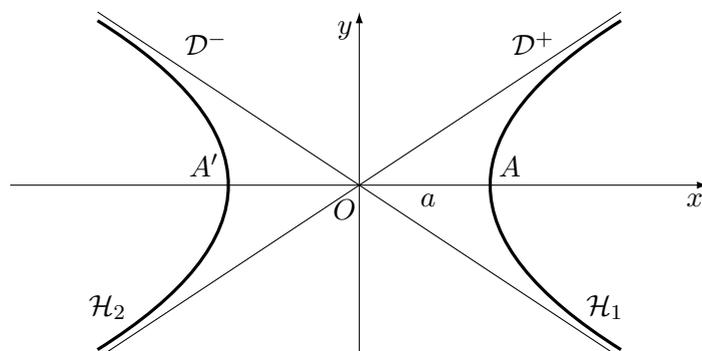


FIGURE 1.12 – Hyperbole

#### COMPLÉMENT : DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'HYPERBOLE

Posons  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Comme pour les ellipses, on peut définir les hyperboles à l'aide de foyers et de directrices. Les démonstrations sont tout à fait analogues.

— *Définition bifocale* : soient  $F(c, 0)$  et  $F'(-c, 0)$ . Alors  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$|\|\vec{FM}\| - \|\vec{F'M}\|| = 2a.$$

Les points  $F$  et  $F'$  sont les *foyers* de  $\mathcal{H}$  (voir Fig. 1.13). La distance entre les foyers  $\|\vec{FF'}\| = 2c$  est la *distance focale*.

— *Définition monofocale* : soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  les droites d'équations respectives  $x = \frac{a^2}{c}$  et  $x = -\frac{a^2}{c}$ . Alors  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$\|\vec{FM}\| = e d(M, \mathcal{D}) \quad \text{ou encore} \quad \|\vec{F'M}\| = e d(M, \mathcal{D}'),$$

où  $e = \frac{c}{a} > 1$  est l'*excentricité* de  $\mathcal{H}$ ; les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont les *directrices* de  $\mathcal{H}$  (voir Fig. 1.13).

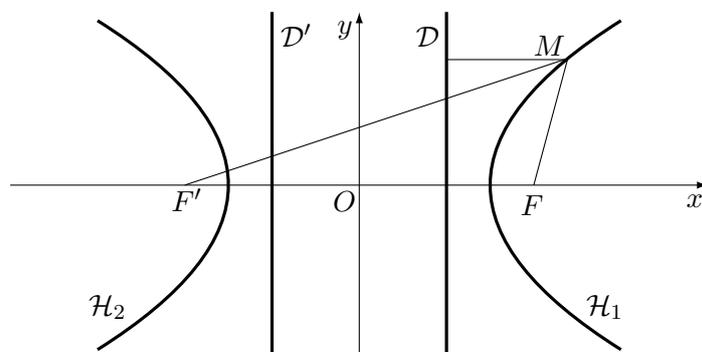


FIGURE 1.13 – Hyperbole : définitions bifocale et monofocale

### 3.3.3 Parabole

*Définition analytique* : l'équation réduite d'une parabole  $\mathcal{P}$  par rapport à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est

$$y^2 = 2px.$$

Le point  $O$  est le *sommet* de la parabole et le réel positif  $p$  en est le *paramètre* (voir Fig. 1.14). On obtient immédiatement une représentation paramétrique en posant  $y = t$  :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, t \in \mathbb{R}. \\ y = t \end{cases}$$

COMPLÈMENT : DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DE LA PARABOLE

*Définition focale* : soient  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $x = -\frac{p}{2}$ . Alors  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$\|\overrightarrow{FM}\| = d(M, \mathcal{D}).$$

Dans ce cas, l'*excentricité* de  $\mathcal{P}$ , qui est le rapport  $\|\overrightarrow{FM}\|/d(M, \mathcal{D})$ , vaut 1. Le point  $F$  et la droite  $\mathcal{D}$  sont respectivement le *foyer* et la *directrice* de  $\mathcal{P}$  (voir Fig. 1.14). La distance  $d(F, \mathcal{D})$  du foyer  $F$  à la directrice  $\mathcal{D}$  coïncide avec le paramètre  $p$ .

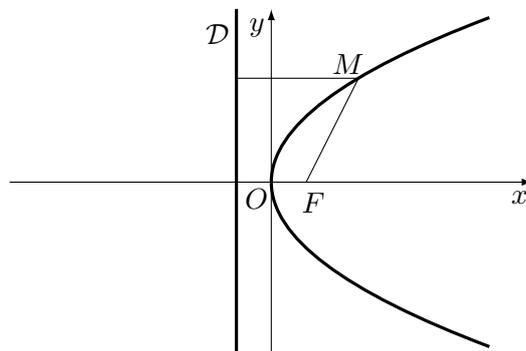


FIGURE 1.14 – Parabole

### 3.3.4 Retour au cas général

Reprenons l'équation générale d'une conique dans le cas où il n'y a pas de terme en  $xy$  (c'est-à-dire  $b = 0$ ) :

$$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

(a) Si  $a$  et  $c$  sont non nuls, cette équation peut s'écrire

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 = g$$

où l'on a posé  $g = \frac{d^2}{a} + \frac{e^2}{c} - f$ . On reconnaît dans le cas non dégénéré l'équation réduite d'une ellipse ou d'une hyperbole de centre le point  $\Omega$  de coordonnées  $\left(-\frac{d}{a}, -\frac{e}{c}\right)$  selon les signes de  $a$ ,  $c$  et  $g$ . Plus précisément,

- si  $a$ ,  $c$  et  $g$  sont de même signe, c'est l'ellipse de centre  $\Omega$ , d'axes  $Ox$  et  $Oy$  et de demi-axes  $\sqrt{g/a}$  et  $\sqrt{g/c}$ ;
- si  $a$  et  $c$  sont de signes contraires, c'est une hyperbole de centre  $\Omega$  et d'axe transverse  $Ox$  si  $ag > 0$ ,  $Oy$  si  $ag < 0$ ;
- si  $a$  et  $c$  sont de même signe et  $g$  de signe contraire à  $a$  et  $c$ , la conique est réduite à l'ensemble vide;
- si  $a$  et  $c$  sont de même signe et  $g = 0$ , la conique est réduite au point  $\Omega$ ;
- si  $a$  et  $c$  sont de signes contraires et  $g = 0$ , la conique est composée des deux droites d'équations  $y = \pm \sqrt{-\frac{a}{c}} \left( x + \frac{d}{a} \right) - \frac{e}{c}$ .

(b) Si l'un des deux réels  $a$  et  $c$  est nul, par exemple  $a = 0$ , l'équation s'écrit

$$\left( y + \frac{e}{c} \right)^2 = -\frac{2d}{c} \left( x + \frac{f}{2d} \right)$$

et l'on reconnaît la parabole de sommet le point de coordonnées  $\left( -\frac{f}{2d}, -\frac{e}{c} \right)$ , d'axe  $Ox$  et de paramètre  $-\frac{d}{c}$ .

(c) Si  $a = c = 0$ , la conique est soit une droite, soit l'ensemble vide.

L'étude du cas comportant un terme en  $xy$  sera reprise dans la deuxième partie de ce cours (dans le chapitre *diagonalisation*).

### 3.4 Coordonnées polaires

Un point dans le plan peut être repéré par divers types de coordonnées. Jusqu'à présent, on a travaillé avec les coordonnées cartésiennes :  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Dans le cas des courbes paramétrées, les coordonnées  $(x, y)$  sont des fonctions d'un paramètre  $t$ . Un autre type important de coordonnées est celui des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $r$  est la distance  $\|\overrightarrow{OM}\|$  et  $\theta$  l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ . Le lien entre les deux systèmes de coordonnées est le suivant :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Dans le cas d'une courbe paramétrée, les coordonnées  $(r, \theta)$  sont des fonctions d'un paramètre  $t$  :

$$\begin{cases} x(t) &= r(t) \cos \theta(t), \\ y(t) &= r(t) \sin \theta(t). \end{cases}$$

Le vecteur-dérivée s'écrit

$$\vec{F}'(t) = r'(t) \vec{u}_{\theta(t)} + r(t) \vec{v}_{\theta(t)}$$

où

$$\begin{cases} \vec{u}_{\theta} &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \\ \vec{v}_{\theta} &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}. \end{cases}$$

Le repère (dit *mobile*)  $(M(t), \vec{u}_{\theta(t)}, \vec{v}_{\theta(t)})$  est orthonormé direct. Dans le repère mobile, le vecteur  $\vec{F}'(t)$  a pour composantes  $(r'(t), r(t))$ . On a  $\vec{F}'(t) = \vec{0}$  si et seulement si  $r(t) = r'(t) = 0$  ce qui signifie que le seul point singulier éventuel ne peut se situer qu'en l'origine. La direction du vecteur  $\vec{F}'(t)$  est donnée, lorsque le point  $M(t)$  est régulier, par la pente  $r(t)/r'(t)$  dans le repère mobile. Cette pente correspond à l'angle  $\varphi(t)$  par rapport à l'axe  $O\vec{u}_{\theta(t)}$  tel que  $\tan \varphi(t) = \frac{r(t)}{r'(t)}$  et l'angle de la tangente de la courbe  $\mathcal{C}$  en  $M(t)$  par rapport à l'axe  $O\vec{i}$  est  $\theta(t) + \varphi(t)$  (voir Fig. 1.15).

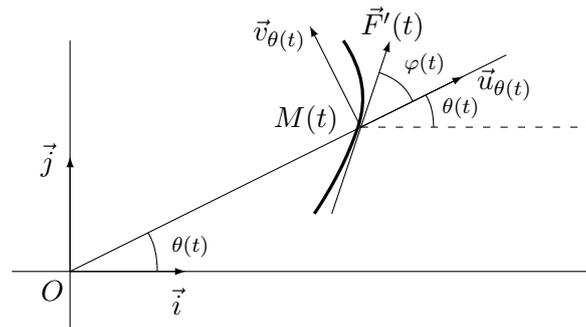


FIGURE 1.15 – Tangente en coordonnées polaires

## 4 Compléments : propriétés métriques

Dans ce paragraphe, on introduit succinctement quelques notions métriques (longueur, courbure...) relatives aux courbes paramétrées planes.

### 4.1 Longueur, abscisse curviligne

La *longueur* d'un arc paramétré associé à une fonction vectorielle  $\vec{F}$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  est donnée par

$$L = \int_a^b \|\vec{F}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

La définition originelle de la longueur est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans la courbe :

$$L = \sup \sum_{i=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}\|$$

le supremum portant sur toutes les subdivisions  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de l'intervalle  $[a, b]$ . On a pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\|\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}\| = \|\vec{F}(t_{i+1}) - \vec{F}(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{F}'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\vec{F}'(t)\| dt.$$

La longueur de la ligne polygonale  $M(t_0)M(t_1) \dots M(t_n)$  qui est égale à  $\sum_{i=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}\|$  est donc majorée par  $\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\vec{F}'(t)\| dt = \int_a^b \|\vec{F}'(t)\| dt$ , ce qui montre que la borne supérieure des longueurs de ces lignes polygonales est majorée par  $\int_a^b \|\vec{F}'(t)\| dt$  :

$$L \leq \int_a^b \|\vec{F}'(t)\| dt.$$

D'autre part, le segment de droite étant le plus court chemin reliant un point à un autre, on a

$$\|\vec{F}(t_{i+1}) - \vec{F}(t_i)\| = \|\overrightarrow{M(t_i)M(t_{i+1})}\| \leq \text{long}(M(t_i)M(t_{i+1})) = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$$

où l'on a posé  $\varphi(t) = \text{long}(M(a)M(t))$ , longueur de la courbe entre son origine  $M(a)$  et le point courant  $M(t)$ ; c'est l'abscisse curviligne définie ci-après. En choisissant deux points « voisins » sur la courbe  $M(t)$  et  $M(t+h)$ , on trouve

$$\frac{1}{h} \|\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)\| \leq \frac{1}{h} [\varphi(t+h) - \varphi(t)] \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\vec{F}'(s)\| ds$$

puis en faisant tendre  $h$  vers 0, on voit que la fonction  $\varphi$  est dérivable de dérivée  $\varphi' = \|\vec{F}'\|$ . On obtient finalement

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\vec{F}'(s)\| ds$$

qui conduit, pour  $t = b$ , à l'égalité annoncée.

L'abscisse curviligne est définie par

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\vec{F}'(s)\| ds.$$

Elle représente la longueur de l'arc correspondant au domaine de paramétrage  $[a, t]$ . La fonction  $\varphi$  est continue strictement croissante si  $\vec{F}'$  ne s'annule pas sur son intervalle de définition et l'on peut définir le *paramétrage normal* de  $\mathcal{C}$  selon  $\vec{G} = \vec{F}' \circ \varphi^{-1}$ . La courbe associée à la fonction vectorielle  $\vec{G}$  a le même support que celle associée à  $\vec{F}'$ , par contre elle est parcourue à une vitesse différente. On a  $\|\vec{G}'\| = 1$ , égalité qui justifie la qualification de normal.

EXEMPLE.

Considérons la courbe de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Le vecteur-dérivée associé est donné par  $\vec{F}'(t) = (1 - \cos t)\vec{i} - \sin t\vec{j}$ , sa norme vaut  $\|\vec{F}'(t)\| = \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2 \sin \frac{t}{2}$ . L'abscisse curviligne correspondante est

$$\varphi(t) = \int_0^t 2 \sin \frac{s}{2} ds = 4 \left( 1 - \cos \frac{t}{2} \right)$$

de fonction réciproque

$$\varphi^{-1}(s) = 2 \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right).$$

On en déduit alors le paramétrage normal :

$$\begin{aligned} \vec{G}(s) &= \vec{F}'(\varphi^{-1}(s)) \\ &= \left[ 2 \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right) - \sin \left( 2 \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right) \right) \right] \vec{i} + \cos \left( 2 \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right) \right) \vec{j} \\ &= \left[ 2 \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right) - \frac{1}{8} (4 - s) \sqrt{8s - s^2} \right] \vec{i} + \left( 1 - s + \frac{s^2}{8} \right) \vec{j}. \end{aligned}$$

## 4.2 Circulation d'un champ de vecteurs

La *circulation* d'un champ de vecteurs  $\vec{V} : (x, y) \mapsto \vec{V}(x, y) = V_1(x, y)\vec{i} + V_2(x, y)\vec{j}$  le long de la courbe orientée  $\mathcal{C}^+$  est donnée par une *intégrale curviligne* :

$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\mathcal{C}^+} V_1(x, y) dx + V_2(x, y) dy.$$

Elle se ramène à une intégrale de Riemann dès que l'on dispose d'une représentation paramétrique pour  $\mathcal{C}$  définie sur un intervalle  $[a, b]$  :

$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_a^b [V_1(x(t), y(t))x'(t) + V_2(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Par exemple, le champ de vecteurs  $\vec{V}$  peut être un champ de forces s'exerçant sur un mobile dont la trajectoire est portée par  $\mathcal{C}$ . La circulation de  $\vec{V}$  représente le travail exercé par ce champ de forces sur le mobile.

### 4.3 Courbure

— La *courbure* d'une courbe en l'un de ses points  $M(t_0)$  est définie par la limite

$$C(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\theta(t_0, h)|}{\text{long}(M(t_0)M(t_0 + h))}$$

où  $\theta(t_0, h)$  est l'angle entre les tangentes orientées à  $\mathcal{C}$  en  $M(t_0)$  et  $M(t_0 + h)$  et  $\text{long}(M(t_0)M(t_0 + h))$  est la longueur de l'arc de courbe compris entre  $M(t_0)$  et  $M(t_0 + h)$  (voir Fig. 1.16).

— Le *rayon de courbure* en  $M(t_0)$  est l'inverse de la courbure :

$$R(t_0) = \frac{1}{C(t_0)}.$$

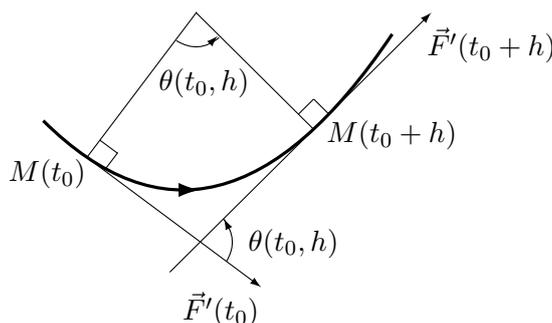


FIGURE 1.16 – Courbure

EXEMPLE.

Une droite a une courbure nulle et un rayon de courbure infini. Un cercle a un rayon de courbure égal à son rayon  $R$  et pour courbure  $1/R$ .

Le sinus de l'angle  $\theta(t_0, h)$  peut s'exprimer à l'aide du produit vectoriel des vecteurs-dérivées  $\vec{F}'(t_0)$  et  $\vec{F}'(t_0 + h)$  selon l'égalité

$$\vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}'(t_0 + h) = \sin \theta(t_0, h) \|\vec{F}'(t_0)\| \times \|\vec{F}'(t_0 + h)\| \vec{k}.$$

Supposons la fonction  $\vec{F}$  deux fois dérivable en  $t_0$ . En écrivant  $\vec{F}'(t_0 + h) = \vec{F}'(t_0) + h \vec{F}''(t_0) + h \vec{\varepsilon}(h)$ , on voit que

$$\begin{aligned} \vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}'(t_0 + h) &= h \vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}''(t_0) + h \vec{\delta}(h), \\ \|\vec{F}'(t_0)\| \times \|\vec{F}'(t_0 + h)\| &= \|\vec{F}'(t_0)\|^2 + h \vec{\eta}(h) \end{aligned}$$

et alors

$$|\theta(t_0, h)| \underset{h \rightarrow 0}{\sim} |\sin \theta(t_0, h)| \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h \frac{\|\vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}''(t_0)\|}{\|\vec{F}'(t_0)\|^2}.$$

D'autre part,

$$\text{long}(M(t_0)M(t_0 + h)) = \int_{t_0}^{t_0+h} \|\vec{F}'(s)\| ds \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h \|\vec{F}'(t_0)\|.$$

En divisant les deux relations précédentes on obtient

$$R(t_0) = \frac{\|\vec{F}'(t_0)\|^3}{\|\vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}''(t_0)\|} = \frac{[x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2]^{3/2}}{|x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)|}.$$

Si la courbe  $\mathcal{C}$  admet une représentation paramétrique normale  $\vec{G} = \vec{F} \circ \varphi^{-1}$ , alors réciproquement  $\vec{F} = \vec{G} \circ \varphi$  et

$$\begin{aligned}\vec{F}'(t_0) &= \varphi'(t_0) \vec{G}'(\varphi(t_0)), \\ \vec{F}''(t_0) &= \varphi''(t_0) \vec{G}'(\varphi(t_0)) + \varphi'(t_0)^2 \vec{G}''(\varphi(t_0))\end{aligned}$$

puis

$$\vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}''(t_0) = \varphi'(t_0)^3 \vec{G}'(\varphi(t_0)) \wedge \vec{G}''(\varphi(t_0)).$$

D'autre part, puisque  $\|\vec{G}'\| = 1$ , on a  $\vec{G}' \cdot \vec{G}'' = 0$  donc  $\|\vec{G}' \wedge \vec{G}''\| = \|\vec{G}'\| \times \|\vec{G}''\| = \|\vec{G}''\|$  et alors, en posant  $s_0 = \varphi(t_0)$ ,

$$\begin{aligned}\|\vec{F}'(t_0)\| &= |\varphi'(t_0)|, \\ \|\vec{F}'(t_0) \wedge \vec{F}''(t_0)\| &= |\varphi'(t_0)|^3 \times \|\vec{G}'(s_0) \wedge \vec{G}''(s_0)\| = |\varphi'(t_0)|^3 \times \|\vec{G}''(s_0)\|,\end{aligned}$$

d'où d'autres écritures du rayon de courbure :

$$R(\varphi^{-1}(s_0)) = \frac{1}{\|\vec{G}'(s_0) \wedge \vec{G}''(s_0)\|} = \frac{1}{\|\vec{G}''(s_0)\|}.$$

- Le *cercle osculateur* est la position limite du cercle passant par  $M(t_0)$  et  $M(t_0 + h)$ , dont la tangente en  $M(t_0)$  coïncide avec celle de la courbe  $\mathcal{C}$ . Son rayon est le rayon de courbure  $R(t_0)$  précédemment défini et son centre  $\Omega(t_0)$  est appelé *centre de courbure* (voir Fig. 1.17).

Le centre de courbure est caractérisé par

$$\overrightarrow{\Omega(t_0)M(t_0)} = \pm R(t_0) \vec{n}(t_0)$$

où le signe  $\pm$  est celui de  $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)$  ( $\Omega(t_0)$  est situé dans la concavité de la courbe) et  $\vec{n}(t_0)$  est le vecteur normal à  $\mathcal{C}$  en  $M(t_0)$  orienté de façon à ce que le quadruplet  $(M(t_0), \frac{1}{\|\vec{F}'(t_0)\|} \vec{F}'(t_0), \vec{n}(t_0), \vec{k})$  soit un repère orthonormé direct de l'espace :

$$\vec{n}(t_0) = \frac{1}{\|\vec{F}'(t_0)\|} \vec{k} \wedge \vec{F}'(t_0) = -\frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \vec{i} + \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \vec{j}.$$

Ainsi,  $\Omega(t_0)$  a pour coordonnées

$$\left( x(t_0) - \frac{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} y'(t_0), y(t_0) + \frac{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} x'(t_0) \right).$$

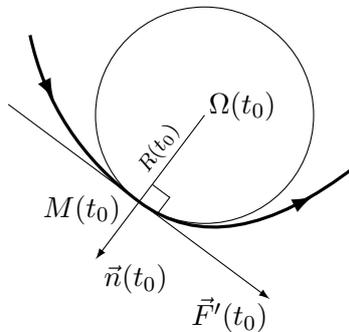


FIGURE 1.17 – Cercle osculateur

## Exercices sur les courbes paramétrées

### Exercice 1

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, identifier, donner une représentation paramétrique puis construire les courbes d'équations suivantes :
 

a) $x^2 + 4y^2 + x + 6y = 0$	b) $6x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$
c) $x^2 - y^2 + 2x - 8y = 8$	d) $2x^2 - y^2 + 4x = 3$
e) $y^2 = 2y + x$	f) $x^2 = 3x + y - 1$

**Exercice 2** On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct. À tout point  $M$  d'affixe  $z \neq 0$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .

1. On pose  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  où  $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
  - (b) Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $M'$  appartienne à l'axe réel.
2. On suppose maintenant que  $M$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon 2. L'affixe de  $M$  est alors de la forme  $z = 2e^{it}$  avec  $t \in [0, 2\pi[$ .
  - (a) Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $t$ .
  - (b) En déduire que  $M'$  décrit une conique que l'on caractérisera et que l'on dessinera.

**Exercice 3** On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $a, b > 0$  et  $(H)$  l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On pose  $\vec{u} = \frac{1}{2}(a\vec{i} - b\vec{j})$  et  $\vec{v} = \frac{1}{2}(a\vec{i} + b\vec{j})$ .

1. Exprimer  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  en fonction de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
2. On note respectivement  $(x, y)$  et  $(X, Y)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans les repères  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .
3. En déduire l'équation de  $(H)$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

**Exercice 4** On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $(E)$  l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient l'équation

$$x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0.$$

1. On considère la transformation  $\varphi$  du plan dans lui-même qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $gz$  où  $g = (-1 + i\sqrt{3})/2$ . Montrer que  $\varphi$  est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2. On désigne par  $(H)$  l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $\Re(z^2) = 1$ . Identifier la nature de  $(H)$  et le représenter.
3. Montrer qu'un point  $M(z)$  appartient à  $(E)$  si et seulement si  $\Re((gz)^2) = 1$ .
4. Montrer que  $(H)$  est l'image de  $(E)$  par  $\varphi$ . En déduire la nature de  $(E)$  puis représenter  $(E)$  sur la figure précédente.

**Exercice 5** Construire les courbes paramétrées suivantes :

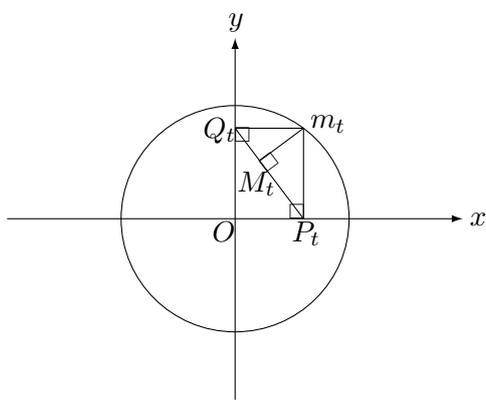
$$\text{a) } \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \\ y(t) = \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t-1} \end{cases}$$

**Exercice 6** Déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par le point  $M_t$  construit sur la figure ci-dessous lorsque le point  $m_t(\cos t, \sin t)$  décrit le cercle trigonométrique. Tracer cette courbe.



## Chapitre 2

# Équations différentielles

### 1 Introduction

De nombreux phénomènes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, économiques, etc. sont régis par des équations différentielles ou des systèmes différentiels.

Étudions par exemple la trajectoire dans l'air d'un obus de masse  $m$ , celui-ci étant propulsé à une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  sous un angle de tir  $\alpha$ .

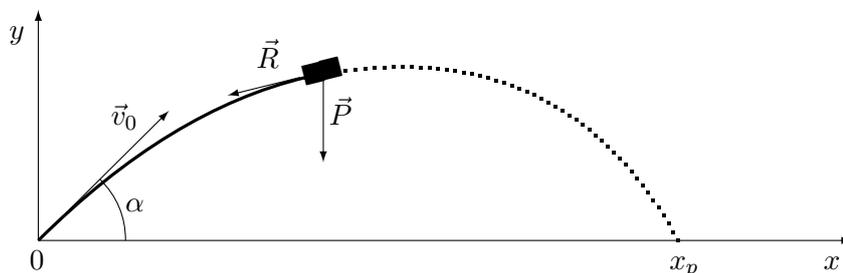


FIGURE 2.1 – Tir d'un obus

Le bilan des forces s'exerçant sur l'obus donne

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{R},$$

où  $\vec{P}$  est le poids de l'obus d'intensité  $mg$ ,  $g$  étant l'accélération de la pesanteur terrestre ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ),  $\vec{R}$  la résistance de l'air proportionnelle à la vitesse :  $\vec{R} = -k\vec{v}$ ,  $k$  étant le coefficient de frottement de l'air. L'équation fondamentale de la dynamique  $\vec{F} = m\vec{\gamma}$  fournit le système

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= -\frac{k}{m} \dot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) &= -g - \frac{k}{m} \dot{y}(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

C'est un système d'équations différentielles de type *linéaire du deuxième ordre* accompagné de conditions initiales. Dans le cas où la résistance de l'air est négligeable (on choisit  $k = 0$ ), ce

système différentiel se résout très simplement et la solution s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha) t \end{cases}$$

qui définit une courbe paramétrée. On en obtient une représentation cartésienne en éliminant le temps  $t$  :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x.$$

Dans ce cas, la trajectoire est parabolique. La portée du tir est le point d'impact au sol, il correspond à  $y = 0$ , c'est-à-dire

$$x_p = \frac{\sin(2\alpha) v_0^2}{g}.$$

La portée est maximale lorsque  $\sin(2\alpha) = 1$ , ce qui donne pour angle de tir  $\alpha = \pi/4$ . Remarquons que les angles de tir  $\alpha$  et  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  donnent la même portée.

## 2 Généralités

**Définition 2.1** Une équation différentielle est une relation fonctionnelle de la forme  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ ,  $x \in I$ , où  $F$  est une fonction numérique (i.e. à valeurs réelles ou complexes) de plusieurs variables et  $y$  est une fonction inconnue définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $n$  fois dérivable.

Les solutions s'appellent *courbes intégrales*. La résolution d'une telle équation est en général très difficile voire irréalisable explicitement, hormis quelques cas particuliers que l'on va étudier dans la suite. Le cas le plus simple est celui des équations linéaires pour lequel la fonction  $F$  est de la forme

$$F(x, y_0, y_1, \dots, y_n) = y_n + a_{n-1}(x)y_{n-1} + \dots + a_1(x)y_1 + a_0(x)y_0 - b(x)$$

qui conduit à l'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x). \quad (\text{E})$$

Dans de nombreux cas, une équation différentielle régit un phénomène physique, mécanique, biologique, etc. et s'accompagne de conditions initiales en un point  $x_0 \in I$  :

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, y''(x_0) = \alpha_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}. \quad (\text{CI})$$

L'équation (E) couplée avec les conditions (CI) s'appelle un *problème de Cauchy*. Sous certaines hypothèses, on démontre que ce problème admet une unique solution.

**Théorème 2.1 (Cauchy<sup>1</sup>-Lipschitz<sup>2</sup>)** Si les fonctions numériques  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et  $b$  sont continues sur  $I$ , alors le problème de Cauchy (E)-(CI) admet une unique solution qui est définie sur  $I$  tout entier.

On voit donc en se libérant des paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  que (E) admet une infinité de solutions dépendant de  $n$  paramètres : on appelle la forme analytique de ces solutions *solution générale de (E)*.

L'étude d'une équation linéaire se fait en deux temps :

— on commence par résoudre (si possible) l'équation homogène associée à (E) définie par

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0; \quad (\text{EH})$$

— on cherche ensuite une solution particulière de (E). C'est en général l'étape la plus délicate. La solution générale s'obtient enfin selon un principe de superposition très simple en ajoutant la solution générale de (EH) et une solution particulière de (E).

**Proposition 2.1 (Principes de superposition)** 1. Si  $y_H$  est la solution générale de (EH) et  $y_P$  une solution particulière de (E), alors  $y = y_H + y_P$  est la solution générale de (E).

2. Si le second membre de (E) est de la forme  $b = \sum_{i=1}^k b_i$  et si  $y_{P,i}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b_i(x), \quad (\text{E}_i)$$

alors  $y_P = \sum_{i=1}^k y_{P,i}$  est une solution particulière de (E).

Dans tout ce chapitre,  $I$  sera un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

### 3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On sait complètement résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre.

#### 3.1 Cas général

L'équation différentielle linéaire du premier ordre générale a pour forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad (\text{E})$$

$a$  et  $b$  étant des fonctions numériques. On supposera qu'elles sont par exemple à valeurs réelles. Le problème de Cauchy associé fait intervenir une condition initiale de la forme, en fixant un point  $x_0 \in I$ ,

$$y(x_0) = y_0. \quad (\text{CI})$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce dans ce contexte comme suit.

**Théorème 3.1 (Cauchy-Lipschitz)** Si les fonctions  $a$  et  $b$  sont continues sur  $I$ , alors le problème de Cauchy (E)–(CI) admet une unique solution qui est définie sur  $I$  tout entier.

1. Cauchy, Augustin Louis : mathématicien français (Paris 1789–Sceaux 1857)

2. Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund : mathématicien russe (Königsberg 1832–Bonn 1903)

La solution générale de (E) dépend donc d'un paramètre. L'équation homogène associée à (E) s'écrit ici

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0. \quad (\text{EH})$$

**Théorème 3.2** *La solution générale de (EH) est donnée par*

$$\forall x \in I, y_H(x) = \lambda e^{-\int_{x_0}^x a(y) dy}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si la solution  $y_H$  s'annule en un point  $x_0 \in I$ , alors  $y_H$  s'annule partout (la fonction nulle est une solution triviale de (EH) qui s'annule en particulier en  $x_0$  et par unicité d'une telle solution, on a  $y_H = 0$ ). Supposons donc que  $y$  ne soit pas la fonction nulle. On peut réécrire (EH) selon

$$\frac{y'_H(x)}{y_H(x)} = -a(x)$$

ou encore, en intégrant sur  $[x_0, x]$  et en posant  $A(x) = \int_{x_0}^x a(y) dy$ ,

$$\ln \left| \frac{y_H(x)}{y_H(x_0)} \right| = -A(x).$$

On a donc

$$y_H(x) = \varepsilon(x)y_H(x_0) e^{-A(x)}$$

la fonction  $\varepsilon$  étant une fonction « signe », c'est-à-dire à valeurs dans  $\{-1, +1\}$  telle que  $\varepsilon(x_0) = 1$ . En fait, comme  $\varepsilon(x) = y_H(x) e^{A(x)} / y_H(x_0)$ , cette fonction est continue sur  $I$ . Cela entraîne qu'elle est constante égale à  $+1$  ce qui prouve le résultat en posant  $\lambda = y_H(x_0)$ .  $\square$

On va à présent rechercher une solution particulière par une méthode appelée *méthode de la variation de la constante* ou *méthode de Lagrange*<sup>3</sup>. Celle-ci consiste à chercher une solution particulière de la forme, en s'inspirant de la solution générale de (EH),

$$y_P(x) = \lambda(x) e^{-\int_{x_0}^x a(y) dy}.$$

La fonction  $\lambda$  devient la nouvelle fonction inconnue. On a fait « varier la constante  $\lambda$  » figurant dans la solution générale (EH). En reportant  $y_P$  dans (E), on voit que  $\lambda$  vérifie

$$\lambda'(x) = b(x) e^{\int_{x_0}^x a(z) dz}$$

donc

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^x b(y) e^{\int_{x_0}^y a(z) dz} dy + \lambda(x_0),$$

ce qui fournit comme solution particulière

$$y_P(x) = e^{-\int_{x_0}^x a(z) dz} \int_{x_0}^x b(y) e^{\int_{x_0}^y a(z) dz} dy = \int_{x_0}^x b(y) e^{\int_x^y a(z) dz} dy.$$

3. Lagrange, comte Joseph-Louis de : mathématicien français (Turin 1736–Paris 1813)

**Théorème 3.3** La solution du problème de Cauchy (EH)–(CI) est donnée par

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x a(y) dy} + \int_{x_0}^x b(y) e^{\int_x^y a(z) dz} dy.$$

COMPLÉMENT : FACTEUR INTÉGRANT

Posons  $\tilde{A}(x) = e^{\int_{x_0}^x a(y) dy}$ . Du fait que  $\tilde{A}'(x) = a(x)\tilde{A}(x)$ , on peut écrire

$$(\tilde{A}y)'(x) = \tilde{A}(x)[y'(x) + a(x)y(x)].$$

La fonction  $\tilde{A}$  porte le nom de *facteur intégrant* de la différentielle  $dy + a dx$  : en multipliant cette dernière par  $\tilde{A}$ , on obtient une différentielle exacte (celle de  $\tilde{A}y$ ). La connaissance d'un facteur intégrant est très précieuse puisqu'un tel facteur permet de résoudre (E) à l'aide d'une simple intégration :

$$\begin{aligned} \text{(E)} \iff (\tilde{A}y)'(x) = (\tilde{A}b)(x) &\iff (\tilde{A}y)(x) = \int_{x_0}^x (\tilde{A}b)(y) dy + (\tilde{A}y)(x_0) \\ &\iff y(x) = \tilde{A}^{-1}(x) \left[ \int_{x_0}^x (\tilde{A}b)(y) dy + (\tilde{A}y)(x_0) \right]. \end{aligned}$$

EXEMPLES.

1. Considérons l'équation  $xy'(x) - y(x) = x^2 \cos x$ . En l'écrivant sous la forme  $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = x \cos x$ , on voit que l'étude doit se faire sur chacun des deux intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

— L'équation (EH) s'écrit  $xy'(x) - y(x) = 0$  et sa solution générale est donnée par  $y_H(x) = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

— Recherchons maintenant une solution particulière de la forme  $y_P(x) = \lambda(x)x$ . En reportant  $y_P$  dans (E), on trouve  $\lambda'(x) = \cos x$  ce qui donne  $\lambda(x) = \sin x$  puis  $y_P(x) = x \sin x$ . Il est inutile de traîner un constante dans  $\lambda(x)$  puisqu'on ne cherche ici qu'une solution particulière.

— Enfin, on récupère la solution générale de (E) par superposition  $y = y_H + y_P$ , soit :

$$y(x) = \begin{cases} x(\lambda + \sin x) & \text{si } x < 0 \\ x(\mu + \sin x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

À ce stade, on peut se poser la question de l'existence de solutions sur  $\mathbb{R}$  tout entier, c'est un problème de raccordement entre les solutions définies sur  $] -\infty, 0[$  et celles sur  $]0, +\infty[$ . Une solution de (E) définie sur  $\mathbb{R}$ , si elle existe, doit être bien sûr de la forme précédente sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ , mais doit être également dérivable en 0. Cette condition implique

—  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$  pour pouvoir prolonger la fonction  $y$ , qui est définie *a priori* sur  $] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ , par continuité en 0 ;

— puis  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x}$ , c'est-à-dire  $\lambda = \mu$ , pour assurer la dérivabilité en 0 du prolongement précédent de  $y$ .

D'où la solution générale de (E) sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = x(\lambda + \sin x), \lambda \in \mathbb{R};$$

elle dépend d'un paramètre.

2. Le cas de l'équation  $xy'(x) - 2y(x) = x^3 \cos x$  se traite de manière analogue.
- La solution générale de (EH) est donnée par  $y_H(x) = \lambda x^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - Une solution particulière est de la forme  $y_P(x) = \lambda(x)x^2$ . On a  $\lambda'(x) = \cos x$  donc  $\lambda(x) = \sin x$  puis  $y_P(x) = x^2 \sin x$ .
  - Enfin, la solution générale de (E) est donnée par

$$y(x) = \begin{cases} x^2(\lambda + \sin x) & \text{si } x < 0 \\ x^2(\mu + \sin x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le problème du raccordement entre les solutions définies sur  $] -\infty, 0[$  et celles sur  $]0, +\infty[$  se pose de nouveau. Ici les fonctions  $y$  admettent toutes des dérivées à droite et à gauche nulles en 0. On a donc obtenu la solution générale sur  $\mathbb{R}$  tout entier sans condition, elle dépend cette fois de deux paramètres.

3. L'étude de l'équation  $(x-1)y'(x) + y(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$  est similaire aux deux cas précédents.

- La solution de (EH) générale sur chacun des intervalles  $] -\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$  est donnée par  $y_H(x) = \frac{\lambda}{x-1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Une solution particulière est de la forme  $y_P(x) = \frac{\lambda(x)}{x-1}$ . On a  $\lambda'(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1} = x - \frac{x-1}{x^2+1}$  donc  $\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x$ , puis

$$y_P(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{\ln(x^2+1)}{x-1} + \frac{\arctan x}{x-1}.$$

- La solution générale de (E) est alors donnée par

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{\ln(x^2+1)}{x-1} + \frac{\arctan x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\mu}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{\ln(x^2+1)}{x-1} + \frac{\arctan x}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On est encore confronté à un problème de raccordement entre les solutions définies sur  $] -\infty, 1[$  et celles sur  $]1, +\infty[$ . Afin de déceler une éventuelle solution de (E) définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, on est amené à étudier les limites

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \left[ \frac{k}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{\ln(x^2+1)}{x-1} + \frac{\arctan x}{x-1} \right].$$

Pour ce faire, on effectue un développement limité de la fonction précédente au voisinage de 1. Posons  $\varepsilon = x - 1$ . On a

$$\begin{aligned} \ln(1 + (1 + \varepsilon)^2) &= \ln 2 + \varepsilon + o(\varepsilon^2), \\ \arctan(1 + \varepsilon) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} \left[ k + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)^2 - \frac{1}{2} \ln(1 + (1 + \varepsilon)^2) + \arctan(1 + \varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \left( k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) + \varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right] \\ &= \left( k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{\varepsilon} + 1 + \frac{1}{4}\varepsilon + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

La limite en question existe si et seulement si  $k = k_0 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ . On en conclut que si l'équation (E) admet une solution définie sur  $\mathbb{R}$ , elle correspond nécessairement au choix de paramètres  $\lambda = \mu = k_0$  :

$$y(x) = \left( \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{\ln(x^2+1)}{x-1} + \frac{\arctan x}{x-1} \text{ si } x \neq 1, \quad y(1) = 1.$$

Le développement limité ci-dessus révèle qu'avec ce choix la fonction est non seulement continue en 1 (de valeur 1), mais aussi dérivable en 1 (de dérivée  $1/4$ ). La fonction ainsi définie est donc l'unique solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ . Dans la figure 2.2, on a représenté plusieurs courbes intégrales de (E) sur chacun des intervalles  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$ , ainsi que la courbe intégrale sur  $\mathbb{R}$ .

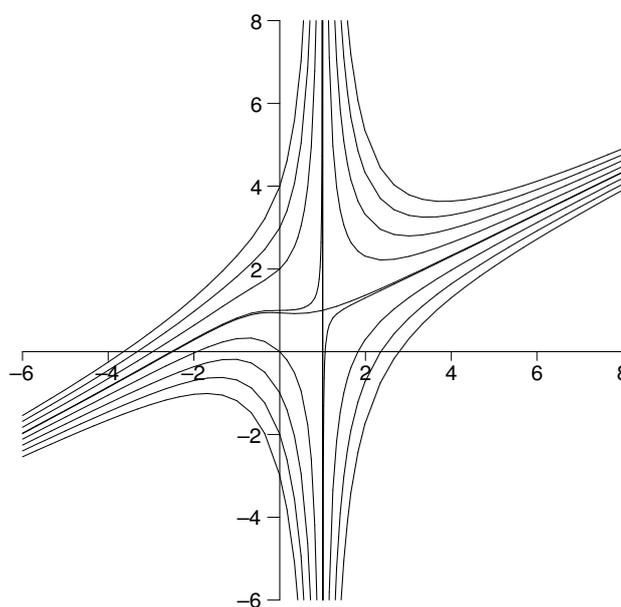


FIGURE 2.2 – Courbes intégrales de  $(x-1)y'(x) + y(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

### 3.2 Cas $a$ constant

Examinons à présent le cas où la fonction  $a$  est constante. L'équation s'écrit

$$y'(x) + ay(x) = b(x). \quad (\text{E})$$

L'étude précédente nous enseigne que la solution générale de (EH) est donnée par

$$y_H(x) = \lambda e^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et la solution du problème de Cauchy (EH)–(CI) par

$$y(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)} + \int_{x_0}^x b(y) e^{-a(x-y)} dy.$$

EXEMPLE.

Reprenons l'exemple du tir d'un obus décrit dans l'introduction de ce chapitre. On tient compte à présent de la résistance de l'air et l'on pose  $a = k/m (> 0)$  ( $m$  étant la masse de l'obus et  $k$  le coefficient de frottement de l'air). La trajectoire de l'obus est solution du système différentiel

$$\begin{cases} x''(t) = -ax'(t) \\ y''(t) = -ay'(t) - g \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = v_0 \cos \alpha, \quad y'(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Les fonctions  $x'$  et  $y'$  sont donc solutions d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. On a explicitement

$$\begin{cases} x'(t) = (v_0 \cos \alpha) e^{-at} \\ y'(t) = \left( v_0 \sin \alpha + \frac{g}{a} \right) e^{-at} - \frac{g}{a} \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0 \cos \alpha}{a} (1 - e^{-at}), \\ y(t) = \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{a} + \frac{g}{a^2} \right) (1 - e^{-at}) - \frac{gt}{a}. \end{cases}$$

On a ainsi trouvé une représentation paramétrique de la trajectoire de l'obus. Une représentation cartésienne peut être obtenue en éliminant le paramètre  $t$ . La première équation fournit  $t = -\frac{1}{a} \ln \left( 1 - \frac{a}{v_0 \cos \alpha} x(t) \right)$  que l'on reporte dans la deuxième. Cela donne

$$y = \left( \tan \alpha + \frac{g}{av_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{g}{a^2} \ln \left( 1 - \frac{ax}{v_0 \cos \alpha} \right).$$

La portée du tir est le point d'impact  $x_p$  de l'obus au sol. Ce point vérifie l'équation

$$\left( \tan \alpha + \frac{g}{av_0 \cos \alpha} \right) x_p + \frac{g}{a^2} \ln \left( 1 - \frac{ax_p}{v_0 \cos \alpha} \right) = 0$$

que l'on ne peut pas résoudre explicitement.

On prête une attention toute particulière au cas d'un second membre de type polynôme-exponentielle  $b(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$ . Dans ce cas, une solution particulière est fournie par

$$y_p(x) = e^{-\alpha x} \int_{x_0}^x P_n(y) e^{(\alpha+\alpha)y} dy.$$

Le lemme suivant indique la forme d'une primitive d'une fonction de type polynôme-exponentielle.

**Lemme 3.1** *On a, à une constante additive près,*

$$\int P_n(x) e^{\beta x} dx = \begin{cases} Q_n(x) e^{\beta x} & \text{si } \beta \neq 0 \\ Q_{n+1}(x) & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

où  $Q_n$  et  $Q_{n+1}$  sont des polynômes de degrés respectifs  $n$  et  $n+1$ . Les termes de plus haut degré de  $Q_n$  et  $Q_{n+1}$  sont respectivement ceux de  $\frac{1}{\beta} P_n(x)$  et  $\frac{1}{n+1} x P_{n+1}(x)$ .

DÉMONSTRATION.

En intégrant plusieurs fois par parties, on obtient dans le cas où  $\beta \neq 0$ , puisque  $P_n^{(n+1)} = 0$ ,

$$\int P_n(x) e^{\beta x} dx = \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{P_n^{(i)}(x)}{\beta^{i+1}} \right) e^{\beta x}$$

qui est bien sûr de la forme  $Q_n(x) e^{\beta x}$ . Le terme de plus haut degré est contenu dans le terme d'indice  $i = 0$  de la somme précédente. Le cas  $\beta = 0$  est trivial.  $\square$

D'où la règle suivante.

**Proposition 3.1** *L'équation (E) admet une solution particulière de la forme*

$$y_P(x) = \begin{cases} Q_n(x) e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \neq -a, \\ Q_{n+1}(x) e^{-ax} & \text{si } \alpha = -a. \end{cases}$$

où  $Q_n$  et  $Q_{n+1}$  sont des polynômes de degrés respectifs  $n$  et  $n + 1$ .

REMARQUE.

Dans le cas où  $\alpha = -a$ , on peut se limiter à rechercher une solution particulière de la forme  $y_P(x) = xQ_n(x) e^{-ax}$ . En effet, on peut écrire  $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + c$  où  $c$  est une constante et alors  $Q_{n+1}(x) e^{-ax} = xQ_n(x) e^{-ax} + c e^{-ax}$ . La fonction  $x \mapsto c e^{-ax}$  étant une solution de (EH), elle se retrouvera dans la solution générale de (E) après superposition et il est donc inutile de la traîner dans  $y_P$ . En fait,  $Q_{n+1}$  est une primitive de  $P_n$ . Cela dit, la remarque s'appliquera au cas du second ordre.

EXEMPLE.

Soit (E) :  $y'(x) - 2y(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{\alpha x}$  où  $A, B, C$  et  $\alpha$  sont des paramètres réels fixés. La solution générale de l'équation homogène associée est  $y_H = \lambda e^{2x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

— Si  $\alpha \neq 2$ , on cherche une solution particulière de la forme  $y_P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{\alpha x}$ . On a

$$y'_P(x) - 2y_P(x) = [(\alpha - 2)a x^2 + (2a + (\alpha - 2)b)x + (b + (\alpha - 2)c)] e^{\alpha x}$$

et par identification on obtient le système triangulaire

$$\begin{cases} (\alpha - 2)a & = A \\ 2a + (\alpha - 2)b & = B \\ b + (\alpha - 2)c & = C \end{cases}$$

qui se résout sans difficulté :

$$a = \frac{A}{\alpha - 2}, \quad b = \frac{B}{\alpha - 2} - \frac{2A}{(\alpha - 2)^2}, \quad c = \frac{C}{\alpha - 2} - \frac{B}{(\alpha - 2)^2} + \frac{2A}{(\alpha - 2)^3}.$$

— Si  $\alpha = 2$ , on cherche une solution particulière de la forme  $y_P(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^{2x}$ . On a

$$y'_P(x) - 2y_P(x) = (3ax^2 + 2bx + c) e^{2x}$$

et par identification on trouve immédiatement

$$a = \frac{A}{3}, \quad b = \frac{B}{2}, \quad c = C.$$

## 4 Équations différentielles linéaires du second ordre

### 4.1 Cas général

L'équation différentielle linéaire du second ordre générale a pour forme

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x). \quad (\text{E})$$

Le problème de Cauchy associé fait intervenir deux conditions initiales en un point  $x_0 \in I$  de la forme

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \quad (\text{CI})$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce dans ce contexte comme suit.

**Théorème 4.1 (Cauchy-Lipschitz)** *Si les fonctions  $a, b, c$  sont continues sur  $I$ , alors le problème de Cauchy (E)–(CI) admet une unique solution qui est définie sur  $I$  tout entier.*

La solution générale de (E) dépend donc de deux paramètres. L'équation homogène associée à (E) s'écrit

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \quad (\text{EH})$$

La résolution explicite de (EH) est en général difficile voire impossible, excepté dans quelques cas particuliers.

La *méthode de l'abaissement de l'ordre* permet de résoudre explicitement (E) lorsqu'on connaît une solution particulière  $y_p$ . Cela peut se faire en effectuant le changement de fonction inconnue  $y = y_p z$ . On voit que  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$y_p z''(x) + [2a(x)y_p'(x) + b(x)y_p(x)]z'(x) = c(x).$$

C'est une équation linéaire du premier ordre par rapport à la fonction  $z'$  que l'on sait résoudre explicitement.

EXEMPLE.

Soit l'équation (E) :  $x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = 2x$ ,  $x \in ]0, +\infty[$ . On remarque que la fonction  $x \mapsto x$  est une solution particulière de (EH). Posons donc  $y(x) = xz(x)$ . La nouvelle fonction inconnue  $z$  vérifie (E') :  $x^2 z''(x) + 3xz'(x) = 2$ .

— L'équation homogène associée (E') est (EH') :  $xz''(x) + 3z'(x) = 0$  et sa solution générale est  $z'_H(x) = \frac{\lambda}{x^3}$ .

— Cherchons une solution particulière de (E') par la méthode de la variation de la constante : on pose  $z'_P(x) = \frac{\lambda(x)}{x^3}$ . La fonction  $\lambda$  est solution de  $\lambda'(x) = 2x$  donc  $\lambda(x) = x^2$  ce qui fournit  $z'_P(x) = \frac{1}{x}$ .

— On a alors  $z'(x) = \frac{\lambda}{x^3} + \frac{1}{x}$ , puis  $z(x) = \frac{\mu}{x^2} + \ln x + \nu$  et enfin  $y(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x} + x \ln x$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

## 4.2 Cas $a$ et $b$ constants

Le cas où les fonctions  $a$  et  $b$  sont constantes est un des rares cas où l'on sait complètement résoudre l'équation (E) qui s'écrit ici

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x). \quad (\text{E})$$

Les constantes  $a$  et  $b$  seront supposées être complexes.

### 4.2.1 Équation homogène associée

L'équation homogène associée à (E) est

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0. \quad (\text{EH})$$

Par analogie avec le premier ordre, on commence par chercher des solutions particulières de la forme  $y(x) = e^{rx}$ . En reportant dans (EH), on voit que  $r$  est solution de l'équation algébrique appelée *équation caractéristique*

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} \quad (\text{EC})$$

Soit  $r_1$  et  $r_2$  les racines (distinctes ou confondues) de (EC) dans  $\mathbb{C}$ . Appliquons la méthode de l'abaissement de l'ordre : on pose  $y(x) = e^{r_1 x} z(x)$ . En reportant dans (EH), on trouve

$$z''(x) + (2r_1 + a)z'(x) + (r_1^2 + ar_1 + b)z(x) = 0$$

soit encore

$$z''(x) + (r_1 - r_2)z'(x) = 0$$

puisque  $r_1^2 + ar_1 + b = 0$  et  $r_1 + r_2 = -a$ .

— Si  $r_1 \neq r_2$ , on a

$$z'(x) = \nu e^{(r_2 - r_1)x}, \quad \nu \in \mathbb{C},$$

puis

$$z(x) = \frac{\nu}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + \lambda, \quad \lambda, \nu \in \mathbb{C},$$

et enfin, en posant  $\frac{\nu}{r_2 - r_1} = \mu$ ,

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}.$$

— Si  $r_1 = r_2$ , on a  $z''(x) = 0$  donc  $z'(x) = \lambda$ , puis  $z(x) = \lambda x + \mu$  et enfin

$$y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_1 x}.$$

Dans le cas particulier où les coefficients  $a$  et  $b$  sont réels et les racines de (EC) sont des complexes non réels,  $r_1$  et  $r_2$  sont conjugués :  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$  et l'on peut écrire

$$y(x) = e^{\alpha x} [\lambda(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + \mu(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))] = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$$

où l'on a posé

$$A = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad B = (\lambda - \mu)i.$$

Pour que la solution soit réelle, il est nécessaire que  $y(0)$  et  $y'(0)$  soient réels et donc que  $A, B \in \mathbb{R}$ . En résumé, on a le résultat suivant.

**Théorème 4.2** Soit  $\Delta = a^2 - 4b$  le discriminant de l'équation (EC) :  $r^2 + ar + b = 0$ .

1. Si  $\Delta \neq 0$ , (EC) admet dans  $\mathbb{C}$  deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  et la solution générale de (EH) sur  $\mathbb{C}$  est donnée par

$$y_H(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Lorsque  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\Delta < 0$ , les racines  $r_1$  et  $r_2$  s'écrivent  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}^*$ . La solution générale de (EH) sur  $\mathbb{R}$  est donnée par

$$y_H(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. Si  $\Delta = 0$ , (EC) admet dans  $\mathbb{C}$  une racine double  $r = -\frac{a}{2}$  et la solution générale de (EH) sur  $\mathbb{C}$  est donnée par

$$y_H(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

#### 4.2.2 Solution particulière

Pour chercher une solution particulière de (E), on dispose de deux méthodes :

- la méthode générale de l'abaissement de l'ordre. On trouve une solution particulière de (E) à partir d'une solution particulière  $y_p$  de (EH), comme cela a déjà été fait dans le cas général ;
- la méthode de la variation des constantes (méthode de Lagrange) similaire à celle décrite dans le cas du premier ordre. Posons  $e_1(x) = e^{r_1 x}$  et  $e_2(x) = e^{r_2 x}$  lorsque  $\Delta \neq 0$ ,  $e_1(x) = x e^{rx}$  et  $e_2(x) = e^{rx}$  lorsque  $\Delta = 0$ . On recherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = \lambda(x) e_1(x) + \mu(x) e_2(x).$$

Les fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux fonctions inconnues. On a fait « varier les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  » figurant dans la solution générale de (EH). On va essayer de trouver un système de deux équations vérifiées par  $\lambda$  et  $\mu$ . On a d'abord

$$y_p'(x) = \lambda'(x) e_1(x) + \mu'(x) e_2(x) + \lambda(x) e_1'(x) + \mu(x) e_2'(x).$$

Afin de simplifier  $y_p'(x)$  ainsi que le calcul de  $y_p''(x)$  à venir, on impose la condition *a priori*

$$\lambda'(x) e_1(x) + \mu'(x) e_2(x) = 0.$$

Sous cette condition, on a

$$y_p'(x) = \lambda(x) e_1'(x) + \mu(x) e_2'(x),$$

puis

$$y_p''(x) = \lambda'(x) e_1'(x) + \mu'(x) e_2'(x) + \lambda(x) e_1''(x) + \mu(x) e_2''(x).$$

Reportons tout ceci dans (E) : on trouve après simplifications

$$\lambda'(x) e_1'(x) + \mu'(x) e_2'(x) = c(x).$$

On a ainsi obtenu le système différentiel

$$\begin{cases} \lambda'(x)e_1(x) + \mu'(x)e_2(x) = 0 \\ \lambda'(x)e_1'(x) + \mu'(x)e_2'(x) = c(x) \end{cases}$$

qui se résout très simplement, en posant  $W(x) = e_1(x)e_2'(x) - e_1'(x)e_2(x)$ ,

$$\begin{cases} \lambda'(x) = -\frac{e_2(x)c(x)}{W(x)}, \\ \mu'(x) = \frac{e_1(x)c(x)}{W(x)}. \end{cases}$$

La fonction  $W$  s'appelle *Wronskien*<sup>4</sup> des fonctions  $e_1$  et  $e_2$ ; ici cette fonction vaut

$$W(x) = \begin{cases} (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} & \text{si } \Delta \neq 0, \\ -e^{2rx} & \text{si } \Delta = 0. \end{cases}$$

- Dans le cas  $\Delta \neq 0$  :

$$\begin{cases} \lambda'(x) = -\frac{c(x)}{r_2 - r_1} e^{-r_1x} \\ \mu'(x) = \frac{c(x)}{r_2 - r_1} e^{-r_2x} \end{cases}$$

ce qui donne, sans se soucier de constante d'intégration,

$$\begin{cases} \lambda(x) = -\int_{x_0}^x \frac{c(y)}{r_2 - r_1} e^{-r_1y} dy, \\ \mu(x) = \int_{x_0}^x \frac{c(y)}{r_2 - r_1} e^{-r_2y} dy. \end{cases}$$

- Dans le cas  $\Delta = 0$  :

$$\begin{cases} \lambda'(x) = c(x)e^{-rx} \\ \mu'(x) = -c(x)xe^{-rx} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \lambda(x) = \int_{x_0}^x c(y)e^{-ry} dy, \\ \mu(x) = -\int_{x_0}^x c(y)ye^{-ry} dy. \end{cases}$$

Par conséquent, en posant  $y_P(x) = \lambda(x)e_1(x) + \mu(x)e_2(x)$ , on a obtenu une solution particulière de (E).

**Théorème 4.3** Une solution particulière de (E) est donnée par

$$y_P(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x c(y) \frac{e^{r_2(x-y)} - e^{r_1(x-y)}}{r_2 - r_1} dy & \text{si } \Delta \neq 0, \\ \int_{x_0}^x c(y)(x-y)e^{r(x-y)} dy & \text{si } \Delta = 0. \end{cases}$$

4. Wronski, Josef Hoëné de : mathématicien polonais (Wolsztyn 1778–Neuilly-sur-Seine 1853)

### 4.2.3 Second membre de type polynôme-exponentielle

Comme pour les équations du premier ordre, un cas intéressant concerne un second membre de type polynôme-exponentielle  $c(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$ , où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

L'étude de cette situation peut se mener comme suit.

— Cas  $\Delta \neq 0$  : la solution  $y_P$  s'écrit

$$y_P(x) = \frac{1}{r_2 - r_1} \left[ e^{r_2 x} \int_{x_0}^x P_n(y) e^{(\alpha - r_2)y} dy - e^{r_1 x} \int_{x_0}^x P_n(y) e^{(\alpha - r_1)y} dy \right]$$

Or, on sait d'après le lemme 3.1 que

$$\int_{x_0}^x P_n(y) e^{(\alpha - r_1)y} dy = Q^1(x) e^{(\alpha - r_1)x} \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^x P_n(y) e^{(\alpha - r_2)y} dy = Q^2(x) e^{(\alpha - r_2)x}$$

où  $Q^1$  et  $Q^2$  sont des polynômes

- de degré  $n$  si  $\alpha \notin \{r_1, r_2\}$  et de termes de plus haut degré ceux de  $\frac{1}{\alpha - r_1} P_n(x)$  et  $\frac{1}{\alpha - r_2} P_n(x)$ ;
- de degré  $n + 1$  si  $\alpha \in \{r_1, r_2\}$  et de termes de plus haut degré ceux de  $\frac{1}{n + 1} x P_n(x)$  et  $\frac{1}{\alpha - r} P_n(x)$  lorsque par exemple  $\alpha = r_1$ ;

on a alors

$$y_P(x) = \frac{1}{r_2 - r_1} (Q^2(x) - Q^1(x)) e^{\alpha x}$$

qui est de la forme  $Q(x) e^{\alpha x}$ . Le terme de plus haut degré de  $Q$  est

- celui de  $\frac{1}{(\alpha - r_1)(\alpha - r_2)} P_n(x)$  si  $\alpha \notin \{r_1, r_2\}$ ;
- celui de  $\frac{1}{(n + 1)(r_1 - r_2)} x P_n(x)$  si  $\alpha = r_1$ ;
- celui de  $\frac{1}{(n + 1)(r_2 - r_1)} x P_n(x)$  si  $\alpha = r_2$ .

Donc  $Q$  a pour degré  $n$  si  $\alpha \notin \{r_1, r_2\}$  et  $n + 1$  si  $\alpha \in \{r_1, r_2\}$ .

— Cas  $\Delta = 0$  : la solution  $y_P$  s'écrit cette fois

$$y_P(x) = x e^{r x} \int_{x_0}^x P_n(y) e^{(\alpha - r)y} dy - e^{r x} \int_{x_0}^x y P_n(y) e^{(\alpha - r)y} dy.$$

Or, comme précédemment,

$$\int_{x_0}^x P_n(y) e^{(\alpha - r)y} dy = Q^1(x) e^{(\alpha - r)x} \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^x y P_n(y) e^{(\alpha - r)y} dy = Q^2(x) e^{(\alpha - r)x}$$

où  $Q^1$  et  $Q^2$  sont des polynômes

- de degrés respectifs  $n$  et  $n + 1$  si  $\alpha \neq r$  et de termes de plus haut degré ceux de  $\frac{1}{\alpha - r} P_n(x) - \frac{1}{(\alpha - r)^2} P_n'(x)$  et  $\frac{1}{\alpha - r} x P_n(x) - \frac{1}{(\alpha - r)^2} (x P_n'(x) + P_n(x))$ ;
- de degrés respectifs  $n + 1$  et  $n + 2$  si  $\alpha = r$  et de termes de plus haut degré ceux de  $\frac{1}{n + 1} x P_n(x)$  et  $\frac{1}{n + 2} x^2 P_n(x)$ ;

on a alors

$$y_P(x) = (x Q^1(x) - Q^2(x)) e^{\alpha x}$$

qui est de la forme  $Q(x) e^{\alpha x}$ . Le terme de plus haut degré de  $Q$  est celui de  $\frac{1}{(\alpha - r)^2} P_n(x)$  si  $\alpha \neq r$  et celui de  $\frac{1}{(n + 1)(n + 2)} x^2 P_n(x)$  si  $\alpha = r$ . Donc  $Q$  a pour degré  $n$  si  $\alpha \neq r$  et  $n + 2$  si  $\alpha = r$ .

D'où la règle suivante.

**Proposition 4.1** (E) admet une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = \begin{cases} Q_n(x) e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de (EC),} \\ Q_{n+1}(x) e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ est une racine simple de (EC),} \\ Q_{n+2}(x) e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ est une racine double de (EC).} \end{cases}$$

où  $Q_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}$  sont des polynômes de degrés respectifs  $n, n+1, n+2$ .

REMARQUE.

Comme cela a été signalé dans le cas du premier ordre, lorsque  $\alpha$  est une racine simple de (EC), on peut se limiter à rechercher une solution particulière de la forme  $y_p(x) = xQ_n(x) e^{\alpha x}$ , et lorsque  $\alpha$  est une racine double de (EC), on peut se limiter à  $y_p(x) = x^2Q_n(x) e^{\alpha x}$ .

EXEMPLE.

*Circuit électrique de type RLC*

On considère un circuit *RLC* où les résistance  $R$ , inductance  $L$  et capacité  $C$  sont des nombres réels tels que  $R \geq 0$  et  $L, C > 0$ .

1. *Décharge d'un condensateur et d'une inductance dans une résistance* : notons  $U$  la tension,  $Q$  la charge électrique et  $I$  l'intensité du courant traversant le circuit (voir Fig. 2.3). Les

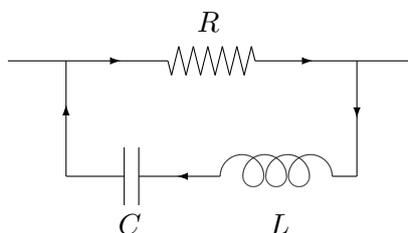


FIGURE 2.3 – Circuit *RLC*

lois de l'électrostatique (lois d'Ohm<sup>5</sup> et de Faraday<sup>6</sup>) s'écrivent

$$U_R = RI = RQ', \quad U_C = \frac{Q}{C}, \quad U_L = LI' = LQ'' \quad \text{et} \quad U_R + U_C + U_L = 0.$$

Elles conduisent à l'équation différentielle homogène

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0 \quad (\text{EH})$$

d'équation caractéristique

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0 \quad (\text{EC})$$

5. Ohm, Georg Simon : physicien allemand (Erlangen 1789–Munich 1854)

6. Faraday, Michael : physicien anglais (Newington Butts 1791–Hampton Court 1867)

avec conditions initiales

$$Q(0) = q, I(0) = Q'(0) = 0, \quad (\text{CI})$$

$q$  étant la charge initiale du condensateur. Notons  $r_1$  et  $r_2$  les racines de (EC),  $\Delta = R^2 - 4L/C$  son discriminant et posons  $\delta = \sqrt{|\Delta|}$ . On a

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-R - \delta}{2L}, \quad r_2 = \frac{-R + \delta}{2L} & \text{si } \Delta > 0, \\ r_1 &= \frac{-R - i\delta}{2L}, \quad r_2 = \frac{-R + i\delta}{2L} & \text{si } \Delta < 0, \\ r_1 &= r_2 = -\frac{R}{2L} & \text{si } \Delta = 0. \end{aligned}$$

La solution générale  $Q_H$  de (EH) sur  $\mathbb{R}$  s'écrit

$$Q_H(t) = \begin{cases} \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} & \text{si } 4 \frac{L}{C} < R^2, \\ e^{-Rt/(2L)} \left[ \lambda \cos\left(\frac{\delta t}{2L}\right) + \mu \sin\left(\frac{\delta t}{2L}\right) \right] & \text{si } 4 \frac{L}{C} > R^2, \\ (\lambda t + \mu) e^{-Rt/(2L)} & \text{si } 4 \frac{L}{C} = R^2. \end{cases}$$

En tenant compte des conditions initiales (CI), la solution est

$$Q_H(t) = \begin{cases} q \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} & \text{si } 4 \frac{L}{C} < R^2, \\ q e^{-Rt/(2L)} \left[ \cos\left(\frac{\delta t}{2L}\right) + \frac{R}{\delta} \sin\left(\frac{\delta t}{2L}\right) \right] & \text{si } 4 \frac{L}{C} > R^2, \\ q \left( \frac{R}{2L} t + 1 \right) e^{-Rt/(2L)} & \text{si } 4 \frac{L}{C} = R^2. \end{cases}$$

- Si  $R \neq 0$ , on note que lorsque  $\Delta \geq 0$ , les racines de (EC) sont strictement négatives, et que lorsque  $\Delta < 0$ , les racines de (EC) sont complexes de parties réelles strictement négatives. Ceci montre que dans tous les cas  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_H(t) = 0$ , ce qui signifie que le courant est amorti.
- Si  $R = 0$ , on a  $Q_H(t) = q \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$  et cette fois le courant est entretenu périodique.

2. *Circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale* : considérons à présent un circuit *RLC* soumis à une tension sinusoïdale  $U$  de pulsation  $\omega$  (voir Fig. 2.4). Les lois d'Ohm s'écrivent

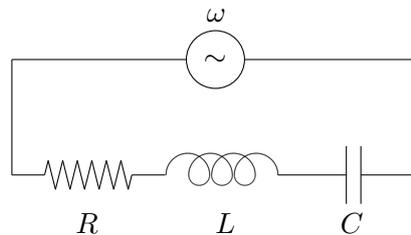


FIGURE 2.4 – Circuit *RLC* avec source sinusoïdale

$$U_R = RI = RQ', \quad U_C = \frac{Q}{C}, \quad U_L = LI' = LQ'' \quad \text{et} \quad U = U_R + U_C + U_L.$$

Elles conduisent à l'équation différentielle

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = u \cos \omega t \quad (\text{E})$$

d'équation différentielle homogène l'équation (EH) précédente. Rajoutons également des conditions initiales

$$Q(0) = Q'(0) = 0. \quad (\text{CI})$$

Remarquons que le second membre peut s'écrire  $u \cos(\omega t) = \frac{u}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$  et que (EC) n'a pas de racine imaginaire pure (*i.e.*  $i\omega$  n'est pas racine de (EC)) lorsque  $R \neq 0$ .

— Si  $R \neq 0$ , on est amené à rechercher une solution particulière de la forme

$$Q_P(t) = a e^{i\omega t} + \bar{a} e^{-i\omega t}.$$

On trouve

$$a = \frac{Cu}{2[(1 - LC\omega^2) + iRC\omega]}$$

puis

$$Q_P(t) = Cu \frac{(1 - LC\omega^2) \cos \omega t + RC\omega \sin \omega t}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}.$$

— Si  $R = 0$ , on a  $\delta = 2\sqrt{L/C}$  et les racines de (EC) sont  $r_1 = -\frac{i}{\sqrt{LC}}$  et  $r_2 = \frac{i}{\sqrt{LC}}$ .

Deux cas sont à distinguer :

- si  $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , la solution  $Q_P$  se simplifie selon

$$Q_P(t) = Cu \frac{\cos \omega t}{1 - LC\omega^2}$$

et la solution de (E)–(CI) est donnée par

$$Q(t) = \frac{Cu}{1 - LC\omega^2} \left( \cos \omega t - \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \right);$$

- si  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , condition qui s'écrit encore

$$LC\omega^2 = 1,$$

on doit rechercher cette fois une solution particulière de la forme

$$Q_P(t) = at e^{i\omega t} + \bar{a}t e^{-i\omega t}.$$

On obtient

$$a = -\frac{i u}{4L\omega}$$

et alors, en tenant compte des conditions initiales (CI), on voit que  $Q_P(t) = Q(t)$  avec

$$Q(t) = \frac{ut \sin \omega t}{2L\omega}.$$

Le courant est amplifié : il y a *résonance*.

COMPLÉMENT : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE  $n$  À COEFFICIENTS CONSTANTS.

La résolution de l'équation homogène

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad (\text{EH})$$

s'effectue à l'aide de l'équation caractéristique

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0. \quad (\text{EC})$$

Si  $r_1, r_2, \dots, r_p$  ( $p \leq n$ ) sont les racines distinctes de (EC) dans  $\mathbb{C}$  de multiplicités respectives  $n_1, n_2, \dots, n_p$  ( $n_1 + \cdots + n_p = n$ ), la solution générale de (EH) est donnée par

$$y_H(x) = \sum_{k=1}^p P_k(x)e^{r_k x},$$

les  $P_k$  étant des polynômes de degré au plus  $n_k - 1$ . Puis la recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x) \quad (\text{E})$$

s'entreprend à l'aide d'une méthode de variation des constantes en posant

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)e_i(x).$$

Les  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont des solutions de (EH) de la forme  $x \mapsto x^j e^{r_k x}$ ,  $0 \leq j \leq n_k - 1$ , indépendantes et les  $\lambda_i$  sont des fonctions inconnues. On trouve un système de  $n$  équations vérifiées par les  $\lambda_i$  en imposant les  $n - 1$  conditions *a priori*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i'(x)e_i^{(j)}(x) = 0, \quad 0 \leq j \leq n - 2,$$

qui permettent de simplifier le calcul de  $y'(x), y''(x), \dots$ . L'équation (E) devient enfin

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i'(x)e_i^{(n-1)}(x) = b(x),$$

qui fournit la  $n^{\text{e}}$  équation du système différentiel recherché, système que l'on peut résoudre effectivement.

## 5 Autres équations

Voici quelques autres types d'équations différentielles se ramenant à des équations linéaires, excepté le dernier type. Signalons que l'on sait résoudre explicitement encore un certain nombre d'équations différentielles, et qu'à défaut de solutions explicites, on dispose également de nombreuses méthodes de résolution numérique.

### 5.1 Équation d'Euler

L'équation d'Euler<sup>7</sup> est une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont les fonctions puissances successives :

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1xy'(x) + a_0y(x) = b(x). \quad (\text{E})$$

---

7. Euler, Leonhard : mathématicien suisse (Bâle 1707–Saint-Pétersbourg 1783)

Cette équation se résout séparément sur chacun des deux intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  en effectuant respectivement les changements de variable  $x = -e^t$  et  $x = e^t$ ,  $t \in ]0, +\infty[$ . Les deux formules donnent réciproquement  $t = \ln |x|$ . Posons alors  $y(x) = z(t)$ ,  $z$  devient la nouvelle fonction inconnue. Calculons les premières dérivées de  $y(x) = z(\ln |x|)$  :

$$y'(x) = \frac{z'(t)}{x}, \quad y''(x) = \frac{z''(t) - z'(t)}{x^2}, \quad y'''(x) = \frac{z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)}{x^3}, \dots$$

On voit que

$$xy'(x) = z'(t), \quad x^2y''(x) = z''(t) - z'(t), \quad x^3y'''(x) = z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t), \dots$$

Ces changements de variables ramènent ainsi l'équation (E) à une équation linéaire d'ordre  $n$  à coefficients constants que l'on sait explicitement résoudre.

On peut démontrer par récurrence que

$$x^n y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} z^{(i)}(t),$$

les  $a_{i,n}$  étant les coefficients du polynôme  $\prod_{k=1}^n (x-k) = \sum_{i=0}^n a_{i,n} x^i$ . En particulier,  $a_{n,n} = 1$  et  $a_{0,n} = (-1)^{n-1} (n-1)!$ .

La solution générale de l'équation homogène associée à (E) est une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $x \mapsto |x|^r (\ln |x|)^s$ ; les réels ou complexes  $r$  sont racines d'une équation caractéristique associée à (E) :

$$r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) + a_{n-1}r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2) + \dots + a_2r(r-1) + a_1r + a_0 = 0 \quad (\text{EC})$$

et les entiers naturels  $s$  sont strictement inférieurs à la multiplicité de  $r$  dans (EC).

EXEMPLE.

Pour l'équation d'Euler  $x^3y'''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ , la méthode ci-dessus donne  $z'''(t) - 3z''(t) + 3z'(t) - z(t) = 0$  dont la solution générale est  $z(t) = (\lambda t^2 + \mu t + \nu)e^t$ . En revenant à la variable  $x$ , sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  :

$$y(x) = |x|(\lambda(\ln |x|)^2 + \mu \ln |x| + \nu), \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}.$$

L'équation (EC) s'écrit ici  $r(r-1)(r-2) + r - 1 = 0$  ou encore  $(r-1)^3 = 0$  qui admet 1 comme racine triple et on retrouve  $y$  comme combinaison linéaire des fonctions  $x \mapsto |x|$ ,  $x \mapsto |x| \ln |x|$  et  $x \mapsto |x|(\ln |x|)^2$ .

## 5.2 Équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli<sup>8</sup> est une équation différentielle non linéaire de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y(x)^\alpha \quad (\text{E})$$

où  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Pour donner un sens à  $y(x)^\alpha$ , on ne cherchera que des solutions positives. On la ramène à une équation linéaire en divisant (E) par  $y(x)^\alpha$  et en remarquant que

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \left( \frac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} \right)'$$

8. Bernoulli, Jacob : mathématicien suisse (Bâle 1654–Bâle 1705)

ce qui suggère d'effectuer le changement de fonction inconnue  $z = 1/y^{\alpha-1}$ . La fonction  $z$  vérifie alors l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{1}{1-\alpha} z'(x) + a(x)z(x) = b(x)$$

que l'on sait résoudre explicitement.

EXEMPLE.

*Modèles démographiques* : considérons une population sujette à une certaine dynamique d'évolution au cours du temps. Notons  $N(t)$  l'effectif de cette population à l'instant  $t$ . Pour un  $\varepsilon > 0$  donné, la quantité  $N(t + \varepsilon) - N(t)$  représente l'accroissement (positif ou négatif) de la population durant l'intervalle de temps  $]t, t + \varepsilon]$ . Très souvent, cet accroissement est le résultat de naissances, décès et migrations par exemple.

- Si  $\lambda$  et  $\mu$  dénotent les taux de naissance et mort, l'accroissement de la population est *grosso modo* proportionnel à la quantité d'individus présents à l'instant  $t$  et au laps de temps  $\varepsilon$  :

$$N(t + \varepsilon) - N(t) \approx [\lambda N(t) - \mu N(t)]\varepsilon.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$ , on trouve (*modèle malthusien*<sup>9</sup>, 1798)

$$N'(t) = rN(t) \quad \text{avec } r = \lambda - \mu$$

d'où l'on déduit immédiatement  $N(t) = N(0)e^{rt}$ .

- Si  $\lambda > \mu$ , la population croît indéfiniment de manière exponentielle, il y a explosion de la population (en temps infini) ;
  - Si  $\lambda < \mu$ , la population disparaît à une vitesse exponentielle, il y a extinction de la population (en temps infini).
- Lorsque l'environnement extérieur impose une capacité maximale  $K$  (*capacité biotique*), la taille de la population est régulée et ne peut pas croître indéfiniment. Il est alors raisonnable d'introduire une correction au modèle précédent :  $N'(t)$  est non seulement proportionnel à  $N(t)$  mais aussi à  $K - N(t)$  (*modèle logistique* de Verhulst<sup>10</sup>, 1838) :

$$N'(t) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right).$$

La taille de la population vérifie donc une équation de Bernoulli qui se résout en posant  $z = 1/N$  :

$$z'(t) = -rz(t) + \frac{r}{K},$$

équation différentielle linéaire du premier ordre de solution générale

$$z(t) = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}.$$

D'où, en introduisant l'effectif initial  $N_0 (< K)$  de la population,

$$N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}.$$

On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$  ce qui signifie que la taille de la population se stabilise autour de la capacité biotique  $K$ .

9. Malthus, Thomas Robert : économiste britannique (Surrey 1766–Claverton 1834)

10. Verhulst, Pierre : mathématicien belge (Bruxelles 1804–Bruxelles 1849)

### 5.3 Équation de Riccati

L'équation de Riccati<sup>11</sup> est une équation différentielle non linéaire de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x)^2 + b(x)y(x) + c(x). \quad (\text{E})$$

On sait résoudre cette équation lorsqu'on connaît une solution particulière  $y_P$ . En effet, posons  $y = y_P + z$ ,  $z$  désignant la nouvelle fonction inconnue. On voit que  $z$  vérifie une équation de Bernoulli

$$z'(x) = a(x)z^2(x) + [2a(x)y_P(x) + b(x)]z(x)$$

laquelle se résout en introduisant la fonction inconnue  $u = 1/z$ . Cette dernière est solution de

$$u'(x) + [2a(x)y_P(x) + b(x)]u(x) = -a(x),$$

équation linéaire du premier ordre que l'on sait résoudre explicitement.

EXEMPLE.

Reprenons le modèle démographique de Verhulst décrit dans l'exemple précédent en y introduisant un facteur de migration à taux constant  $m$  (si  $m > 0$ , il s'agit d'émigration et si  $m < 0$ , il s'agit d'immigration) :

$$N'(t) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) - m.$$

On a affaire à une équation de Riccati à coefficients constants. Supposons que l'équation du second degré  $rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - m = 0$  qui s'écrit aussi  $x^2 - Kx + \frac{mK}{r} = 0$  admette des racines réelles. Son discriminant vaut  $K^2 - 4 \frac{mK}{r}$  et on suppose donc que  $K > 4 \frac{m}{r}$ . On obtient alors une solution constante particulière

$$N_P(t) = K^* = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - 4 \frac{mK}{r}}.$$

Dans ce cas, on peut résoudre explicitement l'équation de Riccati en posant  $u(t) = 1/(N(t) - K^*)$ . La fonction  $u$  vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u'(t) = \left( 2 \frac{K^*}{K} - 1 \right) ru(t) + \frac{r}{K}$$

dont la solution générale est

$$u(t) = \lambda e^{(2 \frac{K^*}{K} - 1)rt} + \frac{1}{K - 2K^*}.$$

On obtient alors

$$N(t) = \left[ \left( \frac{1}{K - 2K^*} - \frac{1}{K^* - N_0} \right) e^{(2 \frac{K^*}{K} - 1)rt} + \frac{1}{K - 2K^*} \right]^{-1} + K^*.$$

On trouve cette fois pour effectif asymptotique  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K^*$ .

### 5.4 Équation à variables séparables

Les équations à variables séparables sont des équations de la forme

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \quad (\text{E})$$

11. Riccati, Jacopo : mathématicien italien (Venise 1676–Treviso 1754)

qui s'écrivent encore sous forme différentielle selon

$$g(y) dy = f(x) dx.$$

Cette dernière écriture justifie la dénomination d'équation à variables séparables (ou séparées). Remarquant que  $g(y(x))y'(x)$  est la dérivée d'une fonction composée, (E) s'écrit encore sous la forme, après avoir introduit des primitives  $F$  et  $G$  de  $f$  et  $g$ ,

$$(G \circ y)'(x) = F'(x).$$

Les solutions sont alors données sous forme implicite

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLES.

1. Les équations de Bernoulli et de Riccati à coefficients constants sont des équations à variables séparables.
2. L'équation  $y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}$  correspond à  $F(x) = x$ ,  $G(y) = \text{signe}(y)\sqrt{|y|}$  et  $y$  doit vérifier

$$|y(x)| = (x + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On note que la fonction nulle est une solution de l'équation non contenue dans la solution générale précédente (on parle d'*intégrale singulière*) et que les fonctions dépendant de deux paramètres  $\alpha, \beta$  définies par

$$y(x) = \begin{cases} (x - \beta)^2 & \text{si } x \geq \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ -(x - \alpha)^2 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

sont toutes solutions de l'équation considérée et vérifient la condition initiale  $y(x_0) = 0$ ,  $x_0$  étant un point fixé de  $[\alpha, \beta]$ . Dans cet exemple, l'unicité de la solution du problème de Cauchy est mise en défaut.

3. *Interaction proies-prédateurs* : un phénomène écologique important est la prédation d'une espèce par une autre. Considérons un territoire sur lequel coexistent deux populations, l'une constituée de prédateurs et l'autre de proies. Les prédateurs ont besoin de se nourrir de proies pour se développer, mais au fur et au mesure qu'ils se nourrissent de proies, ces dernières disparaissent et la population de prédateurs entre dans une phase de dépérissement, phase durant laquelle la population de proies peut à l'inverse de nouveau se développer, puis resservir de nourriture aux prédateurs et ainsi de suite. On devine donc des cycles périodiques de développement et de dépérissement pour chaque espèce.

Un modèle simple de prédation repose sur les hypothèses suivantes :

- en l'absence de prédateurs (resp. proies), la population de proies (resp. prédateurs) croîtrait (resp. décroîtrait) de manière exponentielle de taux  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ );
- les taux de disparition des proies ( $\beta_1$ ) et de croissance des prédateurs ( $\beta_2$ ) sont proportionnels au nombre de rencontres entre une proie et un prédateur, ce nombre étant lui-même proportionnel au produit des effectifs des deux populations.

Notons  $N(t)$  et  $P(t)$  les effectifs respectifs des populations de proies et de prédateurs à l'instant  $t$ . Les hypothèses précédentes conduisent au système différentiel (*modèle de Lotka-Volterra*<sup>12</sup>, 1926)

$$\begin{cases} N'(t) = \alpha_1 N(t) - \beta_1 N(t)P(t), \\ P'(t) = -\alpha_2 P(t) + \beta_2 N(t)P(t). \end{cases}$$

Pour réduire le nombre de paramètres, on pose  $x(t) = \frac{\beta_2}{\alpha_2} N(t)$ ,  $y(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} P(t)$  et le système précédent devient

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha_1 [1 - y(t)] x(t), \\ y'(t) = -\alpha_2 [1 - x(t)] y(t). \end{cases}$$

12. Volterra, Vito : mathématicien italien (Ancona 1860–Rome 1940)

En ajoutant la première équation du système ci-dessus multipliée par  $\alpha_2[1 - x(t)]y(t)$  et la deuxième équation multipliée par  $\alpha_1[1 - y(t)]x(t)$ , on obtient

$$\alpha_2 y(t)[1 - x(t)] x'(t) + \alpha_1 x(t)[1 - y(t)] y'(t) = 0$$

qui s'écrit encore sous forme différentielle (avec  $x'(t) = \frac{dx}{dt}$  et  $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ )

$$\alpha_2 \frac{1-x}{x} dx = -\alpha_1 \frac{1-y}{y} dy.$$

On est alors confronté à une équation différentielle qui ressemble à une équation à variables séparées ; ici  $x$  et  $y$  représentent des fonctions de  $t$ . La méthode de résolution est néanmoins similaire à celle décrite dans ce paragraphe : on calcule une primitive de chacune des deux fonctions  $x \mapsto \alpha_2 \frac{1-x}{x}$  et  $y \mapsto -\alpha_1 \frac{1-y}{y}$ .

On trouve respectivement  $\ln(x^{\alpha_2} e^{-\alpha_2 x})$  et  $\ln(y^{-\alpha_1} e^{\alpha_1 y})$ . De là on tire

$$x(t)^{\alpha_2} e^{-\alpha_2 x(t)} \times y(t)^{\alpha_1} e^{-\alpha_1 y(t)} = C,$$

la constante  $C$  étant donnée par  $C = x(0)^{\alpha_2} e^{-\alpha_2 x(0)} \times y(0)^{\alpha_1} e^{-\alpha_1 y(0)}$ . La courbe paramétrée  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , qui représente à un facteur d'échelle près le couple d'effectifs proies-prédateurs, a pour support la courbe d'équation cartésienne

$$x^{\alpha_2} e^{-\alpha_2 x} \times y^{\alpha_1} e^{-\alpha_1 y} = C.$$

Elle est représentée ci-dessous (Fig. 2.5) pour diverses valeurs des paramètres :  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, x(0) = \frac{1}{n+4}, y(0) = \frac{2}{n}$  pour  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ .

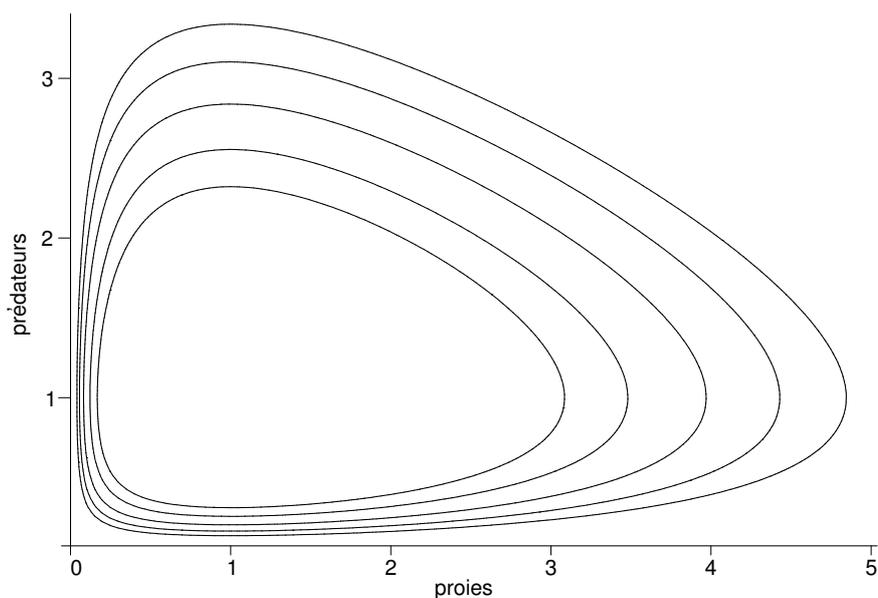


FIGURE 2.5 – Effectifs proies-prédateurs

## Exercices sur les équations différentielles

**Exercice 1** Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes en précisant son ensemble définition :

a)  $y'(x) + 2y(x) = x^2 - x + 3$

b)  $xy'(x) - 2y(x) = \ln x$

c)  $y'(x) + \frac{6}{x+2}y(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

d)  $xy'(x) + (x+1)y(x) = e^x$

e)  $(x^2 - 4)y'(x) + xy(x) = 4$

f)  $(x-1)y'(x) = y(x) + (x-2)e^x$

g)  $\sqrt{x^2+1}y'(x) - y(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

**Exercice 2** Déterminer pour chacune des équations différentielles suivantes la solution générale sur  $]0, +\infty[$  et celle sur  $] -\infty, 0[$ . Admettent-elles des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier ?

a)  $xy'(x) - 2y(x) = x^2$

b)  $x^2y'(x) - xy(x) = 1$

**Exercice 3** Pour l'équation différentielle

$$(4 - x^2)y'(x) + xy(x) = 2,$$

déterminer la solution générale sur chacun des intervalles  $] -\infty, -2[$ ,  $] -2, 2[$  et  $]2, +\infty[$ . Cette équation différentielle admet-elle des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier ?

**Exercice 4** Déterminer la solution générale des équations différentielles non linéaires suivantes :

a)  $y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = 5x^2y(x)^5$

b)  $\sqrt{x}y'(x) - y(x) + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y(x)} = 0$

c)  $2x^2y'(x) = (x-1)(y(x)^2 - x^2) + 2xy(x)$

d)  $(1 - \sin x \cos x)y'(x) + y(x)^2 \cos x - y(x) + \sin x = 0$

**Exercice 5** Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

a)  $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 2e^{3x}$

b)  $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 6x + 1 + 4e^x + 7e^{-x}$

c)  $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{3x} \cos x$

d)  $y''(x) + y(x) = \operatorname{ch} x$

e)  $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$

f)  $x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$

g)  $x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 4x^2$

**Exercice 6** Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes :

a)  $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 6(4x + 1)e^x + e^{2x}$

b)  $y''''(x) - y(x) = e^{-x}$

**Exercice 7** Déterminer la solution générale des équations différentielles non linéaires suivantes :

a)  $y'(x) = e^{y(x)+x}$

b)  $y'(x) = \frac{y(x)^2 + 1}{x^2 + 1}$

c)  $\frac{e^{y(x)} - 1}{e^{y(x)} - 2} y'(x) = \frac{1}{x}$

**Exercice 8 (Fonction de Green** <sup>13</sup>) Soit  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) - \omega^2 y(x) = -f(x).$$

- Montrer que la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant les conditions aux limites  $y(0) = y(1) = 0$  est donnée par

$$y(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy$$

où  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction continue symétrique définie par (*fonction de Green*)

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \omega(1-x) \operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{sh} \omega} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ \frac{\operatorname{sh} \omega(1-y) \operatorname{sh} \omega x}{\omega \operatorname{sh} \omega} & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Indication : on écrira  $\int_0^x g(y) dy = \int_0^1 g(y) \mathbb{1}_{[0,x]}(y) dy$  où  $\mathbb{1}_{[0,x]}$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, x]$ , i.e.  $\mathbb{1}_{[0,x]}(y) = 1$  si  $y \in [0, x]$ , 0 sinon.

---

13. Green, George : mathématicien anglais (Nottingham 1793–Nottingham 1841)



# Chapitre 3

## Séries numériques

### 1 Introduction

Une série numérique est une suite particulière. Elle est construite à partir d'une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en effectuant les sommes successives de ses premiers termes, dites *sommes partielles*,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Ces sommes partielles définissent une nouvelle suite,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelée *série*  $(\sum u_n)$ . L'un des problèmes essentiels sera celui de la convergence de la série  $(\sum u_n)$ . Si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, on dira que la série  $(\sum u_n)$  est *convergente* et on notera

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Un autre problème consistera à évaluer la somme ci-dessus.

Voici quelques exemples où apparaissent naturellement les séries.

1. *Développement décimal d'un nombre réel* : tout réel positif  $x$  admet un développement décimal illimité

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

L'écriture précédente mérite des précisions : elle est la juxtaposition d'un entier naturel  $a_0$  et d'une infinité de décimales  $a_1 a_2 a_3 \dots$ , la  $n^e$  décimale  $a_n$  étant un chiffre compris entre 0 et 9. Cela signifie que  $x$  est en fait la somme illimitée

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots$$

que l'on écrira plus rigoureusement

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

On prouvera plus loin que la série  $(\sum \frac{a_n}{10^n})$  est toujours convergente.

Les termes du développement sont donnés par

$$a_0 = E(x) \quad \text{et} \quad a_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1} x), \quad n \geq 1$$

où  $E$  désigne la fonction partie entière.

2. *Développement de Taylor* : toute fonction numérique  $f$  définie sur un voisinage de 0 de classe  $C^\infty$  admet un développement de Taylor jusqu'à n'importe quel ordre

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

Si le reste  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient un *développement de Taylor illimité*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

EXEMPLES.

— Pour  $f(x) = e^x$ , la formule de Taylor-Lagrange donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1} e^{\theta_n(x)x}}{(n+1)!}$$

avec  $\theta_n(x) \in ]0, 1[$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} e^{\theta_n(x)x}}{(n+1)!} = 0$ , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

— Pour  $f(x) = \ln(x+1)$ , on a de même

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(\theta_n(x)x+1)^n}$$

avec  $\theta_n(x) \in ]0, 1[$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(\theta_n(x)x+1)^n} = 0$  pour  $x \in [0, 1]$ , on obtient

$$\forall x \in [0, 1], \ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

En particulier pour  $x = 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ .

REMARQUE.

La suite des restes peut être convergente et avoir une limite non nulle. Par exemple, pour la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^{-1/x^2}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ , on peut démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$  et donc

$$e^{-1/x^2} = R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-1/(\theta_n(x)x)^2}.$$

En fait, dans ce cas, le reste ne dépend pas de  $n$ . La suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente (constante!) et ne tend pas vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

3. *Décomposition d'un signal périodique* : certains signaux périodiques de pulsation  $\omega$  (signal sonore, signal électrique, vibration acoustique, etc.) peuvent être perçus comme superposition illimitée de signaux sinusoidaux élémentaires de la forme  $a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$  :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)].$$

Par exemple, pour un son musical de fréquence  $F$  ( $F$  est la *hauteur* du son), le signal élémentaire correspondant à  $n = 1$  est la note *fondamentale* et les signaux élémentaires correspondant à  $n \geq 2$  sont les *harmoniques* ; ils ont pour fréquences des multiples de la fréquence fondamentale : le deuxième harmonique est l'*octave* de la note fondamentale, le troisième est la *quinte* au-dessus de l'octave, le quatrième est la deuxième octave, etc. La superposition de tous ces harmoniques caractérisent le *timbre* de l'instrument produisant ce son. Ce type de décomposition conduit à la théorie des séries de Fourier qui sera présenté dans un chapitre ultérieur.

4. *Loi géométrique en probabilités* : un joueur impénitent enclin au sybaritisme se livre à une succession de jeux de pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée. La probabilité d'obtenir pile est  $p \in ]0, 1[$  et d'obtenir face est  $q = 1 - p$ . Le joueur se demande quelle sera la probabilité d'obtenir pile pour la première fois lors du  $n^{\text{e}}$  jeu. Cela signifie qu'il aura obtenu face à chacun des  $n - 1$  jeux précédents, d'où la probabilité  $pq^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ . Maintenant, notre sybarite dévoyé se demande s'il a une chance d'obtenir un jour (en temps fini) au moins une fois pile au cours de la succession (illimitée) de jeux. La probabilité de cet événement s'évalue en sommant les précédentes, la sommation portant sur le numéro du premier jeu gagnant :

$$\sum_{n=0}^{\infty} pq^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = 1.$$

La réponse à la question est donc positive sous réserve tout de même que notre joueur soit immortel, car le jour de victoire pourrait tarder à poindre et arriver dans un avenir fort lointain... Une autre méthode de calcul consiste à introduire l'événement contraire : la probabilité de ne jamais obtenir pile au cours de la succession de jeux vaut  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . On a vu apparaître la série géométrique ( $\sum q^n$ ) pour laquelle on a utilisé la formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Ce sera l'une des séries de références de la théorie des séries numériques.

## 2 Rappels sur les suites numériques

### 2.1 Généralités

Une *suite numérique* est une application  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Habituellement,  $u(n)$  est noté  $u_n$  et la suite  $u$  est notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;  $u_n$  est le *terme général* de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 2.1** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le nombre  $l \in \mathbb{R}$  lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Dans le cas réel, l'inégalité  $|u_n - l| \leq \varepsilon$  s'écrit aussi  $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ . Le nombre  $l$  est appelé *limite* de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et noté  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  ou encore plus simplement  $\lim u_n$ .

On dispose de peu de critères de convergence pour les suites numériques. On en énoncera deux ci-dessous.

**Théorème 2.1** *Toute suite réelle croissante majorée (resp. décroissante minorée)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et sa limite vaut  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  (resp.  $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ).*

DÉMONSTRATION.

Elle repose sur l'existence de la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide de  $\mathbb{R}$  majorée (resp. minorée).  $\square$

**Définition 2.2** *Deux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes lorsque l'une est croissante et l'autre est décroissante et lorsqu'elles vérifient  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$ .*

**Théorème 2.2** *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes et ont même limite.*

DÉMONSTRATION.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes. Supposons par exemple  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante. Remarquons que la suite  $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante :

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0.$$

Comme elle converge vers 0, en fait sa limite est sa borne inférieure et elle est minorée par 0. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

et donc

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_2 \leq v_1.$$

On voit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante majorée donc convergente, que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante minorée donc convergente et qu'elles ont même limite puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$ .  $\square$

L'inconvénient de la définition de la convergence d'une suite est qu'elle nécessite la connaissance *a priori* de sa limite  $l$ . La définition suivante ne fait intervenir aucune limite et elle est équivalente à la définition de la convergence.

**Définition 2.3** *La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, |u_q - u_p| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont tous très proches les uns des autres.

**Théorème 2.3** *Dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Ce résultat d'un intérêt plutôt théorique sera surtout utilisé par la suite dans les démonstrations. DÉMONSTRATION.

1. Supposons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon/2.$$

Soit maintenant  $p, q \geq n_0$ . On a donc  $|u_p - l| \leq \varepsilon/2$  et  $|u_q - l| \leq \varepsilon/2$ . En écrivant  $u_q - u_p = (u_q - l) - (u_p - l)$  on obtient

$$|u_q - u_p| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui montre que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

2. Réciproquement, supposons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit une suite de Cauchy réelle (le cas complexe ne pose pas plus de difficultés).

— La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car, en choisissant par exemple  $\varepsilon = 1$ , il existe un entier  $n_0$  tel que

$$\forall p \geq n_0, |u_p| = |(u_p - u_{n_0}) + u_{n_0}| \leq |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \leq |u_{n_0}| + 1$$

et donc, en posant  $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |u_{n_0}| + 1\}$ , on a clairement

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

— On introduit les suites  $v_n = \inf_{k \geq n} u_k$  et  $w_n = \sup_{k \geq n} u_k$  qui sont bien définies puisque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Il est facile de voir que les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont respectivement croissante et décroissante et encadrent la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Ceci montre que la suite croissante  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $w_1$  et la suite décroissante  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $v_1$ , ces deux suites sont donc convergentes et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} w_n.$$

— Montrons que les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes, c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - v_n) = 0$  et on aura alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

En utilisant la définition des bornes supérieures et inférieures, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p_n, q_n \geq n, v_n \geq u_{p_n} - \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad w_n \leq u_{q_n} + \varepsilon/3,$$

donc

$$0 \leq w_n - v_n \leq u_{q_n} - u_{p_n} + 2\varepsilon/3.$$

On a écrit ci-dessus que,  $v_n$  étant le plus grand minorant de l'ensemble  $\{u_k, k \geq n\}$ ,  $v_n + \varepsilon/3$  n'est pas un minorant de cet ensemble; de même  $w_n - \varepsilon/3$  n'est pas un majorant cet ensemble. D'autre part, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant de Cauchy,

$$\exists n_0, \forall p, q \geq n_0, |u_q - u_p| \leq \varepsilon/3.$$

On a alors pour tout  $n \geq n_0$ ,  $p_n, q_n \geq n_0$  et par conséquent (voir Fig. 3.1)

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq w_n - v_n \leq \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon$$

ce qui prouve  $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - v_n) = 0$  et donc que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

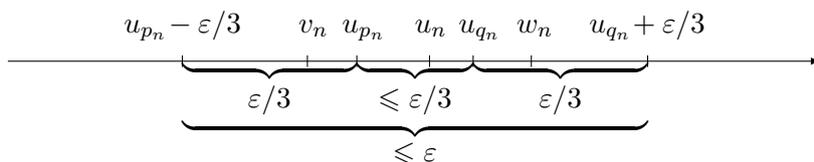


FIGURE 3.1 – Toute suite de Cauchy réelle est convergente

□

REMARQUE.

Les limites des suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont respectivement appelées *limite inférieure* et *limite supérieure* de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On les note respectivement  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$  et  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$  :

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} u_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} u_k) \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} u_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} u_k).$$

Ces deux limites sont toujours soit définies soit infinies, et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un nombre ou vers l'infini, si et seulement si

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

EXEMPLE.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de terme général  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . On a

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

L'inégalité ci-dessus provient du fait que chacun de termes  $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{2n}$  est minoré par  $\frac{1}{2n}$ . On a ainsi prouvé que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas de Cauchy :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p, q \geq n, |u_q - u_p| \geq \varepsilon$$

avec les choix  $\varepsilon = 1/2$ ,  $p = n$  et  $q = 2n$ . Elle est donc divergente. Comme elle est clairement croissante, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

On va étudier maintenant plus en détails le cas des suites arithmétiques et géométriques.

## 2.2 Suites arithmétiques

**Définition 2.4** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique si elle vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2},$$

c'est-à-dire  $u_n$  est la moyenne arithmétique de  $u_{n+1}$  et  $u_{n-1}$ .

La définition entraîne  $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$  ce qui signifie que la suite de terme général  $u_{n+1} - u_n$  est constante. Il existe donc  $r \in \mathbb{R}$  tel que

$$u_{n+1} = u_n + r$$

ce qui s'écrit encore  $u_{n+1} - (n+1)r = u_n - nr$ . On voit donc que la suite de terme général  $u_n - nr$  est constante. D'où

$$u_n = rn + u_0.$$

**Proposition 2.1** Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On a

$$S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

DÉMONSTRATION.

En écrivant

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ S_n &= u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0 \end{aligned}$$

et en ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouve, après avoir remarqué que

$$u_0 + u_n = u_1 + u_{n-1} = u_2 + u_{n-2} = \cdots = u_n + u_0,$$

l'égalité  $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$ . D'où le résultat.  $\square$

EXEMPLE.

Dans le cas où  $r = 1$  et  $u_0 = 0$  on obtient la formule bien connue

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant toujours divergente ( $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ), elle ne sera pas d'un grand intérêt pour l'étude des séries numériques.

### 2.3 Suites géométriques

**Définition 2.5** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique si elle vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{u_{n+1}u_{n-1}},$$

c'est-à-dire  $u_n$  est la moyenne géométrique de  $u_{n+1}$  et  $u_{n-1}$ .

On a alors  $u_{n+1}/u_n = u_n/u_{n-1}$  ce qui signifie que la suite de terme général  $u_{n+1}/u_n$  est constante. Il existe donc  $r \in \mathbb{R}$  tel que

$$u_{n+1} = ru_n$$

ce qui s'écrit encore  $u_{n+1}/r^{n+1} = u_n/r^n$ . Ainsi, la suite de terme général  $u_n/r^n$  est constante et l'on trouve

$$u_n = u_0 r^n.$$

**Proposition 2.2** La limite de la suite  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1, \\ 1 & \text{si } r = 1, \\ 0 & \text{si } |r| < 1. \end{cases}$$

Cette limite n'existe pas lorsque  $r \leq -1$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } |r| > 1, \\ 1 & \text{si } |r| = 1, \\ 0 & \text{si } |r| < 1. \end{cases}$$

**Proposition 2.3** Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On a pour  $r \neq 1$  :

$$S_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

DÉMONSTRATION.

En écrivant

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ rS_n &= \quad \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} \end{aligned}$$

et en soustrayant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$(1 - r)S_n = u_0 - u_{n+1} = u_0(1 - r^{n+1})$$

d'où le résultat. □

Le résultat ci-dessous qui découle des deux propriétés précédentes est fondamental pour l'étude des séries numériques.

**Théorème 2.4** La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si et seulement si  $|r| < 1$  et dans ce cas sa limite est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

EXEMPLE.

*Mathématiques financières* : les suites géométriques sont couramment utilisées par les financiers dans les calculs de valorisation d'un capital sous l'effet d'intérêts composés (les intérêts sont eux-mêmes productifs d'intérêts). Lorsqu'on place un capital  $S_0$  au taux annuel  $\alpha$  ( $= 100\alpha\%$ ), les intérêts produits par  $S_0$  au bout d'un an sont de  $\alpha S_0$ , d'où le capital revalorisé  $S_1 = (1 + \alpha)S_0$ . Plus généralement, si  $S_n$  est la valeur du capital à l'issue de la  $n^e$  année, on a  $S_{n+1} = S_n(1 + \alpha)$ , ce qui montre que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $(1 + \alpha)$  et le montant du capital au bout de  $n$  années est  $S_n = S_0(1 + \alpha)^n$ .

(Nota : La Caisse d'Épargne annonce un taux annuel, alors que les intérêts sont calculés chaque quinzaine. Cela signifie en fait qu'il faut appliquer le taux  $\alpha/24$  sur  $24n$  quinzaines :

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{\alpha}{24}\right)^{24n}$$

qui est supérieur à  $(1 + \alpha)^n$ .)

- Un consommateur emprunte auprès d'un organisme financier une somme  $S$  au taux mensuel  $\alpha$  ( $= 100\alpha\%$ ) à rembourser sur une période de  $N$  mois. Quel est le montant de la mensualité  $m$  à rembourser ? Soit  $u_n$  la somme restant à rembourser à la fin du  $n^e$  mois. Pour  $n = 0$ , on a bien sûr  $u_0 = S$ . À la fin du premier mois, le capital  $S$  a été valorisé de  $100\alpha\%$ , la première mensualité est versée et la somme restant à rembourser est donc  $(1 + \alpha)S - m$ . En reproduisant ce raisonnement entre les  $n^e$  et  $(n + 1)^e$  mois on trouve la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n - m.$$

En introduisant le point fixe de cette relation — c'est le nombre  $u$  vérifiant  $u = (1 + \alpha)u - m$  soit  $u = \frac{m}{\alpha}$  — on obtient

$$u_{n+1} - u = (1 + \alpha)u_n - m - ((1 + \alpha)u - m) = (1 + \alpha)(u_n - u)$$

qui montre que  $(u_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $(1 + \alpha)$ . Donc

$$u_n = \frac{m}{\alpha} + \left(S - \frac{m}{\alpha}\right)(1 + \alpha)^n.$$

À l'issue du  $N^{\text{e}}$  mois, l'emprunt doit avoir été intégralement remboursé ce qui donne

$$u_N = \frac{m}{\alpha} + \left(S - \frac{m}{\alpha}\right)(1 + \alpha)^N = 0$$

d'où le montant de la mensualité :

$$m = \frac{S\alpha}{1 - \frac{1}{(1+\alpha)^N}}.$$

Le coût du crédit est  $Nm - S = S \left[ \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{(1+\alpha)^N}} - 1 \right]$  auquel il faut rajouter le montant d'une assurance décès-invalidité.

- Supposons maintenant que l'emprunteur soit un investisseur et que la somme empruntée soit en fait remplacée à un taux supposé constant  $\beta$ . Le gain du placement à l'issue du  $N^{\text{e}}$  mois est  $S[(1 + \beta)^N - 1]$ . L'écart entre le gain du placement et le coût du crédit est donc, en faisant abstraction de l'assurance,

$$S \left[ (1 + \beta)^N - \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{(1+\alpha)^N}} \right].$$

C'est un bénéfice si cet écart est positif et une perte s'il est négatif. L'emprunteur est bénéficiaire lorsque  $(1 + \beta)^N > \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{(1+\alpha)^N}}$ , soit encore

$$\frac{1 + \beta}{1 + \alpha} > \left[ \frac{N\alpha}{(1 + \alpha)^N - 1} \right]^{1/N}$$

d'où le taux minimum auquel doit être placée la somme empruntée :

$$\beta_{\min} = (1 + \alpha)e^{-\frac{1}{N} \ln \frac{(1+\alpha)^N - 1}{N\alpha}} - 1.$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire que  $\beta \geq \alpha$  pour être bénéficiaire. En effet, l'inégalité  $(1 + \alpha)^N > 1 + N\alpha$  entraîne  $\beta_{\min} < \alpha$ .

APPLICATION NUMÉRIQUE. Si le taux bancaire est de  $\alpha = 5\%$  annuel  $= \frac{5}{1200}$  mensuel et la durée de l'emprunt est de  $N = 1$  an  $= 12$  mois, alors le taux minimum de placement doit être de  $\beta_{\min} = 2,246 \cdot 10^{-3}$  mensuel  $= 2,7\%$  annuel.

## COMPLÉMENT : RÉCURRENCE LINÉAIRE À TROIS INDICES

Une suite géométrique vérifie une récurrence linéaire  $u_{n+1} = ru_n$  avec une donnée initiale  $u_0$ . On peut généraliser ce type de relation à des récurrences comportant plusieurs indices. Examinons le cas de la récurrence linéaire à trois indices (suites de Fibonacci<sup>1</sup>) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

avec pour données initiales  $u_0, u_1$ . Les nombres  $a$  et  $b$  sont réels ou complexes. En recherchant une solution particulière de la forme  $u_n = r^n$ , il apparaît que le nombre  $r$  doit nécessairement vérifier l'équation dite *équation caractéristique*

$$r^2 = ar + b. \quad (\text{EC})$$

1. Fibonacci, Léonard de Pise : mathématicien italien (Pise 1170–Pise 1250)

On a le résultat suivant qui est à rapprocher de la forme de la solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

**Théorème 2.5** Soit  $\Delta = a^2 + 4b$  le discriminant de l'équation (EC) :  $r^2 = ar + b$ .

1. Si  $\Delta \neq 0$ , (EC) admet dans  $\mathbb{C}$  deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour expression

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont caractérisés par les relations  $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la somme de deux suites géométriques.

2. Si  $\Delta = 0$ , (EC) admet dans  $\mathbb{C}$  une racine double  $r = -\frac{a}{2}$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour expression

$$u_n = (\lambda n + \mu)r^n$$

où les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont caractérisés par les relations  $\begin{cases} \mu = u_0 \\ (\lambda + \mu)r = u_1 \end{cases}$ .

DÉMONSTRATION.

Soit  $r_1$  et  $r_2$  les solutions (distinctes ou confondues) de (EC) dans  $\mathbb{C}$ . Posons  $u_n = r_1^n v_n$ . On a  $r_1^2 v_{n+2} = ar_1 v_{n+1} + bv_n$ . Comme  $r_1 + r_2 = a$  et  $r_1 r_2 = -b$ , cela s'écrit aussi

$$r_1^2 v_{n+2} = (r_1^2 + r_1 r_2)v_{n+1} - r_1 r_2 v_n$$

ou encore, en posant  $w_n = v_{n+1} - v_n$ ,

$$w_{n+1} = \frac{r_2}{r_1} w_n.$$

La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison  $r_2/r_1$  lorsque  $r_1 \neq r_2$  et constante lorsque  $r_1 = r_2$ .

— Dans le cas  $r_1 \neq r_2$ , on a

$$w_n = w_0 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^n$$

avec  $w_0 = v_1 - v_0 = \frac{u_1}{r_1} - u_0$ . On tire ensuite  $v_n$  par sommation :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 + w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} \\ &= v_0 + w_0 \frac{(r_2/r_1)^n - 1}{r_2/r_1 - 1} \\ &= u_0 + \left( \frac{u_1}{r_1} - u_0 \right) \frac{r_2^n - r_1^n}{r_1^{n-1}(r_2 - r_1)} \end{aligned}$$

puis

$$u_n = r_1^n v_n = u_0 r_1^n + (u_1 - r_1 u_0) \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} r_2^n.$$

— Dans le cas où  $r_1 = r_2$ , on a  $w_n = w_0$  puis  $v_n = v_0 + n w_0$  et alors

$$u_n = r_1^n v_n = \left[ \left( \frac{u_1}{r_1} - u_0 \right) n + u_0 \right] r_1^n.$$

On peut retrouver cette expression à partir de celle du cas précédent en faisant tendre  $r_2$  vers  $r_1$ .  $\square$

EXEMPLE.

En 1202, Fibonacci tenta de résoudre le problème de la prolifération des lapins. Partant du fait, très rare dans l'espèce humaine, que des oncles et neveux soient du même âge, il imagina que dans l'espèce lapine les parents ont une deuxième descendance contemporaine de celle de leurs premiers descendants, ceux-ci ayant une deuxième descendance contemporaine également de celle de leurs propres descendants, mais que les premiers parents disparaissent par le fait

d'une mort naturelle. De plus, chaque descendance est constituée d'un couple de lapins (un mâle et une femelle). Notons  $u_n$  le nombre de lapins présentes dans la  $n^{\text{e}}$  génération. Une lapine de la  $n^{\text{e}}$  génération a une descendance lors de la  $(n+1)^{\text{e}}$  génération puis une deuxième lors de la  $(n+2)^{\text{e}}$  génération et meurt. La première descendance (de la  $(n+1)^{\text{e}}$  génération) donne naissance à une descendance lors de la  $(n+2)^{\text{e}}$  génération. Les lapins de la  $(n+2)^{\text{e}}$  génération sont donc des descendants des deux générations précédentes. Sous ces hypothèses, on trouve la relation de récurrence, qui entre dans le cadre précédent,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

partant initialement d'un couple de lapins :  $u_1 = 1$  lapine, donnant une descendance la génération suivante :  $u_2 = 2$  lapines (la mère et la fille). L'équation caractéristique est  $r^2 = r + 1$  dont les racines sont  $r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  et  $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (nombre d'or). La solution est alors donnée par

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \quad n \geq 1,$$

avec

$$\begin{cases} \lambda r_1 + \mu r_2 &= 1 \\ \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 &= 2 \end{cases}.$$

Finalement,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

### 3 Séries numériques : définitions générales

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On a inversement  $u_0 = S_0$  et  $u_n = S_n - S_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

**Définition 3.1** 1. La série numérique de terme général  $u_n$ , notée  $(\sum u_n)$ , est la suite dite des sommes partielles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2. On dit que la série  $(\sum u_n)$  est convergente si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est. Dans le cas contraire on dit que la série est divergente.

3. En cas de convergence, on note

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Le nombre  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  est appelé somme de la série  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On note également  $R_n =$

$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ .  $R_n$  est le reste de la série  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n + R_n = S.$$

Lorsque la série est convergente, la suite des restes  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. En effet,  $R_n = S - S_n$  et  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$ .

**Proposition 3.1** Une condition *nécessaire mais non suffisante* pour qu'une série soit convergente est que son terme général tende vers 0.

DÉMONSTRATION.

Si la série  $(\sum u_n)$  est convergente alors la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est aussi. Dans ce cas on a  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$ .  $\square$

Ce résultat s'utilise surtout pour prouver la divergence d'une série.

EXEMPLE.

Soit  $u_n = (-1)^n$ . Le terme général n'a pas de limite donc ne tend pas vers 0 et la série  $\sum (-1)^n$  est divergente. La suite de ses sommes partielles est définie par  $S_n = 1$  si  $n$  est pair,  $S_n = 0$  si  $n$  est impair. Il est donc clair que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.

CONTRE-EXEMPLE.

On a vu dans le paragraphe précédent que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  tendait vers l'infini. La série  $(\sum \frac{1}{n})$  est donc divergente bien que son terme général tende vers 0.

En appliquant le théorème 2.3 à la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on obtient la caractérisation suivante qui ne fait pas intervenir la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ . En général cette somme n'est pas connue explicitement.

**Théorème 3.1 (Critère de Cauchy)** *La série  $(\sum u_n)$  est convergente si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0 \text{ tels que } p \leq q, \left| \sum_{k=p}^q u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Ce critère sera surtout utilisé dans la théorie.

Voici une propriété très simple concernant les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

**Proposition 3.2** *Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et si les séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  sont convergentes, alors les séries  $(\sum (u_n + v_n))$  et  $(\sum (\lambda u_n))$  sont convergentes et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

REMARQUE.

La série  $(\sum (u_n + v_n))$  peut être convergente sans que les deux séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  le soient. Il suffit de choisir pour  $(\sum u_n)$  une série divergente et  $v_n = -u_n$ .

L'étude des séries passent par celle des séries à termes positifs. Contrairement aux suites, on dispose de nombreux critères spécifiques pour étudier une série. Quelques-uns sont présentés dans la suite.

## 4 Séries numériques à termes positifs

Dans tout ce paragraphe, les séries sont supposées être à termes positifs.

REMARQUE PRÉLIMINAIRE. Le fait que les  $u_n$  soit positifs entraîne que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Ou bien la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée auquel cas la série  $(\sum u_n)$  est convergente ; ou bien la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée auquel cas la série  $(\sum u_n)$  est divergente et  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ .

### 4.1 Règles de comparaison

**Proposition 4.1** 1. *S'il existe un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ , alors*

$$\begin{aligned} (\sum v_n) \text{ convergente} &\implies (\sum u_n) \text{ convergente,} \\ (\sum u_n) \text{ divergente} &\implies (\sum v_n) \text{ divergente.} \end{aligned}$$

2. *Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors les séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  sont de même nature.*

DÉMONSTRATION.

1. Il suffit de considérer les suites croissantes des sommes partielles associées.
2. On traduit  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

et on applique le point précédent.

□

EXEMPLE.

Reprenons l'exemple du développement décimal d'un réel faisant apparaître la série à termes positifs  $(\sum \frac{a_n}{10^n})$  où les  $a_n, n \geq 1$ , sont des chiffres compris entre 0 et 9. On a l'inégalité  $\frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}}$ , et la série géométrique  $(\sum \frac{1}{10^{n-1}})$  ayant pour raison  $1/10 \in ]-1, 1[$  est convergente. D'où la convergence de la série  $(\sum \frac{a_n}{10^n})$  quelle que soit la suite de décimales  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Les règles de Cauchy et de d'Alembert ci-dessous reposent sur un critère de comparaison avec une série géométrique.

## 4.2 Règle de Cauchy

**Théorème 4.1 (Règle de Cauchy)** *Supposons que la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$  existe. Alors*

- si  $l < 1$ ,  $(\sum u_n)$  est convergente ;
- si  $l > 1$ ,  $(\sum u_n)$  est divergente ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure ; toutefois si plus précisément  $l = 1^+$ , alors  $(\sum u_n)$  est divergente.

DÉMONSTRATION.

Traduisons  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0(\varepsilon), l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

- Si  $0 \leq l < 1$ , on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $l + \varepsilon < 1$  et donc, en posant  $n_0(\varepsilon) = n_0$ ,

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq (l + \varepsilon)^n.$$

La série géométrique  $(\sum (l + \varepsilon)^n)$  est convergente et donc  $(\sum u_n)$  aussi.

- Si  $l > 1$ , on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $l - \varepsilon > 1$  et donc

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq (l - \varepsilon)^n \geq 1.$$

La série géométrique  $(\sum (l - \varepsilon)^n)$  est divergente (ou encore  $u_n$  ne tend pas vers 0) et donc  $(\sum u_n)$  aussi.

- Si  $l = 1^+$ , on a en particulier  $\forall n \geq n_0, u_n \geq 1$ ,  $u_n$  ne peut tendre vers 0 donc  $(\sum u_n)$  est divergente.

□

EXEMPLES.

1. Considérons la série de terme général  $u_n = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{-n^3}$ ,  $n \geq 1$ . On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{-n^2} = e^{-n^2 \ln \operatorname{ch}(1/n)}.$$

Comme  $n^2 \ln \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right) = n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ , on déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1/\sqrt{e} < 1$ , d'où la convergence de la série  $(\sum u_n)$ .

2. Reprenons l'exemple du développement décimal d'un réel compris entre 0 et 1 considéré dans l'introduction de ce chapitre. Il s'agit de la série de terme général  $u_n = \frac{a_n}{10^n}$ ,  $n \geq 1$  où les  $a_n$  sont des chiffres compris entre 0 et 9. On a  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sqrt[n]{a_n}}{10} \leq \frac{9^{1/n}}{10} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10} < 1$ , ce qui montre la convergence de la série  $(\sum u_n)$  quelle que soit la suite des décimales.

3. Voici deux exemples pour lesquels  $l = 1^-$  :

- pour  $u_n = \frac{1}{n}$ , on a  $\sqrt[n]{u_n} = e^{-(\ln n)/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^-$ . On sait par ailleurs que la série  $(\sum u_n)$  est divergente ;

— pour  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ , on a  $\sqrt[n]{u_n} = e^{-[\ln n(n+1)]/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^-$ . D'autre part, à l'aide d'une décomposition en éléments simples, on trouve  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , puis

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

et la série  $(\sum u_n)$  est convergente.

REMARQUE.

Une version plus générale de la règle de Cauchy s'énonce comme suit : soit  $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$  ( $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ).

Alors

- si  $l < 1$ ,  $(\sum u_n)$  est convergente ;
- si  $l > 1$ ,  $(\sum u_n)$  est divergente ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure ; toutefois si  $l = 1^+$ , alors  $(\sum u_n)$  est divergente.

### 4.3 Règle de d'Alembert

**Théorème 4.2 (Règle de d'Alembert<sup>2</sup>)** *Supposons que la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$  existe.*

Alors

- si  $l < 1$ ,  $(\sum u_n)$  convergente ;
- si  $l > 1$ ,  $(\sum u_n)$  divergente ;
- si  $l = 1$ , on ne peut conclure ; toutefois si plus précisément  $l = 1^+$ , alors  $(\sum u_n)$  divergente.

DÉMONSTRATION.

Traduisons  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0(\varepsilon), l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

— Si  $0 \leq l < 1$ , on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $l + \varepsilon < 1$  et donc, en posant  $n_0(\varepsilon) = n_0$ ,

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n_0}(l + \varepsilon)^{n-n_0}.$$

La série géométrique  $(\sum (l + \varepsilon)^n)$  est convergente et donc  $(\sum u_n)$  aussi.

— Si  $l > 1$ , on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $l - \varepsilon > 1$  et donc

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}(l - \varepsilon)^{n-n_0} \geq u_{n_0} > 0.$$

La série géométrique  $(\sum (l - \varepsilon)^n)$  est divergente (ou encore  $u_n$  ne tend pas vers 0) et donc  $(\sum u_n)$  aussi.

— Si  $l = 1^+$ , on a en particulier  $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$ ,  $u_n$  ne peut tendre vers 0 donc  $(\sum u_n)$  est divergente.

□

EXEMPLES.

2. Alembert, Jean Le Rond d' : mathématicien et philosophe français (Paris 1717–Paris 1783)

1. Reprenons l'exemple de la série « exponentielle » considéré dans l'introduction de ce chapitre :  $u_n = \frac{x^n}{n!}$ . On a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  qui prouve la convergence de la série  $\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .
2. Voici deux exemples pour lesquels  $l = 1^-$ . On reprend ceux illustrant la règle de Cauchy :
  - pour  $u_n = \frac{1}{n}$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1^-$ . On a vu que la série  $(\sum u_n)$  est divergente ;
  - pour  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1^-$ . On a vu que la série  $(\sum u_n)$  est convergente.

## REMARQUES.

1. Une version plus générale de la règle de d'Alembert s'énonce comme suit : soient  $l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  ( $\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ) et  $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  ( $\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ) ;
  - si  $L < 1$ ,  $(\sum u_n)$  est convergente ;
  - si  $l > 1$ ,  $(\sum u_n)$  est divergente ;
  - si  $l \leq 1 \leq L$ , on ne peut conclure.
2. On peut démontrer que si la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  existe alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$$

et donc pour les cas douteux des règles de Cauchy et de d'Alembert, lorsque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  existe, si l'une des deux règles ne permet pas de conclure, l'autre ne permet pas de conclure non plus.

## EXEMPLE.

La deuxième remarque ci-dessus appliquée à  $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!^2}{(2n+1)!}}$  permet de calculer la limite de  $u_n$  de la manière suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!^2}{(2n+3)!} / \frac{n!^2}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

## 4.4 Comparaison avec une intégrale, critère de Riemann

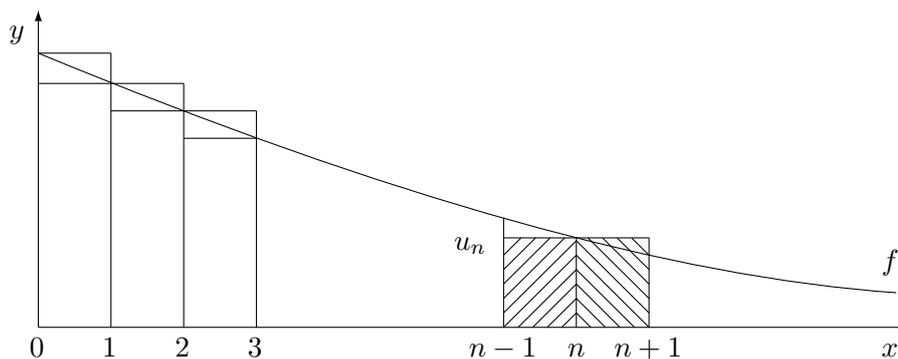
Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des séries « extraites » d'une fonction,  $(\sum f(n))$ , et on va mettre en relation les convergences de la série  $(\sum f(n))$  et de l'intégrale généralisée  $\int_0^\infty f(x) dx$ .

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction décroissante et  $u_n = f(n)$ . En interprétant  $u_n$  comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur  $f(n)$  on obtient l'encadrement (voir Fig. 3.2)

$$\forall n \geq 1, \int_n^{n+1} f(x) dx \leq u_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx.$$

En sommant de 0 ou 1 à  $N$  on trouve

$$\int_0^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq u_0 + \int_0^N f(x) dx.$$

FIGURE 3.2 – Comparaison série-intégrale : les deux rectangles hachurés ont chacun pour aire  $u_n$ 

Les suites  $N \mapsto \sum_{n=0}^N u_n$  et  $N \mapsto \int_0^N f(x) dx$  étant croissantes, on sait que leur convergence est équivalente au fait qu'elles soient majorées. Ainsi,

— si l'intégrale généralisée  $\int_0^\infty f(x) dx$  est convergente, alors

$$S_N \leq u_0 + \int_0^N f(x) dx \leq u_0 + \int_0^\infty f(x) dx.$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée donc convergente, ce qui entraîne la convergence de la série  $(\sum u_n)$ ;

— si la série  $(\sum u_n)$  est convergente, alors de la même manière

$$\int_0^N f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{N-1} u_n \leq \sum_{n=0}^\infty u_n.$$

La suite  $\left( \int_0^n f(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée donc convergente, ce qui entraîne la convergence de l'intégrale généralisée  $\int_0^\infty f(x) dx$ .

Par ailleurs, lorsque la série  $(\sum u_n)$  est convergente, la même méthode fournit un encadrement

pour le reste  $R_N = \sum_{n=N+1}^\infty u_n$  :

$$\int_{N+1}^\infty f(x) dx \leq R_N \leq \int_N^\infty f(x) dx.$$

On a donc prouvé le résultat suivant.

**Théorème 4.3** La série  $(\sum u_n)$  et l'intégrale généralisée  $\int_0^\infty f(x) dx$  sont de même nature. En cas de convergence, on a

$$\int_0^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=0}^\infty u_n \leq u_0 + \int_0^\infty f(x) dx \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^\infty f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^\infty f(x) dx.$$

Une application immédiate et fondamentale de ce résultat est le critère de Riemann<sup>3</sup> associé à la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  sur  $[1, +\infty[$ .

**Théorème 4.4 (Critère de Riemann)**    1. La série de Riemann  $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .

2. — Si  $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ ,  $(\sum u_n)$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .

— Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n < +\infty$  pour un  $\alpha > 1$  (resp.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n > 0$  pour un  $\alpha \leq 1$ ),  $(\sum u_n)$  est convergente (resp. divergente).

REMARQUES.

1. La série de Riemann conduit aux cas douteux des règles de Cauchy et de d'Alembert puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = 1^-$ .
2. Une autre démonstration de la convergence de la série de Riemann repose sur le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ , dans le cas où  $\alpha > 1$ , lequel assure l'existence d'un  $y \in ]x-1, x[$  tel que

$$\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{y^\alpha}.$$

Comme  $\frac{1}{y^\alpha} > \frac{1}{x^\alpha}$ , on a

$$\forall x > 1, \frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1} \left[ \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]$$

qui implique

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\alpha-1} \left[ \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right] = 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left[ 1 - \frac{1}{n^\alpha} \right] \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Ceci montre que la suite croissante  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n \geq 1}$  est majorée, donc convergente d'où la convergence de la série  $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$  lorsque  $\alpha > 1$ . Le cas  $\alpha = 1$  (série harmonique) a déjà été traité auparavant : la série  $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$  est divergente et lorsque  $\alpha < 1$ , on a  $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$  qui conduit à une série encore divergente.

COMPLÉMENT AUX RÈGLES DE CAUCHY ET DE D'ALEMBERT : RÈGLE DE GAUSS

Lorsque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^-$ , les règles de Cauchy et de d'Alembert ne permettent pas de conclure quant à la convergence de  $(\sum u_n)$ . Cependant si le rapport  $u_{n+1}/u_n$  admet un développement asymptotique d'une certaine forme, on peut conclure dans certains cas.

3. Riemann, Bernhard : mathématicien allemand (Brezelenz 1826–Selasca 1866)

**Théorème 4.5 (Règle de Gauss <sup>4</sup>)** Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$  où  $\beta > 1$ , alors il existe une constante  $A > 0$  telle que  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$  et la série  $(\sum u_n)$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .

DÉMONSTRATION.

L'objectif est de prouver la convergence de la suite  $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Pour cela, on introduit la suite de terme général  $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ . On va montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en utilisant la série de ses accroissements  $(\sum w_n)$  définie par  $w_n = v_n - v_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ . On a, en posant  $\gamma = \min(\beta, 2)$ ,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \alpha \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \left[ \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \right] = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right). \end{aligned}$$

Comme  $\gamma > 1$ , la série  $(\sum \frac{1}{n^\gamma})$  est convergente, donc la série  $(\sum w_n)$  l'est aussi. Ainsi la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Notons  $l$  sa limite :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n^\alpha u_n) = l$ . On en déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = e^l$ , soit encore, en posant  $A = e^l$ ,

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}.$$

□

EXEMPLE.

Série hypergéométrique : soit  $u_n = \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)b(b+1) \dots (b+n-1)}{c(c+1) \dots (c+n-1)d(d+1) \dots (d+n-1)}$  où  $a, b, c, d$  sont quatre réels positifs. On a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Effectuons un développement limité de  $u_{n+1}/u_n$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1 + \frac{a}{n})(1 + \frac{b}{n})}{(1 + \frac{c}{n})(1 + \frac{d}{n})} = 1 + \frac{a+b-c-d}{n} + \frac{A}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où  $A$  est une constante qu'il est inutile de calculer. Ainsi, la série  $(\sum u_n)$  est convergente si et seulement si  $a + b + 1 < c + d$ .

## 5 Séries numériques à termes réels ou complexes

### 5.1 Convergence absolue, semi-convergence

Lorsque l'on est en présence d'une série à termes réels ou complexes  $(\sum u_n)$ , on peut construire naturellement une série à termes positifs en considérant la série des valeurs absolues ou des modules  $(\sum |u_n|)$ . Cette partie fournit une relation entre les convergences des séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum |u_n|)$ .

4. Gauss, Carl Friedrich : astronome, mathématicien et physicien allemand (Brunswick 1777–Göttingen 1855)

**Définition 5.1** La série  $(\sum u_n)$  est dite absolument convergente lorsque la série  $(\sum |u_n|)$  est convergente.

Voici la relation entre convergence et convergence absolue.

**Théorème 5.1** La convergence absolue entraîne la convergence.

DÉMONSTRATION.

Elle repose sur le critère de Cauchy. Supposons la série  $(\sum u_n)$  absolument convergente. Soit  $\varepsilon > 0$ ; il existe un  $n_0$  tel que

$$\forall p, q \geq n_0 \text{ tels que } p \leq q, \sum_{k=p}^q |u_k| \leq \varepsilon.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \sum_{k=p}^q u_k \right| \leq \sum_{k=p}^q |u_k| \leq \varepsilon.$$

La série  $(\sum u_n)$  satisfait aussi au critère de Cauchy, elle est donc convergente. □

REMARQUE.

Une autre démonstration n'utilisant pas le critère de Cauchy consiste à séparer les termes positifs des négatifs. Notons  $u_n^+$  (resp.  $-u_n^-$ ) le  $n^{\text{e}}$  terme positif (resp. négatif) de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (on a donc  $u_n^+, u_n^- > 0$  en supposant pour simplifier qu'il n'y a pas de terme nul), puis  $S_n^+ = \sum_{k=1}^n u_k^+$  et  $S_n^- = \sum_{k=1}^n u_k^-$ . Il est clair que

$$S_n^+ \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{et} \quad S_n^- \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

ce qui montre que les suites croissantes  $(S_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  sont majorées donc convergentes, et alors les séries à termes positifs  $(\sum u_n^+)$  et  $(\sum u_n^-)$  sont convergentes. On a ensuite, en introduisant  $\varphi(n)$  (resp.  $\psi(n)$ ) le nombre de termes positifs (resp. négatifs) de la suite finie  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,

$$S_n = u_0 + S_{\varphi(n)}^+ - S_{\psi(n)}^-.$$

Les suites  $(S_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  étant convergentes, les suites extraites  $(S_{\varphi(n)}^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{\psi(n)}^-)_{n \in \mathbb{N}}$  le sont également et la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est aussi. D'où la convergence de la série  $(\sum u_n)$ .

EXEMPLE.

Pour  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ , on a  $|u_n| = \frac{1}{n^2}$  d'où la convergence absolue ainsi que la convergence de  $(\sum u_n)$ .

**Définition 5.2** Une série est dite semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

EXEMPLE.

La série harmonique alternée  $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$  est semi-convergente. On a vu dans l'introduction de ce chapitre que sa somme vaut  $-\ln 2$ .

## 5.2 Séries alternées, règle d'Abel

On étudie ici des séries dont le terme général est de la forme  $\varepsilon_n u_n$  avec des conditions portant sur les suites  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Théorème 5.2 (Critère des séries alternées)** Si  $u_n \searrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , alors la série  $(\sum (-1)^n u_n)$  est convergente. De plus son reste  $R_n$  est borné par  $u_{n+1}$ .

La notation  $u_n \searrow_{n \rightarrow \infty} 0$  signifie que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et tend vers 0.

DÉMONSTRATION.

On utilise le critère de Cauchy. On écrit

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=p}^q (-1)^k u_k \right| \\ &= |(u_p - u_{p+1}) + (u_{p+1} - u_{p+2}) + \cdots + (-1)^{q-p} u_q| \\ &= \begin{cases} |(u_p - u_{p+1}) + (u_{p+1} - u_{p+2}) + \cdots + (u_{q-2} - u_{q-1}) + u_q| & \text{si } q - p \text{ est pair,} \\ |(u_p - u_{p+1}) + (u_{p+1} - u_{p+2}) + \cdots + (u_{q-1} - u_q)| & \text{si } q - p \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et positive, on peut enlever la valeur absolue du membre de droite :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^q (-1)^k u_k \right| &= (u_p - u_{p+1}) + (u_{p+1} - u_{p+2}) + \cdots + (-1)^{q-p} u_q \\ &= u_p - (u_{p+1} - u_{p+1}) - (u_{p+2} - u_{p+3}) - \cdots - (-1)^{q-p-1} u_q. \end{aligned}$$

Toujours par décroissance, on voit de la même manière que

$$\left| \sum_{k=p}^q (-1)^k u_k \right| \leq u_p.$$

D'autre part,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0^+$ , donc  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p \geq n_0$ ,  $u_p \leq \varepsilon$ , et alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0 \text{ tels que } p \leq q, \left| \sum_{k=p}^q (-1)^k u_k \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de la série  $(\sum (-1)^n u_n)$  selon le critère de Cauchy. De plus, en faisant tendre  $q$  vers  $\infty$ , on obtient la majoration

$$\left| \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_p,$$

soit encore

$$|R_n| \leq u_{n+1}.$$

□

REMARQUES.

- Les deux suites de sommes partielles  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes :
  - $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante car  $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$  ;
  - $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante car  $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$  ;
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0$ .

Cela prouve que les deux suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes et ont même limite, donc que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On a de nouveau démontré la convergence de la série  $(\sum (-1)^n u_n)$ . De plus, on a l'encadrement (voir Fig. 3.3)

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

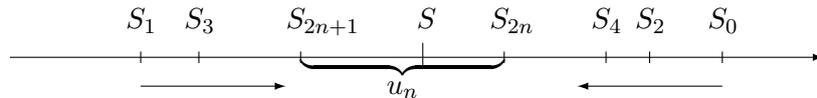


FIGURE 3.3 – Sommes partielles d'une série alternée

- Si l'on veut une approximation de la somme  $S$  avec une erreur inférieure à  $\varepsilon > 0$ , on choisira  $n$  tel que  $u_n < \varepsilon$  et  $S_n$  sera une telle approximation. Si  $n$  est pair, cette approximation est par excès, si  $n$  est impair, elle est par défaut.

Le critère des séries alternées est en fait un cas particulier de la règle d'Abel<sup>5</sup> énoncée ci-dessous. Elle repose sur le lemme suivant qui est une sorte d'intégration par parties pour des sommes discrètes.

**Lemme 5.1 (Transformation d'Abel)** On a, en posant  $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$ ,

$$\sum_{k=p+1}^q u_k \Delta v_k = u_q v_q - u_p v_p - \sum_{k=p+1}^q v_{k-1} \Delta u_k.$$

DÉMONSTRATION.

En remarquant que  $u_n \Delta v_n + v_{n-1} \Delta u_n = u_n v_n - u_{n-1} v_{n-1}$ , on trouve facilement

$$\sum_{k=p+1}^q (u_k \Delta v_k + v_{k-1} \Delta u_k) = \sum_{k=p+1}^q (u_k v_k - u_{k-1} v_{k-1}) = u_q v_q - u_p v_p.$$

□

REMARQUE.

La formule précédente est l'analogie de

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x) du(x).$$

5. Abel, Niels Henrik : mathématicien norvégien (Finnøy 1802–Arendal 1829)

**Théorème 5.3 (Règle d'Abel)** *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$- \varepsilon_n \underset{n \rightarrow \infty}{\searrow} 0,$$

$$- \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M,$$

*alors la série  $(\sum \varepsilon_n u_n)$  est convergente. De plus son reste  $R_n$  est borné par  $2M\varepsilon_{n+1}$ .*

La condition portant sur la série  $(\sum u_n)$  signifie que les sommes partielles de cette série sont bornées; elle s'écrit encore sous forme plus condensée  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| < +\infty$ . Cela n'entraîne pas nécessairement la convergence de la série  $(\sum u_n)$  comme on le voit par exemple pour  $u_n = (-1)^n$ .

DÉMONSTRATION.

On utilise de nouveau le critère de Cauchy. On pose

$$U_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n-1} + u_n \quad \text{pour } n \geq p.$$

On a  $\Delta U_n = U_n - U_{n-1} = u_n$  et

$$|U_n| = \left| \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=p-1}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| + \left| \sum_{k=p-1}^n u_k \right| \leq 2M.$$

En appliquant le lemme précédent on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q \varepsilon_k u_k &= \varepsilon_p u_p + \sum_{k=p+1}^q \varepsilon_k \Delta U_k \\ &= \varepsilon_p U_p + \left[ \varepsilon_q U_q - \varepsilon_p U_p - \sum_{k=p+1}^q U_{k-1} \Delta \varepsilon_k \right] \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) U_k + \varepsilon_q U_q. \end{aligned}$$

Ceci implique, la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant positive et décroissante et la suite  $(U_n)_{n \geq p}$  étant bornée par  $2M$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^q \varepsilon_k u_k \right| &\leq \sum_{k=p}^{q-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) |U_k| + \varepsilon_q |U_q| \\ &\leq 2M \left[ \sum_{k=p}^{q-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_q \right] = 2M\varepsilon_p. \end{aligned}$$

On conclut facilement comme dans la preuve du critère des séries alternées.  $\square$

REMARQUE.

Une version plus générale de la règle d'Abel ne suppose que la convergence de la série  $(\sum |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|)$  et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ .

## EXEMPLES.

1. *Séries alternées* : en prenant  $u_n = (-1)^n$ , les sommes partielles de la série  $(\sum u_n)$  prennent pour valeurs 0 et 1, elles sont donc bornées et on retrouve le critère des séries alternées. Toutefois, dans ce dernier, la majoration du reste est plus fine (il n'y a pas de facteur 2).
2. *Séries trigonométriques* : prenons  $u_n = e^{inx}$  où  $x$  est un réel fixé non multiple de  $2\pi$ . Vérifions que les sommes partielles de la série  $(\sum u_n)$  sont bornées. En notant que la série  $(\sum u_n)$  est une série géométrique de raison  $e^{ix} \neq 1$ , on trouve

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x/2}(e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2})} = e^{inx/2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

Cette inégalité est également valable en remplaçant la fonction exponentielle complexe par la fonction cosinus ou sinus et la règle d'Abel s'applique ici à des séries numériques de la forme  $(\sum a_n \cos(nx))$ ,  $(\sum b_n \sin(nx))$  et  $(\sum c_n e^{inx})$  où les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont décroissantes et tendent vers 0. Voici un exemple ci-après.

3. *Étude détaillée de la série  $(\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha})$  pour  $x \in ]0, 2\pi[$  :*
- si  $\alpha > 1$ , on a  $\left| \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$  et la série est absolument convergente ;
  - si  $\alpha \leq 0$ ,  $\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$  ne tend pas vers 0 car  $\cos(nx)$  ne tend pas vers 0. En effet, si on avait  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$ , on aurait  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(nx) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1)x = 0$ . Or  $\cos(n+1)x = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x$  ne tend pas vers 0 si  $x \neq \pi$  d'où une contradiction et la divergence de la série en découle. Si  $x = \pi$ ,  $\cos(nx) = (-1)^n$  et le résultat subsiste ;
  - si  $0 < \alpha \leq 1$ , la règle d'Abel assure la convergence de la série. En fait celle-ci n'est pas absolument convergente. En effet,

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right| \geq \frac{\cos^2(nx)}{n^\alpha} = \frac{1 + \cos(2nx)}{2n^\alpha}.$$

La série  $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$  est divergente et la série  $(\sum \frac{\cos(2nx)}{n^\alpha})$  est convergente pour  $x \neq \pi$ , donc la série  $(\sum \left| \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right|)$  est divergente. Ceci prouve que la série étudiée est semi-convergente. Si  $x = \pi$ ,  $\cos(nx) = (-1)^n$  et la même conclusion subsiste.

### 5.3 Sommation par tranches

Dans ce paragraphe, on examine l'effet occasionné par des regroupements de termes dans une série. Pour cela, on introduit une application strictement croissante  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\varphi(0) = 0$  et l'on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ . Le terme  $v_n$  représente la tranche  $u_{\varphi(n)} + \dots + u_{\varphi(n+1)-1}$ . L'entier  $\varphi(n)$  est le numéro du terme de la série  $(\sum u_n)$  où débute la  $n^e$

tranche dans la série  $(\sum u_n)$ . Par exemple, en choisissant  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 3$ ,  $\varphi(2) = 5$ ,  $\varphi(3) = 9$ , etc., cela donne les regroupements suivants :

$$\underbrace{(u_0 + u_1 + u_2)}_{v_0} + \underbrace{(u_3 + u_4)}_{v_1} + \underbrace{(u_5 + u_6 + u_7 + u_8)}_{v_2} + \underbrace{(u_9 + u_{10} + u_{11})}_{v_3} + \cdots$$

**Théorème 5.4** 1. Si la série  $(\sum u_n)$  est convergente, alors la série  $(\sum v_n)$  l'est aussi et les deux séries ont même somme :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

2. Réciproquement, si les conditions suivantes sont satisfaites :

- la série  $(\sum v_n)$  est convergente,
- $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |\varphi(n+1) - \varphi(n)| \leq M$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

alors  $(\sum u_n)$  est convergente et les deux séries ont même somme :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

Le résultat ci-dessus est une propriété d'associativité pour les séries. La condition  $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |\varphi(n+1) - \varphi(n)| \leq M$  peut s'écrire de manière plus condensée  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(n+1) - \varphi(n)| < +\infty$ , elle exprime que le nombre de termes dans chaque tranche est borné.

DÉMONSTRATION.

Introduisons les sommes partielles des séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  :

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k = U_{\varphi(n+1)-1}.$$

1. Supposons  $(\sum u_n)$  convergente et posons  $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ . Alors

$$V_n = U_{\varphi(n+1)-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} U$$

ce qui prouve la convergence de  $(\sum v_n)$  et l'égalité des deux sommes.

2. Supposons  $(\sum v_n)$  convergente et posons  $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ . Comme  $\varphi$  est strictement croissante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! k_n \in \mathbb{N}, \varphi(k_n + 1) \leq n < \varphi(k_n + 2)$$

et la suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi définie tend vers l'infini. On a alors

$$U_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{\varphi(k_n+1)-1}) + (u_{\varphi(k_n+1)} + \cdots + u_n) = V_{k_n} + (u_{\varphi(k_n+1)} + \cdots + u_n)$$

puis

$$|U_n - V| = |(U_n - V_{k_n}) + (V_{k_n} - V)| \leq |U_n - U_{\varphi(k_n+1)-1}| + |V_{k_n} - V|.$$

La série  $(\sum v_n)$  étant convergente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_{k_n} - V| = 0$ . D'autre part, si l'on a la majoration  $\forall n \in \mathbb{N}, |\varphi(n+1) - \varphi(n)| \leq M$ , alors

$$|U_n - U_{\varphi(k_n+1)-1}| \leq \sum_{i=\varphi(k_n+1)}^n |u_i| \leq \sum_{i=\varphi(k_n+1)}^{\varphi(k_n+2)-1} |u_i|$$

$$\begin{aligned} &\leq [\varphi(k_n + 2) - \varphi(k_n + 1)] \times \sup_{\varphi(k_n+1) \leq i < \varphi(k_n+2)} |u_i| \\ &\leq M \sup_{i \geq \varphi(k_n+1)} |u_i|. \end{aligned}$$

Enfin, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq \varphi(k_n+1)} |u_i| = 0$  et l'on voit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n - V| = 0$ , soit encore  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = V$ .

□

REMARQUE.

Une autre version de cette règle est la suivante : si

- la série  $(\sum v_n)$  est convergente,
- dans chaque tranche, les termes sont de même signe,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

alors la série  $(\sum u_n)$  est convergente et les deux séries ont même somme :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

EXEMPLE.

*Séries alternées* : on regroupe les termes deux par deux, ce qui correspond à  $\varphi(n) = 2n$ . Ainsi,  $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ . Pour  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , ceci donne

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} - 1 \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{2}n^{3/2}}.$$

La série  $(\sum v_n)$  est convergente, le nombre de termes dans chaque tranche est de deux et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . La série  $(\sum u_n)$  est par conséquent convergente.

## 5.4 Convergence commutative

Dans cette section, on examine l'effet généré par une permutation des termes d'une série. Pour cela, on introduit une permutation  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  (c'est-à-dire une bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ ) et l'on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .

**Théorème 5.5** *Si la série  $(\sum u_n)$  est absolument convergente, alors la série  $(\sum v_n)$  l'est aussi et les deux séries ont même somme :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .*

DÉMONSTRATION.

Posons  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ .

1. Supposons tout d'abord que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ .
  - D'une part,

$$V_n = \sum_{k=0}^n u_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

ce qui montre que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante majorée donc convergente, soit encore

la série  $(\sum v_n)$  est convergente et  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .

— D'autre part, puisque  $(\sum v_n)$  est maintenant convergente,

$$U_n = \sum_{k=0}^n v_{\varphi^{-1}(k)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

et l'on déduit en faisant tendre  $n$  vers  $\infty$  que  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ .

L'égalité des deux sommes est ainsi prouvée.

2. Dans le cas général, on introduit  $m_n = \max_{0 \leq k \leq n} \varphi(k)$ . On a l'inclusion

$$\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\} \subset \{0, 1, 2, \dots, m_n\}.$$

Soit alors  $I_n = \{0, 1, 2, \dots, m_n\} \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$ . Avec ces notations, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{m_n} u_k - \sum_{k=0}^n v_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{m_n} u_k - \sum_{k=0}^n u_{\varphi(k)} \right| = \left| \sum_{k \in I_n} u_k \right| \\ &\leq \sum_{k \in I_n} |u_k| = \sum_{k=0}^{m_n} |u_k| - \sum_{k=0}^n |u_{\varphi(k)}| = \sum_{k=0}^{m_n} |u_k| - \sum_{k=0}^n |v_k|. \end{aligned}$$

Les deuxième et troisième égalités sont dues au fait que l'ensemble  $\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$  est contenu dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, m_n\}$ . En appliquant la première partie de la démonstration à la série à termes positifs  $(\sum |u_n|)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} |u_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |v_k|.$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} |u_k| - \sum_{k=0}^n |v_k| \right] = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^{m_n} u_k - \sum_{k=0}^n v_k \right| = 0$  et donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n v_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

□

REMARQUE.

Le résultat précédent est une propriété de commutativité. Il peut être mis en défaut si la série  $(\sum u_n)$  est seulement semi-convergente. Considérons par exemple la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  et réordonnons-la en prenant successivement deux termes positifs suivis d'un terme négatif pris dans l'ordre naturel de la série :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

Cette nouvelle série  $(\sum v_n)$  correspond à la permutation

$$\varphi(3n) = 4n, \quad \varphi(3n+1) = 4n+2, \quad \varphi(3n+2) = 2n+1.$$

Elle peut s'étudier en regroupant ses termes trois par trois :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + \dots$$

Posons donc  $w_n = v_{3n} + v_{3n+1} + v_{3n+2} = u_{4n} + u_{4n+2} + u_{2n+1}$ . On a

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La série  $(\sum w_n)$  obtenue après permutation de la série convergente  $(\sum u_n)$  est donc divergente.

COMPLÉMENT : UN THÉORÈME DE RIEMANN

**Théorème 5.6** Soit  $(\sum u_n)$  une série semi-convergente. Alors pour tout  $S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , il existe une permutation  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = S.$$

Ce résultat pour le moins surprenant signifie que l'on peut réordonner les termes de façon à obtenir n'importe quelle somme fixée au préalable.

## 5.5 Série produit

L'objectif de cette partie est de proposer une méthode de développement pour le produit  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ . Dans le cas de sommes finies, le développement donne

$$\sum_{k=0}^m u_k \times \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_i v_j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} u_i v_j.$$

On a plus généralement pour un tableau de nombres  $(a_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$  :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^m a_{ij} \right) = \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^n a_{ij} \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} a_{ij} \right).$$

La première égalité correspond à une sommation par ligne, la deuxième à une sommation par colonne et la troisième à une sommation par diagonale (voir Fig. 3.4).

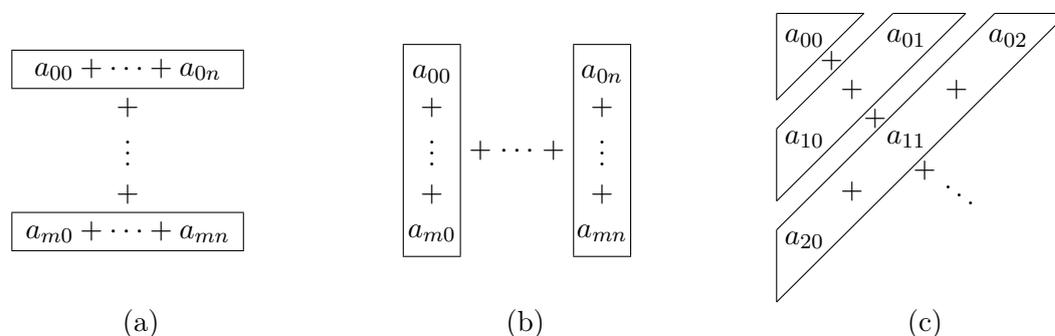


FIGURE 3.4 – Développement (a) par ligne (b) par colonne (c) par diagonale

Dans le cas de sommes comportant une infinité de termes, les deux premiers procédés de sommation posent un problème de comptage puisqu'ils nécessitent d'aller jusqu'à l'infini avant

de revenir à chaque début de ligne ou de colonne, alors que le troisième procédé qui est un balayage en diagonale écarte cette difficulté. Reprenons ce dernier dans le cas fini :

$$\sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \\ i+j=k}} a_{ij} \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(m, k)} a_{i, k-i} \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(n, k)} a_{k-j, j} \right).$$

Dans le cas infini, les relations précédentes s'écrivent formellement plus simplement

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j=k}} a_{ij} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{i, k-i} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j, j} \right)$$

ce qui conduit à la définition suivante.

**Définition 5.3** Soit  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  deux séries numériques. La série-produit de ces deux séries est la série  $(\sum w_n)$  de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

**Théorème 5.7** Si les séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  sont absolument convergentes, alors la série-produit  $(\sum w_n)$  est absolument convergente et sa somme est le produit des deux sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

DÉMONSTRATION.

Posons  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ ,  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$  et  $W_n = \sum_{k=0}^n w_k$ , puis  $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  et  $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

1. Cas où  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$  : en considérant le tableau carré de nombres  $(u_i v_j)_{\substack{0 \leq i \leq 2n \\ 0 \leq j \leq 2n}}$  et en remarquant que
  - $W_n$  représente la somme de tous les termes du tableau triangulaire  $T_n = (u_i v_j)_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j \leq n}}$ ,
  - $U_n V_n$  représente la somme de tous les termes du tableau carré  $C_n = (u_i v_j)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$ ,
  - $W_{2n}$  représente la somme de tous les termes du tableau triangulaire  $T_{2n} = (u_i v_j)_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j \leq 2n}}$ ,
 les inclusions  $T_n \subset C_n \subset T_{2n}$  entraînent les inégalités (voir Fig. 3.5)

$$W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n}.$$

Les séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  étant convergentes, les suites  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  le sont aussi. La suite croissante  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors majorée par  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n V_n) = UV$ , ce qui assure sa convergence et donc celle de la série  $(\sum w_n)$  ainsi que la majoration, en notant maintenant

$W = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ ,  $W \leq UV$ . D'autre part, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_{2n} = W$  et la majoration inverse  $UV \leq W$  est alors acquise. D'où l'égalité  $W = UV$ .

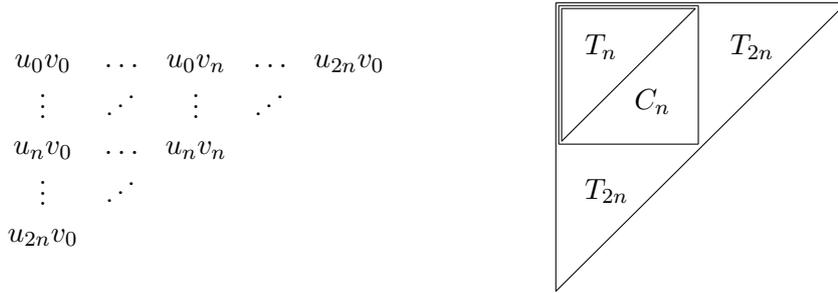


FIGURE 3.5 – Inclusions  $T_n \subset C_n \subset T_{2n}$

2. *Cas général* : d'après les interprétations de  $U_n V_n$  et de  $W_n$  à l'aide des tableaux  $C_n$  et  $T_n$ , on voit que  $U_n V_n - W_n$  représente la somme de tous les termes du tableau triangulaire  $C_n \setminus T_n = (u_i v_j)_{\substack{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \\ i+j > n}}$  et donc (voir Fig. 3.6)

$$\begin{aligned} |U_n V_n - W_n| &= |u_1 v_n + (u_2 v_{n-1} + u_2 v_n) + (u_3 v_{n-2} + u_3 v_{n-1} + u_3 v_n) \\ &\quad + \dots + (u_n v_1 + u_n v_2 + \dots + u_n v_n)| \\ &\leq |u_1| |v_n| + (|u_2| |v_{n-1}| + |u_2| |v_n|) + (|u_3| |v_{n-2}| + |u_3| |v_{n-1}| + |u_3| |v_n|) \\ &\quad + \dots + (|u_n| |v_1| + |u_n| |v_2| + \dots + |u_n| |v_n|) \\ &= \sum_{k=0}^n \tilde{u}_k \times \sum_{k=0}^n \tilde{v}_k - \sum_{k=0}^n \tilde{w}_k \end{aligned}$$

avec  $\tilde{u}_n = |u_n|$ ,  $\tilde{v}_n = |v_n|$  et  $\tilde{w}_n = \sum_{k=0}^n \tilde{u}_k \tilde{v}_{n-k}$ . La série  $(\sum \tilde{w}_n)$  est la série-produit associée aux séries à termes positifs convergentes  $(\sum |u_n|)$  et  $(\sum |v_n|)$ . D'après la première partie, la série  $(\sum \tilde{w}_n)$  est convergente et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{w}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n \times \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}_n.$$

De là on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \tilde{u}_k \times \sum_{k=0}^n \tilde{v}_k - \sum_{k=0}^n \tilde{w}_k \right) = 0$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ , c'est-à-dire  $UV = W$ .

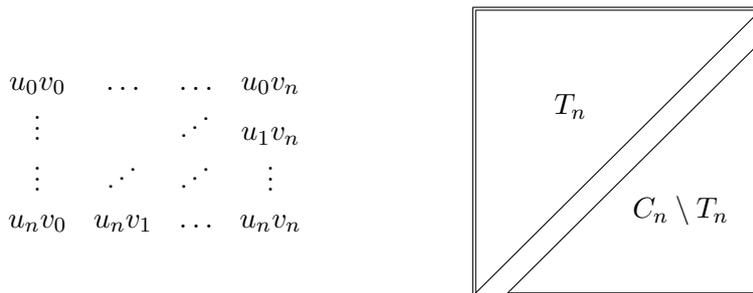


FIGURE 3.6 – Partition du carré  $C_n$  en  $T_n \cup (C_n \setminus T_n)$

□

EXEMPLE.

*Produit de deux exponentielles* : soit  $u_n = \frac{x^n}{n!}$  et  $v_n = \frac{y^n}{n!}$ . On a déjà vu que les séries

$(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  sont les développements de Taylor respectifs de  $e^x$  et  $e^y$ . Le terme général de la série-produit associée est donné par

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

La série  $(\sum w_n)$  n'est autre que le développement de Taylor de  $e^{x+y}$ . Le théorème précédent assure alors que

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \times e^y.}$$

On a ainsi démontré la formule bien connue ci-dessus sans utiliser la définition de l'exponentielle comme réciproque du logarithme.

REMARQUES.

1. Le résultat précédent peut être mis en défaut si les deux séries  $(\sum u_n)$  et  $(\sum v_n)$  sont seulement semi-convergentes. Considérons par exemple les séries semi-convergentes de termes généraux  $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ . On a

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire  $\forall x \in \mathbb{R}, x(a-x) \leq a^2/4$ , on voit que  $\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n+2}{2}$  et alors

$$|w_n| \geq (n+1) \times \frac{2}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

ce qui montre la divergence de la série  $(\sum w_n)$ .

2. Un autre résultat est dû à Mertens : si l'une des deux séries est convergente et l'autre absolument convergente, alors la série produit est convergente et sa somme est égale au produit des sommes des deux séries initiales.

## Exercices sur les séries numériques

**Exercice 1** Étudier la convergence des séries numériques  $(\sum u_n)$  de terme général donné par :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n + 1} & \text{b) } u_n = \frac{n}{2^n} & \text{c) } u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \\ \text{d) } u_n = \ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) & \text{e) } u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n & \text{f) } u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \\ \text{g) } u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2^n} & \text{sinon} \end{cases} & \text{h) } u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est une} \\ & \text{puissance de 2} \\ \frac{1}{2^n} & \text{sinon} \end{cases} & \\ \text{i) } u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} & \text{j) } u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} & \end{array}$$

**Exercice 2** Montrer la convergence des séries  $(\sum u_n)$  suivantes puis calculer leur somme

$$\sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} u_n :$$

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} & \text{b) } u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (\text{décomposer en} \\ & \text{éléments simples}) \\ \text{c) } u_n = \frac{an^2 + bn + c}{n!} & \text{d) } u_n = \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \\ \text{e) } u_n = \frac{1}{1 \cdot 2^n} + \frac{1}{1! \cdot 2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{k! \cdot 2^{n-k}} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot 1} & \end{array}$$

### Exercice 3

- Montrer que la série de terme général  $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$  est convergente (on pourra introduire  $\varepsilon_n$  tel que  $\sqrt{n^2 + 1} = n + \varepsilon_n$ ). Cette série est-elle absolument convergente ?
- Soit  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Montrer que la somme partielle des 1570 (resp. 1571) premiers termes approche  $S$  à 0,001 près par excès (resp. par défaut).
- La série de terme général  $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + n})$  est-elle convergente ?

**Exercice 4** Soit  $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ; pour cela, on majorera  $x^n \sin(\pi x)$  par une expression plus facile à intégrer.
- Écrire une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n+2}$ .
- Déduire des deux questions précédentes un équivalent pour  $u_n$  de la forme  $\frac{A}{n^\alpha}$  où  $A$  et  $\alpha$  sont deux réels que l'on déterminera. En déduire la convergence de la série  $(\sum u_n)$ .
- On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

- (a) Exprimer  $S_n$  par une intégrale.
- (b) Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{\sin \pi x}{1-x}$  est bornée sur  $[0, 1[$ .
- (c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+1} \frac{\sin \pi x}{1-x} dx = 0$ , puis que la somme de la série  $(\sum u_n)$  est donnée par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

**Exercice 5** On pose  $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive et décroissante. Donner une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n-1}$ .
2. En déduire pour  $u_n$  une expression de la forme

$$u_n = \frac{n!}{e} (e - w_n),$$

$w_n$  étant le terme général d'une suite à expliciter (on pourra introduire  $v_n = \frac{u_n}{n!}$ ).

3. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{e(n+1)} < u_n < \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la nature des séries  $(\sum u_n)$ ,  $(\sum \frac{u_n}{n})$ ,  $(\sum (-1)^n u_n)$ .

**Exercice 6** On rappelle que  $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$ .

1. Écrire un développement de Taylor de  $\arctan x$ . En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .
2. (a) Écrire un développement de Taylor de  $\ln(1+x)$ . En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ .
- (b) Calculer la somme de la série obtenue en prenant dans la série précédente un terme positif suivi de deux termes négatifs, dans l'ordre dans lequel ils se présentent :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

### Exercice 7 (Série hypergéométrique)

Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} \times \frac{x^n}{n!}.$$

On distinguera les cas  $|x| < 1$ ,  $|x| > 1$ ,  $|x| = 1$ . Pour le cas  $|x| = 1$ , on effectuera un développement limité de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  en  $\frac{1}{n}$  à l'ordre 2 et on appliquera la règle de Gauss.

**Exercice 8 (Constante d'Euler)**

On considère la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

et on introduit la série  $(\sum u_n)$  de somme partielle  $\gamma_n$ , c'est-à-dire telle que  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \gamma_n$ .

1. Montrer que la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend en décroissant vers une constante  $\gamma \in [0, 1]$  (*constante d'Euler*,  $\gamma = 0,577215\dots$ ).

2. Donner pour  $u_n$  un équivalent de la forme  $\frac{A}{n^\alpha}$  où  $A$  et  $\alpha$  sont deux réels à déterminer.

3. En comparant série et intégrale pour la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ ,  $a > 1$ , montrer que le reste de la série  $(\sum \frac{1}{n^a})$  est équivalent à  $\frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$ .

4. Dédire de ce qui précède que  $\gamma = \gamma_n - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

5. On pose

$$\gamma'_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \ln n$$

et on introduit la série  $(\sum u'_n)$  de somme partielle  $\gamma'_n$ .

Donner pour  $u'_n$  un équivalent de la forme  $\frac{B}{n^\beta}$ .

6. En utilisant de nouveau la question 3, montrer que le reste de la série  $(\sum u'_n)$  est équivalent à  $\frac{1}{12n^2}$ .

7. On pose

$$\gamma''_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \ln n$$

Comparer les vitesses de convergence des suites  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(\gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\gamma''_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 9 (Formule de Stirling<sup>6</sup>)**

Le but de cet exercice est de trouver un équivalent de  $n!$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

1. En comparant série et intégrale pour la fonction définie par  $x \mapsto \ln x$ , montrer que  $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(\ln n - 1)$ . On ne peut toutefois en déduire que  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  car  $\ln(n!) - n(\ln n - 1)$  ne tend pas vers 0.

2. On pose  $S_n = \ln(n!) - n(\ln n - 1)$  et on introduit la série  $(\sum u_n)$  de somme partielle  $S_n$ . Donner un développement limité de  $u_n$  en  $\frac{1}{n}$  à l'ordre 2.

3. Sachant que  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$  (voir ex. 8), en déduire qu'il existe une constante  $\lambda > 0$  telle que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

En fait  $\lambda = \sqrt{2\pi}$  peut être obtenu par la formule de Wallis :  $\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$  et

l'on a (*formule de Stirling*)

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}.$$

6. Stirling, James : mathématicien écossais (Garden 1692–Edinburgh 1770)

# Chapitre 4

## Suites et séries de fonctions

Dans le chapitre précédent, on a rencontré des séries dont le terme général pouvait dépendre, outre de l'indice de sommation  $n$ , d'une variable réelle ou complexe  $x$  comme par exemple  $(\sum \frac{x^n}{n!})$ . On a alors affaire à une *série de fonctions*  $(\sum[x \mapsto f_n(x)])$ . L'étude de la convergence a été menée en fixant la variable  $x$ , c'est une *convergence simple*. La somme d'une telle série est une fonction de  $x$ . Ce chapitre a pour objectif d'exhiber des conditions pour que certaines propriétés analytiques des fonctions  $f_n$  (continuité, intégrabilité, dérivabilité) se transmettent à la fonction somme  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ . Ce problème nécessitera une notion de convergence plus forte que la convergence simple : la *convergence uniforme*.

Dans ce chapitre on considère des suites ou séries de fonctions numériques (i.e. à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) définies sur une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

### 1 Suites de fonctions

#### 1.1 Convergences simple et uniforme

**Définition 1.1** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  définie sur  $I$ , et on notera  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S} f$ , si

$$\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Ceci s'écrit encore

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0(\varepsilon, x), |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

EXEMPLE.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $f_n(x) = x^n$ . Cette suite converge simplement vers la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 0$  si  $x \in [0, 1[$  et  $f(1) = 1$ . Notons

que dans cet exemple, les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[0, 1]$  et que la fonction  $f$  ne l'est pas (voir Fig. 4.1).

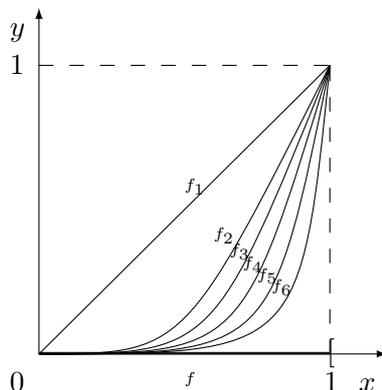


FIGURE 4.1 – La suite de fonctions  $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

L'exemple précédent montre que la continuité n'est pas conservée à la limite et laisse penser que la convergence simple n'est pas une bonne convergence au regard de propriétés analytiques. La définition suivante propose une autre notion de convergence qui permettra de conserver certaines propriétés analytiques après passage à la limite.

**Définition 1.2** La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f$ , et on notera  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{U} f$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci s'écrit plus simplement selon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

La différence entre les deux définitions se trouve dans la place du quantificateur «  $\forall x \in I$  » : dans le cas de la convergence simple, l'entier  $n_0(\varepsilon, x)$  dépend non seulement de  $\varepsilon$  mais aussi de  $x$ , alors que dans le cas de la convergence uniforme, l'entier  $n_0(\varepsilon)$  dépend seulement de  $\varepsilon$  mais pas de  $x$ . La quantité  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  sera notée  $\|f_n - f\|_I$  ; elle mesure d'une certaine façon l'écart global sur  $I$  entre les fonctions  $f_n$  et  $f$ . Le nombre  $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$  est une *norme* de  $f$ . L'application  $\| \cdot \|_I : \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  vérifie en effet les propriétés caractéristiques d'une norme :

- $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \|f\|_I = 0 \implies f = 0$  ;
- $\forall f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_I = |\lambda| \times \|f\|_I$  (*positive homogénéité*) ;
- $\forall f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \|f + g\|_I \leq \|f\|_I + \|g\|_I$  (*inégalité triangulaire*).

La convergence uniforme s'écrit alors sous la forme

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{U} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_I = 0.$$

D'un point de vue géométrique, la convergence uniforme traduit le fait que pour un  $\varepsilon > 0$  donné arbitrairement petit, tous les graphes des fonctions  $f_n$  à partir d'un certain rang sont contenus dans un tuyau de rayon  $\varepsilon$  centré autour du graphe de  $f$  (voir Fig. 4.2).

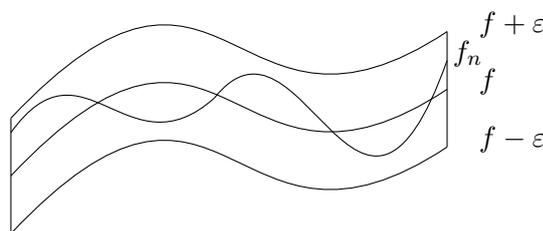


FIGURE 4.2 – Convergence uniforme

Il est clair que la convergence uniforme entraîne la convergence simple et que la limite est la même dans les deux cas.

**Proposition 1.1** Si  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{U} f$ , alors  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S} f$ .

EXEMPLE.

Reprenons l'exemple précédent :  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . On a vu que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 0$  si  $x \in [0, 1[$  et  $f(1) = 0$ . Étudions à présent la convergence uniforme.

- On a  $\|f_n - f\|_{[0,1]} = \max(\sup_{x \in [0,1[} |x^n|, |f_n(1) - f(1)|) = \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1$ , ceci ne tend pas vers 0 et montre ainsi que la convergence de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ .
- On voit de même que  $\|f_n - f\|_{[0,1[} = 1$  et donc que la convergence de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  n'est pas uniforme sur  $[0, 1[$ .
- Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . On a  $\|f_n - f\|_{[0,1-\varepsilon]} = \sup_{x \in [0,1-\varepsilon]} x^n = (1 - \varepsilon)^n = f_n(1 - \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Cette fois la convergence est uniforme sur tous les intervalles  $[0, 1 - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Notons que ceci n'entraîne pas la convergence uniforme sur leur réunion  $\bigcup_{\varepsilon \in ]0,1[} [0, 1 - \varepsilon] = [0, 1[$  comme cela a été vu dans le point précédent.

Comme dans le cas des suites numériques, la notion de suite de Cauchy joue un rôle important au niveau théorique dans l'étude des suites de fonctions numériques.

**Définition 1.3** La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément de Cauchy sur  $I$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0(\varepsilon), \|f_p - f_q\|_I \leq \varepsilon.$$

**Théorème 1.1** Une suite de fonctions numériques est uniformément convergente si et seulement si elle est uniformément de Cauchy.

## 1.2 Continuité, intégration, dérivation

Dans cette partie,  $I$  sera un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 1.2 (Continuité)** *Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues sur  $I$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors  $f$  est une fonction continue sur  $I$ .*

DÉMONSTRATION.

Soit  $x_0 \in I$ . Montrons que  $f$  est continue en  $x_0$ . En décomposant l'écart  $f(x) - f(x_0)$  selon

$$f(x) - f(x_0) = [f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x_0)] + [f_n(x_0) - f(x_0)],$$

on obtient la majoration

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f_n - f\|_I + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , on peut trouver un entier  $n_0$  tel que  $\|f_{n_0} - f\|_I \leq \varepsilon/3$ . D'autre part, la fonction  $f_{n_0}$  étant continue en  $x_0$ , on peut trouver  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$ ,  $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \varepsilon/3$ . Par conséquent,

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], |f(x) - f(x_0)| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de  $f$  en  $x_0$ . □

En prenant la contraposée de l'assertion du théorème précédent, on obtient un critère simple de convergence **non** uniforme.

**Corollaire 1.1** *Si les fonctions  $f_n$  sont continues et si la fonction  $f$  est discontinue, alors la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .*

EXEMPLE.

Dans l'exemple précédent ( $f_n(x) = x^n$ ), les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[0, 1]$  et la fonction limite  $f$  est discontinue en 0. Par conséquent, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .

**Proposition 1.2** *Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $f$  continue sur  $I$  et si  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $I$  convergeant vers un point  $a \in I$ , alors*

$$\lim_{n, p \rightarrow \infty} f_n(x_p) = f(a).$$

*En particulier,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{p \rightarrow \infty} f_n(x_p) \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_p) \right] \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(a).$$

DÉMONSTRATION.

Comme dans la démonstration précédente, on décompose l'écart  $f_n(x_p) - f(a)$  selon

$$|f_n(x_p) - f(a)| \leq |f_n(x_p) - f(x_p)| + |f(x_p) - f(a)| \leq \|f - f_n\|_I + |f(x_p) - f(a)|.$$

Les hypothèses entraînent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_I = 0$  et  $\lim_{p \rightarrow \infty} |f(x_p) - f(a)| = 0$  et la conclusion en découle.  $\square$

EXEMPLE.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ . Cette suite converge simplement vers la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 1$  si  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(0) = 0$ . Soit  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  la suite de points de  $[0, +\infty[$  définis par  $x_p = 1/p$ . Cette suite converge vers 0. On a  $f_n(x_p) = \frac{n}{n+p}$  et donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n}{n+p} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = f(0), \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+p} \right] &= \lim_{p \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq f(0). \end{aligned}$$

Ces deux limites étant différentes, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, +\infty[$ .

Voici un autre critère simple de convergence **non** uniforme.

**Corollaire 1.2** *Si la fonction  $f$  est continue en  $a$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  et si la suite  $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers  $f(a)$ , alors la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .*

EXEMPLE.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions continues définies sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) = e^{-nx}$ . En choisissant  $x_n = \alpha/n$  ( $\alpha > 0$  fixé),  $y_n = 1/n^2$ ,  $z_n = 1/\sqrt{n}$ , on trouve respectivement  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = e^{-\alpha}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_n) = 0$ . Ces trois limites sont différentes alors que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ , la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est donc pas uniformément convergente sur  $[0, +\infty[$ .

On suppose dans tout le reste de cette section que  $I = [a, b]$ . Posons  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$  et  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

**Théorème 1.3 (Intégration)** *Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues sur  $I = [a, b]$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors la suite de fonctions  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $F$  sur  $I$ . En particulier,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt.$$

DÉMONSTRATION.

Notons tout d'abord que la fonction  $f$  est continue donc intégrable sur  $I$ . On a ensuite pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \int_a^x \|f_n - f\|_I dt = (x - a) \|f_n - f\|_I \leq (b - a) \|f_n - f\|_I. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\|F_n - F\|_I \leq (b - a) \|f_n - f\|_I \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où le résultat.  $\square$

REMARQUE.

On peut affaiblir les hypothèses en supposant les fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seulement intégrables sur  $I$ .

EXEMPLE.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln x & \text{si } x \in ]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \begin{cases} n^2 x^n \ln x & \text{si } x \in ]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair qu'elles convergent simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{1/n}) = e \neq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(e^{1/n}) = +\infty \neq 0$  prouvant que les suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne sont pas uniformément convergentes sur  $[0, 1]$ . D'autre part

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_0^1 = -\frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De manière analogue

$$\int_0^1 g_n(x) dx = -\frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx.$$

Ces deux exemples montrent que lorsque la convergence n'est pas uniforme et que la suite des intégrales pourrait converger vers n'importe quelle limite.

**Théorème 1.4 (Dérivation)** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $C^1$  sur  $I = [a, b]$  telles que

- la suite de fonctions  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $g$  sur  $I$  ;
- la suite numérique  $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  soit convergente pour un  $x_0 \in I$ .

Alors, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f$  de classe  $C^1$  telle que  $f' = g$ . En d'autres termes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

DÉMONSTRATION.

Les fonctions  $f_n$  étant de classe  $C^1$ , on a

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Posons  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \alpha$ ,  $G_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$  et  $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$ . D'après le théorème d'intégration, on a

$$f_n = f_n(x_0) + G_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{U} f = \alpha + G \text{ sur } I.$$

La fonction  $f$  est clairement de classe  $C^1$  et sa dérivée est  $g$ . □

REMARQUES.

1. Il ne suffit pas de supposer seulement la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Par exemple,
  - la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de classe  $C^1$ , définie par  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ , converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f$  définie par  $f(x) = |x|$  et pourtant  $f$  n'est pas de classe  $C^1$ .
  - la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de classe  $C^1$ , définie par  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ , converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle  $f$  et pourtant  $f'$  n'est pas la limite de la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (qui est divergente).
2. On peut affaiblir les hypothèses en supposant les fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seulement dérivables sur  $I$ .

## 2 Séries de fonctions

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions. On définit la série de fonctions  $(\sum f_n)$  à l'aide de la suite de ses sommes partielles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

et l'on ramène l'étude de la série de fonctions  $(\sum f_n)$  à celle de la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 2.1 Convergences simple, uniforme et normale

**Définition 2.1** La série de fonctions  $(\sum f_n)$  est simplement convergente (resp. uniformément convergente) sur  $I$  si la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est simplement convergente (resp. uniformément convergente) sur  $I$ .

Lorsque la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est simplement convergente, on peut définir sa somme  $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  et son reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ . La convergence uniforme de la série  $(\sum f_n)$  se traduit

alors simplement par celle de la suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition 2.1** *Soit  $(\sum f_n)$  une série de fonctions simplement convergente sur  $I$ . La série  $(\sum f_n)$  est uniformément convergente sur  $I$  si et seulement si la suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle.*

En appliquant le critère de Cauchy uniforme à la suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on obtient le critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions.

**Théorème 2.1 (Critère de Cauchy uniforme)** *La série de fonctions  $(\sum f_n)$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0(\varepsilon) \text{ tels que } p \leq q, \left\| \sum_{k=p}^q f_k \right\|_I \leq \varepsilon.$$

La convergence uniforme d'une série de fonctions n'est pas toujours très facile à étudier. On va introduire une troisième notion de convergence qui permettra de faciliter le travail dans certains cas.

**Définition 2.2** *La série de fonctions  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur  $I$  si la série numérique  $(\sum \|f_n\|_I)$  est convergente.*

Les relations entre les différentes notions de convergence sont les suivantes.

**Proposition 2.2** *Convergence normale  $\implies$  convergence uniforme  $\implies$  convergence simple.*

DÉMONSTRATION.

Seule la première implication nécessite une justification. Elle résulte aisément des critères de Cauchy pour les séries numériques et les séries de fonctions ainsi que de l'inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{k=p}^q f_k \right\|_I \leq \sum_{k=p}^q \|f_k\|_I. \quad \square$$

EXEMPLE.

Considérons la série de fonctions de terme général défini sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ . On a  $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$ . La série numérique  $(\sum \frac{1}{n^2})$  étant convergente, la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  donc uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Règle d'Abel uniforme

La convergence uniforme n'entraîne pas nécessairement la convergence normale. La règle d'Abel ci-dessous permet dans certains cas de prouver la convergence uniforme d'une série de

fonctions lorsque celle-ci n'est pas normalement convergente.

**Théorème 2.2 (Règle d'Abel uniforme)** *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $\varepsilon_n \underset{n \rightarrow \infty}{\searrow} 0$  uniformément sur  $I$ ,
- $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{k=0}^n f_k \right\|_I \leq M$ ,

*alors la série de fonctions  $(\sum \varepsilon_n f_n)$  est uniformément convergente sur  $I$ . De plus son reste  $R_n$  est borné par  $2M \|\varepsilon_{n+1}\|_I$ .*

La notation  $\varepsilon_n \underset{n \rightarrow \infty}{\searrow} 0$  uniformément sur  $I$  signifie que la suite de fonctions  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante (décroissance par rapport à  $n$ ) et qu'elle converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle.

EXEMPLES.

1. *Critère des séries alternées uniforme* : un cas particulier de la règle précédente est le suivant. Si  $f_n \underset{n \rightarrow \infty}{\searrow} 0$  uniformément sur  $I$ , alors la série alternée de fonctions  $(\sum (-1)^n f_n)$  est uniformément convergente sur  $I$ . Par exemple, pour  $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ ,  $x \in [0, +\infty[$ ,  $n \geq 1$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante pour chaque  $x \in [0, +\infty[$  et  $\|f_n\|_{[0, +\infty[} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . On a donc  $f_n \underset{n \rightarrow \infty}{\searrow} 0$  uniformément sur  $[0, +\infty[$ , la série  $(\sum \|f_n\|_{[0, +\infty[})$  est divergente et alors la série  $(\sum (-1)^n f_n)$  est uniformément convergente sur  $[0, +\infty[$  mais par normalement convergente sur cet intervalle.

2. *Séries trigonométriques* : rappelons l'inégalité  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ . Lorsque  $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \pmod{2\pi}$ , on a  $\left| \sin \frac{x}{2} \right| \geq \sin \frac{\varepsilon}{2}$  et donc

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]}} \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

En conséquence, la règle d'Abel uniforme s'applique à des séries de fonctions de la forme  $(\sum [x \mapsto a_n(x) \cos(nx)])$ ,  $(\sum [x \mapsto b_n(x) \sin(nx)])$  et  $(\sum [x \mapsto c_n(x) e^{inx}])$  où les suites de fonctions  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont décroissantes et convergent vers la fonction nulle uniformément sur tout intervalle de la forme  $I_{k,\varepsilon} = [2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \in ]0, \pi[$  : les trois séries sont uniformément convergentes sur  $J_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_{k,\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ .

Notons qu'elles ne sont pas nécessairement uniformément convergentes sur la réunion

$$\bigcup_{\varepsilon \in ]0, \pi[} J_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

### 2.3 Continuité, intégration, dérivation

Les théorèmes de continuité, d'intégration et de dérivation énoncés dans le cadre des suites de fonctions s'appliquent immédiatement aux séries de fonctions.

**Théorème 2.3 (Continuité)** Si  $(\sum f_n)$  est une série de fonctions continues uniformément convergente sur  $I$ , alors  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  est une fonction continue sur  $I$ .

Supposons maintenant que  $I = [a, b]$ . Posons  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ .

**Théorème 2.4 (Intégration)** Si  $(\sum f_n)$  est une série de fonctions continues uniformément convergente sur  $I = [a, b]$ , alors la série de fonctions  $(\sum F_n)$  est uniformément convergente sur  $I$  et

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

**Théorème 2.5 (Dérivation)** Soit  $(\sum f_n)$  une série de fonctions de classe  $C^1$  sur  $I = [a, b]$  telle que

- la série de fonctions  $(\sum f'_n)$  soit uniformément convergente sur  $I$  ;
- la série numérique  $(\sum f_n(x_0))$  soit convergente pour un  $x_0 \in I$ .

Alors, la série  $(\sum f_n)$  est uniformément convergente sur  $I$  et sa somme est une fonction de classe  $C^1$ . De plus,

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n.$$

EXEMPLE.

Étude détaillée de la série de fonctions  $(\sum f_n)$  où  $f_n$  est définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

— Convergence simple :

on a

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq (e^{-x})^n.$$

Comme la série géométrique  $(\sum (e^{-x})^n)$  est convergente pour  $x > 0$  (sa raison est  $e^{-x} \in ]-1, 1[$ ), la série  $(\sum f_n(x))$  est absolument convergente pour tout  $x > 0$ . Dans le cas où  $x = 0$ ,  $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}$  et la série  $(\sum f_n(0))$  est semi-convergente. En conclusion, la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est simplement convergente sur  $[0, +\infty[$ . Notons  $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  sa somme.

— Convergence normale :

on a

$$\|f_n\|_{[0, +\infty[} = \frac{1}{n},$$

donc la série  $(\sum f_n)$  n'est pas normalement convergente sur  $[0, +\infty[$ . Par contre, pour un  $\varepsilon > 0$ ,

$$\|f_n\|_{[\varepsilon, +\infty[} = \frac{e^{-n\varepsilon}}{n} = f_n(\varepsilon)$$

et alors la série  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur tous les intervalles  $[\varepsilon, +\infty[$ ,  $\varepsilon > 0$ .

— *Convergence uniforme :*

d'après ce qui précède, on déduit que la série  $(\sum f_n)$  est uniformément convergente sur tous les intervalles  $[\varepsilon, +\infty[$ ,  $\varepsilon > 0$ . En fait, en utilisant le critère des séries alternées uniforme, on voit, puisque  $\frac{e^{-nx}}{n} \searrow 0$  uniformément sur  $[0, +\infty[$ , que la série  $(\sum f_n)$  est uniformément convergente sur  $[0, +\infty[$ .

— *Dérivabilité :*

les fonctions  $f_n$  sont de classe  $C^1$  et  $f'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$ . Comme

$$\forall \varepsilon > 0, \|f'_n\|_{[\varepsilon, +\infty[} = e^{-n\varepsilon} = (e^{-\varepsilon})^n,$$

la série géométrique  $(\sum (e^{-\varepsilon})^n)$  étant convergente, la série des dérivées  $(\sum f'_n)$  est normalement convergente donc uniformément convergente sur tous les intervalles  $[\varepsilon, +\infty[$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Par ailleurs,  $f'_n(0) = (-1)^{n+1}$ , donc la série  $(\sum f'_n(0))$  est divergente et la série  $(\sum f'_n)$  n'est pas uniformément convergente sur  $]0, +\infty[$  (sinon on aurait

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f'_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

qui n'existe pas). En conséquence, on peut dériver la série  $(\sum f_n)$  terme à terme sur tous les intervalles  $[\varepsilon, +\infty[$ ,  $\varepsilon > 0$ , et l'on a

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [\varepsilon, +\infty[, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

qui est encore équivalent à

$$\forall x \in ]0, +\infty[, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Remarquons que l'on a obtenu la validité de cette dernière égalité sur  $]0, +\infty[$  alors que la convergence de la série  $(\sum f'_n)$  n'est pas uniforme sur  $]0, +\infty[$ , ce qui n'est nullement contradictoire puisque la convergence uniforme est une condition suffisante mais non nécessaire pour assurer des propriétés analytiques sur la fonction somme.

Pour  $x > 0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1},$$

donc, en intégrant sur  $[a, +\infty[$  pour un  $a > 0$ ,

$$S(x) = S(a) + \int_a^x \frac{e^{-t}}{e^{-t} + 1} dt = S(a) - [\ln(e^{-t} + 1)]_a^x = S(a) + \ln(e^{-a} + 1) - \ln(e^{-x} + 1).$$

Enfin, faisons tendre  $a$  vers  $+\infty$  : la majoration triviale  $|S(a)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-an} = \frac{e^{-a}}{e^{-a} + 1}$

montre clairement que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = 0$  et donc

$$\forall x \in ]0, +\infty[, S(x) = -\ln(e^{-x} + 1).$$

Notons que cette égalité est aussi valable pour  $x = 0$  puisqu'on a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ , comme cela a déjà été vu à l'aide de la formule de Taylor appliquée à la fonction  $x \mapsto \ln(x+1)$ . On a ainsi obtenu

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n} = -\ln(e^{-x} + 1).$$

## Exercices sur les suites et séries de fonctions

**Exercice 1** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}$  de terme général donné par

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n} x.$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ .
2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ ? sur  $[a, b]$  pour  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ ?

**Exercice 2** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général défini sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = n(x^n - x^{n+1}).$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est simplement convergente sur  $[0, 1]$ .
2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $[0, 1]$ ? sur  $]0, 1[$ ? sur  $[0, \delta]$  pour  $\delta \in ]0, 1[$ ?

**Exercice 3** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général défini sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 4n - 4n^2 x & \text{si } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est simplement convergente sur  $[0, 1]$ .
2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $[0, 1]$ ? sur  $]0, 1[$ ? sur  $[\varepsilon, 1]$  pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ?

**Exercice 4** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}$  de terme général donné par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leq n, \\ 0 & \text{si } |x| > n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ .
2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ ? sur  $[a, b]$  pour  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ ?

**Exercice 5** On étudie la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général défini sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2 x^2 + 1}.$$

1. Donner le domaine  $D$  de convergence simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et préciser la fonction limite  $f$ .

2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $D$  ?
3. Donner le domaine  $D'$  de convergence simple de la suite des dérivées  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et préciser la fonction limite  $g$ .
4. La suite de fonctions  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $D'$  ? sur toute partie de  $D'$  de la forme  $] -\infty, -\delta] \cup [\varepsilon, +\infty[$  pour  $\delta, \varepsilon > 0$  ?
5. A-t-on  $g = f'$  sur  $D'$  ?

**Exercice 6** On étudie la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général défini sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

1. Donner le domaine  $D$  de convergence simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et préciser la fonction limite  $f$ .
2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $D$  ? sur  $]0, 2[$  ? sur  $[a, b]$  pour  $a, b \in ]0, 2[$  avec  $a < b$  ?
3. On pose  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ . La suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente vers  $\int_0^1 f(x) dx$  ?

**Exercice 7** On étudie la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général défini sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par

$$f_n(x) = n \cos^n x \sin x.$$

1. Donner le domaine  $D$  de convergence simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et préciser la fonction limite  $f$ .
2. Soit  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Déterminer la limite de la suite numérique  $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Calculer  $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$ . La suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente vers  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$  ?
4. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle uniformément convergente sur  $D$  ?

**Exercice 8**

1. Étudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}^+$  de la série de fonctions  $(\sum f_n)$  de terme général donné par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n + 1}.$$

2. On introduit le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ .
  - (a) Montrer que  $\sup_{x \in ]1, +\infty[} R_n(x) \geq \frac{1}{2}$ .
  - (b) La série de fonctions  $(\sum f_n)$  est-elle uniformément convergente sur  $[a, +\infty[$  pour  $a > 1$  ? sur  $]1, +\infty[$  ?

**Exercice 9** On considère la série de fonctions  $(\sum f_n)$  sur  $\mathbb{R}$  de terme général donné par

$$f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que la série  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que la série des dérivées  $(\sum f'_n)$  est uniformément convergente sur  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ , pour tout  $\alpha \in ]0, \pi[$ .
3. Montrer que la série des dérivées secondes  $(\sum f''_n)$  est divergente. Cependant la fonction somme  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

**Exercice 10** On pose  $f_n(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La série de fonctions  $(\sum f_n)$  est-elle uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ ?
2. On introduit le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ .
  - (a) Calculer  $R_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
  - (b) Montrer que la suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$ , et donc que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est uniformément convergente sur ces mêmes ensembles.
3. Soit  $g_n = (-1)^n f_n$ . Montrer que la série de fonctions  $(\sum g_n)$  est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11**

1. On considère la série de fonctions  $(\sum f_n)$  sur  $\mathbb{R}$  de terme général donné par

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}.$$

- (a) Montrer que la série  $(\sum f'_n)$  est uniformément convergente sur  $[-a, a]$  pour tout  $a \in [0, 2[$ .
- (b) Calculer  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$  pour tout  $x \in ] -2, 2[$ .
- (c) En déduire l'expression de  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  pour tout  $x \in ] -2, 2[$ . Donner la valeur numérique de la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ .

2. On considère la série de fonctions  $(\sum g_n)$  sur  $\mathbb{R}$  de terme général donné par

$$g_n(t) = \frac{\cos[(n+1)t]}{(n+1)2^n}.$$

- (a) Déterminer le domaine  $D$  de convergence simple de la série de fonctions  $(\sum g_n)$ . On pose  $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$  pour tout  $t \in D$ .
- (b) La série de fonctions  $(\sum g_n)$  est-elle uniformément convergente sur  $D$ ? La fonction  $S$  est-elle continue sur  $D$ ?
- (c) A-t-on  $S'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(t)$  pour tout  $t \in D$ ?

**Exercice 12** Le but de cet exercice est de prouver l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale ainsi que celle de la série.
2. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à  $e^y$  en posant  $y = -x \ln x$ , montrer l'inégalité

$$\left| \int_0^1 x^{-x} dx - \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^k}{k!} dx \right| \leq e^{1/e} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^{n+1}}{(n+1)!} dx.$$

3. On pose  $I_{n,k} = \int_0^1 x^n (\ln x)^k dx$ .
  - (a) Exprimer  $I_{n,k}$  en fonction de  $I_{n,k-1}$ .
  - (b) Calculer  $I_{n,0}$ , puis obtenir  $I_{n,n}$ .
  - (c) En déduire l'égalité annoncée.

# Chapitre 5

## Séries de Fourier

### 1 Introduction

De nombreux phénomènes de la vie courante sont de nature oscillatoire : signaux électriques, vibrations acoustiques, musique... Les célèbres problèmes des cordes vibrantes (vers 1750) et de la propagation de la chaleur (vers 1820) ont incité de nombreux physiciens à décomposer des grandeurs physiques, thermiques et autres en grandeurs « élémentaires », ou au contraire à reconstruire de telles grandeurs par superposition de grandeurs élémentaires.

Les fonctions  $x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$  et  $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$  sont périodiques de période  $T$ . La fréquence associée est  $F = \frac{1}{T}$  et la pulsation est  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$ . Avec ces notations, les fonctions  $x \mapsto \cos(n\omega x)$  et  $x \mapsto \sin(n\omega x)$  sont périodiques de période  $T_n = \frac{T}{n}$  ou encore de fréquence  $F_n = nF$ .

En superposant plusieurs signaux élémentaires périodiques  $x \mapsto a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$  ayant des fréquences multiples d'une même fréquence,  $F_n = nF$ , on construit un signal périodique

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)].$$

La fréquence de base  $F$  est la *fondamentale* et les fréquences  $F_n$ ,  $n \geq 2$ , sont les *harmoniques*.

Le principe de l'analyse de Fourier<sup>1</sup> consiste à l'inverse à décomposer un signal périodique en la superposition de signaux élémentaires ayant des fréquences multiples de la fréquence du signal étudié. Deux questions essentielles sur le plan mathématique se poseront alors :

- la série ainsi obtenue est-elle convergente ? uniformément convergente ?
- si oui, sa somme coïncide-t-elle avec le signal initial ?

L'analyse de Fourier fournit des conditions suffisantes, soit sur le signal initial, soit sur les coefficients  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pour obtenir des réponses positives à ces questions.

---

1. Fourier, baron Joseph : mathématicien français (Auxerre 1768–Paris 1830)

## UN PEU DE MUSIQUE

La succession d'harmoniques multiples entiers du fondamental conduit à une gamme musicale proposée par Zarlino<sup>2</sup> dont le principe consiste à définir des notes à partir de divisions entières d'une corde dans les six premiers rapports  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ . Le schéma est alors le suivant : en prenant pour fondamental par exemple la note  $do_1$  ( $ut_1$ ) de fréquence  $F = 65$  Hz,

harmoniques	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
notes	$do_1$	$do_2$	$sol_2$	$do_3$	$mi_3$	$sol_3$	$si_b_3$	$do_4$	$ré_4$	$mi_4$	$fa\sharp_4$	$sol_4$	$sol\sharp_4$	$si_b_4$	$si_4$	$do_5$

Voici quelques précisions sur ce schéma. Un doublement de fréquence fournit un écart d'une octave. Par exemple, pour la note  $do$  :

multiples de $F$	1	2	4	8	16
notes	$do_1$	$do_2$	$do_3$	$do_4$	$do_5$

On définit dans cette gamme la *quinte* comme étant le 3<sup>e</sup> harmonique ramené à la première octave (en divisant par une puissance de 2 de façon à obtenir une fréquence comprise entre  $1F$  et  $2F$ ), c'est la note  $sol_1$  de fréquence  $\frac{3}{2}F$  :

multiples de $F$	$\frac{3}{2}$	3	6	12
notes	$sol_1$	$sol_2$	$sol_3$	$sol_4$

puis la *tierce* comme étant le 5<sup>e</sup> harmonique ramené à la première octave, c'est la note  $mi_1$  de fréquence  $\frac{5}{4}F$  :

multiples de $F$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	5	10
notes	$mi_1$	$mi_2$	$mi_3$	$mi_4$

D'autres notes sont ensuite définies par transposition de l'accord *majeur parfait*. Cet accord est constitué des trois notes fondamentale-tierce-quinte jouées simultanément :  $do$ - $mi$ - $sol$ . Il contient les deux intervalles (écarts multiplicatifs de fréquences)  $do$ - $mi$  :  $5/4$ , et  $mi$ - $sol$  :  $(3/2)/(5/4) = 6/5$ . Les transpositions à la hausse et à la baisse de cet accord conduisirent Zarlino à définir d'autres notes selon le même schéma d'accord majeur conservant les mêmes intervalles.

1. Accord majeur parfait de fondamental  $sol_1$  :  $sol_1$ - $si_1$ - $ré_2$  ;
  - intervalle  $sol_1$ - $si_1$  :  $5/4$ , donc la note  $si_1$  a pour fréquence  $\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} F = \frac{15}{8} F$  ;
  - intervalle  $si_1$ - $ré_2$  :  $6/5$ , donc la note  $ré_2$  a pour fréquence  $\frac{6}{5} \times \frac{15}{8} F = \frac{9}{4} F$ , puis la note  $ré_1$  ramenée dans la première octave a pour fréquence  $\frac{9}{8} F$ .

2. Zarlino, Gioseffo : théoricien et compositeur italien (Chioggia 1517-Venise 1590)

2. Accord majeur parfait de quinte  $do_2$  (on choisit  $do_2$  plutôt que  $do_1$  pour être directement dans l'octave initiale) :  $fa_1-la_1-do_2$  ;

— intervalle  $la_1-do_2$  :  $6/5$ , donc la note  $la_1$  a pour fréquence  $\frac{5}{6} \times 2F = \frac{5}{3} F$  ;

— intervalle  $fa_1-la_1$  :  $5/4$ , donc la note  $fa_1$  a pour fréquence  $\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} F = \frac{4}{3} F$ .

Voici finalement les fréquences successives de la gamme de Zarlino :

notes	$do_1$	$ré_1$	$mi_1$	$fa_1$	$sol_1$	$la_1$	$si_1$	$do_2$
multiples de $F$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Dans cette gamme la note de référence  $la_3$  (*diapason*) a pour fréquence  $2^2 \times \frac{5}{3} F = 433,33$  Hz. Cette fréquence de référence a été très versatile au cours de l'histoire et sujette à de nombreuses polémiques ; sa valeur actuelle en France est de 440 Hz. La gamme de Zarlino pose des problèmes de justesse au niveau psycho-acoustique lorsque l'on transpose plusieurs fois une ligne mélodique. D'autres gammes ont été construites ; les premières remontent à l'époque de Pythagore. Aucune n'est parfaite pour respecter simultanément les règles mélodiques et harmoniques de la musique.

## 2 Préliminaires, séries trigonométriques

Le but de cette partie est d'essayer d'exprimer les coefficients  $a_n, b_n$  à partir du signal étudié. Ils vont être obtenus par intégration du signal multiplié par  $\cos(n\omega x)$  ou  $\sin(n\omega x)$  sur un intervalle d'une période. Ce résultat repose sur une propriété d'orthogonalité de ces deux familles de fonctions trigonométriques.

### 2.1 Orthogonalité

On part des égalités triviales

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^T \cos(n\omega x) dx = \int_0^T \sin(n\omega x) dx = 0.$$

À l'aide des formules classiques

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)], \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)], \end{aligned}$$

on obtient facilement pour  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^T \cos(m\omega x) \cos(n\omega x) dx = \int_0^T \sin(m\omega x) \sin(n\omega x) dx = \begin{cases} T/2 & \text{si } m = n \geq 1 \\ T & \text{si } m = n = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

et

$$\int_0^T \cos(m\omega x) \sin(n\omega x) dx = 0.$$

Signalons que l'on a de même avec les fonctions exponentielles complexes

$$\int_0^T e^{im\omega x} e^{-in\omega x} dx = \begin{cases} T & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Ces relations peuvent s'interpréter en termes d'orthogonalité. Par exemple, dans l'espace, on définit le *produit scalaire* par rapport à une base de référence  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de deux vecteurs  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

et l'on dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont *orthogonaux* lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . La *norme* associée à ce produit scalaire est définie par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ici, on construit par analogie un produit scalaire de deux fonctions réelles  $f$  et  $g$  en posant

$$f \cdot g = \int_0^T f(x) g(x) dx$$

et l'on dit que les fonctions  $f$  et  $g$  sont *orthogonales* lorsque  $f \cdot g = 0$ . On associe également une *norme* à ce produit scalaire selon

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T f(x)^2 dx}.$$

Ainsi, pour  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

- les fonctions  $x \mapsto \cos(m\omega x)$  et  $x \mapsto \cos(n\omega x)$  sont orthogonales si  $m \neq n$  ;
- les fonctions  $x \mapsto \sin(m\omega x)$  et  $x \mapsto \sin(n\omega x)$  sont orthogonales si  $m \neq n$  ;
- les fonctions  $x \mapsto \cos(m\omega x)$  et  $x \mapsto \sin(n\omega x)$  sont orthogonales.

Pour des fonctions complexes, en posant cette fois,

$$f \cdot g = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T |f(x)|^2 dx}$$

on voit de même que pour  $m, n \in \mathbb{Z}$  les fonctions  $x \mapsto e^{im\omega x}$  et  $x \mapsto e^{-in\omega x}$  sont orthogonales si  $m \neq n$ .

## 2.2 Signaux élémentaires

Introduisons les fonctions suivantes, qu'on appellera signaux élémentaires,

$$f_0(x) = a_0, \quad f_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x), \quad n \geq 1$$

qui peuvent encore s'écrire sous forme complexe

$$f_0(x) = c_0, \quad f_n(x) = c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}, \quad n \geq 1$$

avec  $c_n$  défini pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  selon

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

En calculant les intégrales  $\int_0^T f_n(x) \cos(n\omega x) dx$ ,  $\int_0^T f_n(x) \sin(n\omega x) dx$  et  $\int_0^T f_n(x) e^{-in\omega x} dx$ , on voit facilement, en utilisant le paragraphe précédent, que

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f_n(x) dx \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f_n(x) \cos(n\omega x) dx \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f_n(x) \sin(n\omega x) dx \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

De même

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_n(x) e^{-in\omega x} dx \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

### 2.3 Séries trigonométriques

Supposons la série de fonctions  $(\sum f_n)$  uniformément convergente sur  $[0, T]$  et posons  $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ . Cette condition est remplie notamment dans le cas où les séries  $(\sum a_n)$  et  $(\sum b_n)$  sont absolument convergentes : du fait de l'inégalité  $|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$ , la série  $(\sum f_n)$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ . Notons également que dans le cas où les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers 0 en décroissant, d'après la règle d'Abel uniforme, la série de fonctions  $(\sum f_n)$  est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme  $[\varepsilon, T - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \in ]0, T/2[$ . Par contre la convergence n'est pas nécessairement uniforme sur  $[0, T]$ .

On a alors le même type de formules. En effet, la convergence uniforme et l'orthogonalité impliquent pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^T f_m(x) \cos(n\omega x) dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^T \cos(m\omega x) \cos(n\omega x) dx + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \int_0^T \sin(m\omega x) \cos(n\omega x) dx = a_n \frac{T}{2} \end{aligned}$$

et pour  $n = 0$  :

$$\int_0^T f(x) dx = a_0 T.$$

On obtient des résultats similaires en remplaçant  $\cos(n\omega x)$  par  $\sin(n\omega x)$ . D'où les relations

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) dx \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

De la même manière,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Notons que lorsque  $f$  est une fonction paire, les coefficients  $b_n$  sont nuls et les  $a_n$  deviennent

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \text{pour } n \geq 1,$$

et lorsque  $f$  est une fonction impaire, les coefficients  $a_n$  sont nuls et les  $b_n$  deviennent

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

On finira cette étude préliminaire en énonçant une propriété de convergence des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Lemme 2.1 (Riemann-Lebesgue<sup>3</sup>)** Si  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, T]$ , les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers 0.

DÉMONSTRATION.

Montrons par exemple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ . Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx &= \left[ -f(x) \frac{e^{-in\omega x}}{in\omega} \right]_0^T + \frac{1}{in\omega} \int_0^T f'(x) e^{-in\omega x} dx \\ &= \frac{f(0) - f(T)}{in\omega} + \frac{1}{in\omega} \int_0^T f'(x) e^{-in\omega x} dx. \end{aligned}$$

La fonction  $f$  étant de classe  $C^1$ ,  $f$  et  $f'$  sont bornées, on a donc

$$\left| \int_0^T f'(x) e^{-in\omega x} dx \right| \leq \int_0^T |f'(x)| dx \leq T \sup_{x \in [0, T]} |f'(x)|$$

et alors il existe une constante  $A$  telle que

$$\left| \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx \right| \leq \frac{A}{n}.$$

D'où le résultat. □

REMARQUES.

1. Le lemme de Riemann-Lebesgue est en fait valable pour une fonction  $f$  intégrable sur  $[0, T]$ .
2. Si  $f$  est  $T$ -périodique de classe  $C^1$ , en notant de manière plus précise  $c_n(f)$  et  $c_n(f')$  les coefficients précédemment définis respectivement associés à  $f$  et  $f'$ , on a vu au cours de la démonstration précédente que pour  $n \geq 1$

$$c_n(f') = in\omega c_n(f).$$

Plus généralement, si  $f$  est  $T$ -périodique de classe  $C^p$ ,

$$c_n(f^{(p)}) = (in\omega)^p c_n(f).$$

---

3. Lebesgue, Henri : mathématicien français (Beauvais 1875–Paris 1941)

Le résultat ci-dessous apporte une justification à l'intérêt particulier que l'on accorde aux séries trigonométriques dans le cadre de l'approximation des fonctions. Introduisons la notation  $e_n(x) = e^{in\omega x}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . La propriété d'orthogonalité des fonctions  $e_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , conduit au résultat d'optimalité suivant.

**Théorème 2.1 (Meilleure approximation trigonométrique)** *Le polynôme trigonométrique  $\sum_{k=-n}^n c_k e_k$  est la meilleure approximation trigonométrique de  $f$  au sens des moindres carrés.*

Cela signifie que si  $\sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k$  est un polynôme trigonométrique quelconque, la fonction  $f$  est plus proche de  $\sum_{k=-n}^n c_k e_k$  que de  $\sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k$  selon la norme  $\| \cdot \|_2$ .

DÉMONSTRATION.

Soit  $S_{n,f} = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$  le polynôme trigonométrique associé à  $f$  et  $Q = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k$  un autre polynôme trigonométrique. En utilisant la formule

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + 2\Re e \left[ \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx \right] + \|g\|_2^2$$

on a

$$\begin{aligned} \|f - Q\|_2^2 &= \left\| \left( f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right) + \sum_{k=-n}^n (c_k - \gamma_k) e_k \right\|_2^2 \\ &= \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2^2 + 2\Re e \left[ \int_0^T \left( f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e_k(x) \right) \overline{\sum_{l=-n}^n (c_l - \gamma_l) e_l(x)} dx \right] + \left\| \sum_{k=-n}^n (c_k - \gamma_k) e_k \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left( f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e_k(x) \right) \overline{\sum_{l=-n}^n (c_l - \gamma_l) e_l(x)} dx \\ &= \sum_{l=-n}^n \overline{(c_l - \gamma_l)} \int_0^T f(x) \overline{e_l(x)} dx - \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n c_k \overline{(c_l - \gamma_l)} \int_0^T e_k(x) \overline{e_l(x)} dx. \end{aligned}$$

L'orthogonalité des fonctions  $e_k$ ,  $|k| \leq n$ , assure que

$$\int_0^T e_k(x) \overline{e_l(x)} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ T & \text{si } k = l, \end{cases}$$

et donc

$$\sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n c_k \overline{(c_l - \gamma_l)} \int_0^T e_k(x) \overline{e_l(x)} dx = T \sum_{k=-n}^n c_k \overline{(c_k - \gamma_k)}.$$

D'autre part, par définition des coefficients  $c_n$ , on a

$$\sum_{l=-n}^n \overline{(c_l - \gamma_l)} \int_0^T f(x) \overline{e_l(x)} dx = T \sum_{l=-n}^n c_l \overline{(c_l - \gamma_l)}.$$

D'où

$$\int_0^T \left( f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e_k(x) \right) \overline{\sum_{l=-n}^n (c_l - \gamma_l) e_l(x)} dx = 0;$$

en d'autres termes, les fonctions  $f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k$  et  $\sum_{l=-n}^n (c_l - \gamma_l) e_l$  sont orthogonales. Finalement,

$$\|f - Q\|_2^2 = \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2^2 + \left\| \sum_{k=-n}^n (c_k - \gamma_k) e_k \right\|_2^2 \geq \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k \right\|_2^2 = \|f - S_{n,f}\|_2^2.$$

L'écart  $\|f - S_{n,f}\|_2$  est donc plus petit que n'importe quel autre écart  $\|f - Q\|_2$ .  $\square$

### 3 Séries de Fourier

**Définition 3.1** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique intégrable sur  $[0, T]$ . La série de Fourier de la fonction  $f$  est la série de fonctions  $(\sum [x \mapsto a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)])$ . En cas de convergence, on notera  $S_f$  sa somme :

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

La notation  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$  est à comprendre comme étant la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=n} u_k$ .

**Théorème 3.1 (Dirichlet<sup>4</sup>)** Si  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, T]$ , alors sa série de Fourier est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$  et sa somme est égale à la fonction  $\tilde{f}$  définie par  $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ . Si  $f$  est continue en  $x$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x)$ . En résumé :

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'assertion «  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, T]$  » signifie que  $f$  et  $f'$  admettent au plus un nombre fini de discontinuités et que ces discontinuités sont de première espèce, c'est-à-dire qu'en ces points,  $f$  et  $f'$  ont des limites à droite et à gauche finies. Les notations  $f(x^+)$  et  $f(x^-)$  désignent respectivement les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $x$ .

DÉMONSTRATION.

Rappelons la notation  $S_{n,f}(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega x}$ . En utilisant l'expression des  $c_k$ , on peut écrire  $S_{n,f}(x)$  sous la forme

$$S_{n,f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y) \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ik\omega(y-x)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(y) D_n(y-x) dy$$

où

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^n e^{-ik\omega z} = e^{in\omega z} \sum_{k=0}^{2n} (e^{-i\omega z})^k = e^{in\omega z} \times \frac{1 - e^{-i(2n+1)\omega z}}{1 - e^{-i\omega z}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\omega z} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega z}}{e^{i\omega z/2} - e^{-i\omega z/2}}$$

soit finalement

$$D_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\omega z}{\sin\frac{1}{2}\omega z} & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \text{si } z \in T\mathbb{Z}. \end{cases}$$

4. Dirichlet, Gustave Lejeune : mathématicien français (Düren 1805–Göttingen 1859)

La fonction  $D_n$  porte le nom de *noyau de Dirichlet*. Notons que c'est une fonction  $T$ -périodique paire et par conséquent on peut remplacer l'intervalle d'intégration  $[0, T]$  par n'importe quel intervalle d'amplitude  $T$  pour obtenir

$$S_{n,f}(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y+x) D_n(y) dy = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [f(x+y) + f(x-y)] D_n(y) dy.$$

Pour la fonction constante  $f = 1$ , la formule précédente donne

$$S_{n,1}(x) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} D_n(y) dy.$$

Par ailleurs, il est clair, en effectuant un calcul direct, que  $S_{n,1}(x) = 1$  et l'on obtient l'égalité (non triviale!)

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} D_n(y) dy = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{n,f}(x) - \tilde{f}(x) &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [f(x+y) + f(x-y)] D_n(y) dy - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \times \frac{2}{T} \int_0^{T/2} D_n(y) dy \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [f(x+y) + f(x-y) - f(x^+) - f(x^-)] D_n(y) dy \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} g_x^+(y) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega y dy + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} g_x^-(y) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega y dy \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$g_x^+(y) = \frac{f(x+y) - f(x^+)}{\sin \frac{1}{2} \omega y} \quad \text{et} \quad g_x^-(y) = \frac{f(x-y) - f(x^-)}{\sin \frac{1}{2} \omega y}.$$

Les hypothèses faites sur  $f$  entraînent que les fonctions  $g_x^+$  et  $g_x^-$  sont continues par morceaux sur  $[0, T/2]$ . D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, les intégrales  $\frac{1}{T} \int_0^{T/2} g_x^+(y) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega y dy$  et  $\frac{1}{T} \int_0^{T/2} g_x^-(y) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega y dy$  tendent vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Ceci prouve que

$$S_{n,f}(x) - \tilde{f}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

d'où le résultat. □

### COMPLÉMENTS AU THÉORÈME DE DIRICHLET

**Proposition 3.1** *Sous les hypothèses du théorème de Dirichlet,*

- la série de Fourier de  $f$  converge uniformément sur tout intervalle fermé de continuité de  $f$  ;
- si la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , sa série de Fourier est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .

Le deuxième point peut se voir facilement dans le cas où  $f$  est de classe  $C^2$ . En effet, dans ce cas, ses coefficients de Fourier complexes peuvent s'écrire comme cela a déjà été vu

$$c_n(f) = -\frac{1}{n^2 \omega^2} c_n(f'').$$

Les coefficients de Fourier de  $f''$ ,  $c_n(f'')$ , sont bornés, il existe donc une constante  $A > 0$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|c_n(f)| \leq \frac{A}{n^2}$  qui prouve bien la convergence normale.

En examinant directement la série de Fourier, on peut dans certains cas conclure que sa somme coïncide avec la fonction  $f$ .

**Proposition 3.2** *Si la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et si la série de Fourier de  $f$  est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ , alors  $S_f = f$  sur  $\mathbb{R}$ .*

DÉMONSTRATION.

La série de Fourier de  $f$  étant uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ , on peut l'intégrer terme à terme après avoir multiplié chaque terme par  $e^{-in\omega x}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , pour s'apercevoir que  $S_f$  a les mêmes coefficients de Fourier que  $f$ . En effet,

$$\begin{aligned} c_n(S_f) &= \frac{1}{T} \int_0^T S_f(x) e^{-in\omega x} dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{im\omega x} \right) e^{-in\omega x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) \times \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(m-n)\omega x} dx = c_n(f). \end{aligned}$$

De plus, les fonctions  $f$  et  $S_f$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Dans ces conditions, on peut montrer que ces fonctions coïncident.  $\square$

EXEMPLES.

1. Soit  $f_1$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi[$  par  $f_1(x) = 1$  si  $0 \leq x < \pi$  et  $f_1(x) = -1$  si  $-\pi \leq x < 0$ . La fonction  $f_1$  étant impaire, sa série de Fourier est une série de sinus :

$$S_{f_1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)x).$$

La fonction  $f_1$  est  $C^1$  par morceaux et ses points de discontinuité sont les points  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , en lesquels la valeur de  $\tilde{f}_1$  est 0. Le théorème de Dirichlet assure que

$$S_{f_1}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme  $[k\pi + \varepsilon, (k+1)\pi - \varepsilon]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ . Cela peut se retrouver directement sur la série de Fourier en invoquant la règle d'Abel uniforme. Les sommes partielles  $S_{n,f_1}$  sont toutes continues en  $k\pi$  alors que  $f_1$  n'est pas continue en ces points. La convergence ne peut donc être uniforme sur  $\mathbb{R}$  : c'est le *phénomène de Gibbs*<sup>5</sup>.

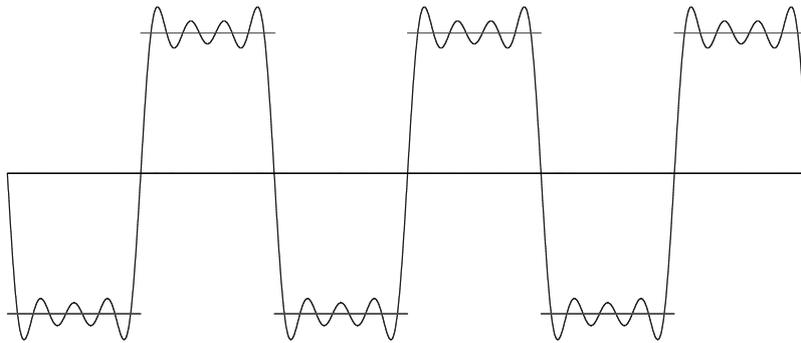


FIGURE 5.1 – Série de Fourier de  $f_1$

2. Soit  $f_2$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi[$  par  $f_2(x) = x$ . La fonction  $f_2$  étant impaire, sa série de Fourier est une série de sinus :

$$S_{f_2}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

5. Gibbs, Willard : physicien américain (New Haven 1839–New Haven 1903)

La fonction  $f_2$  est  $C^1$  par morceaux et ses points de discontinuité sont les points  $(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , en lesquels la valeur de  $f_2$  est 0. Le théorème de Dirichlet affirme que

$$S_{f_2}(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z} + \pi), \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} + \pi. \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme  $[(2k-1)\pi + \varepsilon, (2k+1)\pi - \varepsilon]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ .

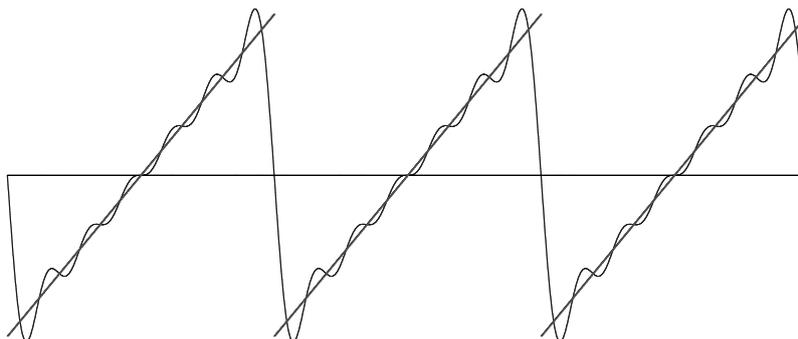


FIGURE 5.2 – Série de Fourier de  $f_2$

3. Soit  $f_3$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f_3(x) = |x|$ . La fonction  $f_3$  étant paire, sa série de Fourier est une série de cosinus :

$$S_{f_3}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2p+1)x.$$

La fonction  $f_3$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $C^1$  par morceaux. Le théorème de Dirichlet assure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_{f_3}(x) = f_3(x).$$

On voit d'ailleurs très facilement que la convergence est normale sur  $\mathbb{R}$ . En  $x = 0$  on trouve

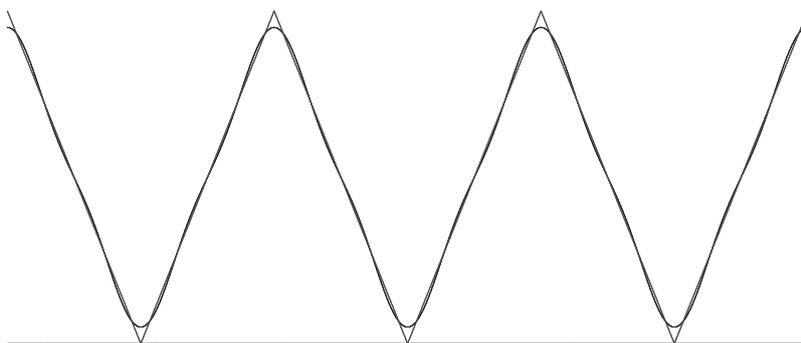
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En distinguant dans cette somme entiers pairs et impairs, on voit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

ce qui implique  $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$  ou encore

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

FIGURE 5.3 – Série de Fourier de  $f_3$ 

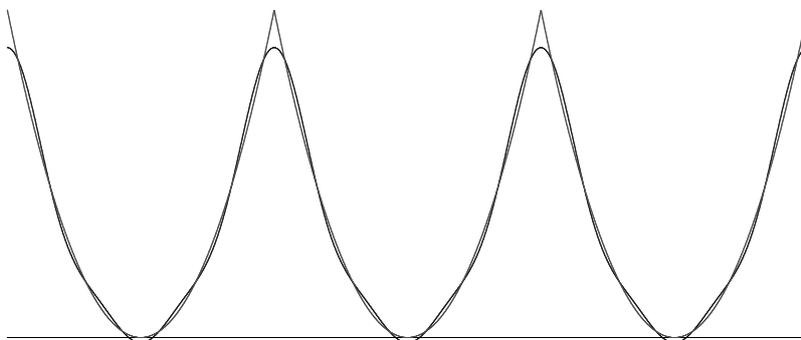
4. Soit  $f_4$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f_4(x) = x^2$ . La fonction  $f_4$  étant paire, sa série de Fourier est une série de cosinus :

$$S_{f_4}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

On a encore dans ce cas  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $S_{f_4}(x) = f_4(x)$  et la convergence est normale sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $x = 0$  on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

et pour  $x = \pi$  on retrouve  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

FIGURE 5.4 – Série de Fourier de  $f_4$

**Théorème 3.2 (Égalité de Bessel<sup>6</sup>-Parseval<sup>7</sup>)** Soit  $f$  et  $g$  des fonctions continues sur  $[0, T]$ , de coefficients de Fourier respectifs  $a_n, b_n, c_n$  et  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ . On a

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx = 2a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{\gamma_n}.$$

En particulier,

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

DÉMONSTRATION.

On ne va démontrer qu'une inégalité. Rappelons les notations  $e_k(x) = e^{ik\omega x}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $S_{n,f} = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{T} \int_0^T |(f(x) - S_{n,f}(x)) + S_{n,f}(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{T} \left[ \int_0^T |f(x) - S_{n,f}(x)|^2 dx + 2\Re \left[ \int_0^T (f(x) - S_{n,f}(x)) \overline{S_{n,f}(x)} dx \right] + \int_0^T |S_{n,f}(x)|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Calculons les deux dernières intégrales du membre de droite :

— d'une part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |S_{n,f}(x)|^2 dx &= \frac{1}{T} \int_0^T \left| \sum_{k=-n}^n c_k e_k(x) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-n}^n c_k e_k(x) \overline{\sum_{l=-n}^n c_l e_l(x)} dx = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n c_k \overline{c_l} \left( \frac{1}{T} \int_0^T e_k(x) \overline{e_l(x)} dx \right). \end{aligned}$$

D'après la propriété d'orthogonalité des fonctions  $e_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire

$$\frac{1}{T} \int_0^T e_k(x) \overline{e_l(x)} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l, \end{cases}$$

on a plus simplement

$$\frac{1}{T} \int_0^T |S_{n,f}(x)|^2 dx = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 ;$$

— d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x) - S_{n,f}(x)) \overline{S_{n,f}(x)} dx &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \overline{e_k(x)} dx - \frac{1}{T} \int_0^T |S_{n,f}(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{e_k(x)} dx \right) - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2. \end{aligned}$$

6. Bessel, Friedrich Wilhelm : astronome allemand (Minden 1784–Königsberg 1846)

7. Parseval des Chênes, Marc-Antoine (Rosières-aux-Salins 1755–Paris 1836)

Or  $\frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{e_k(x)} dx = c_k$  et donc

$$\frac{1}{T} \int_0^T (f(x) - S_{n,f}(x)) \overline{S_{n,f}(x)} dx = 0.$$

En termes géométriques, les fonctions  $f - S_{n,f}$  et  $S_{n,f}$  sont orthogonales. On a donc obtenu l'égalité

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{1}{T} \left[ \int_0^T |f(x) - S_{n,f}(x)|^2 dx + \int_0^T |S_{n,f}(x)|^2 dx \right].$$

laquelle écrite sous la forme  $\|f\|_2^2 = \|f - S_{n,f}\|_2^2 + \|S_{n,f}\|_2^2$  n'est autre que le théorème de Pythagore<sup>8</sup> ! Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{T} \int_0^T |S_{n,f}(x)|^2 dx = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient l'inégalité de Bessel :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

On peut démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f(x) - S_{n,f}(x)|^2 dx = 0$$

et donc que l'inégalité de Bessel est en fait une égalité (égalité de Parseval).  $\square$

EXEMPLES. Reprenons deux des exemples précédents.

1. Pour  $f_2(x) = x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , on a vu que  $a_n = 0$  et  $b_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . L'égalité de

Bessel-Parseval donne ici  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  et l'on retrouve encore une fois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Pour  $f_4(x) = x^2$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , on a  $b_n = 0$ ,  $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$  et  $a_n = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}$  si  $n \geq 1$ . L'égalité

de Bessel-Parseval fournit  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5} = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  soit encore

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

On présente ci-dessous deux applications historiques de la théorie des séries de Fourier qui furent en fait le point de départ de cette théorie :

- les cordes vibrantes (d'Alembert, vers 1750) ;
- la propagation de la chaleur (Fourier, vers 1820).

8. Pythagore : philosophe et mathématicien grec (Samos vers 570 av. J.-C–Métaponte, 480 av. J.-C)

## 4 Application aux cordes vibrantes

### 4.1 Position du problème

Considérons une corde d'un instrument de musique de longueur  $L$ , de tension  $T$ , de masse linéique  $\mu$ , fixée à ses extrémités. On note  $c = \sqrt{T/\mu}$  la célérité de l'onde associée.

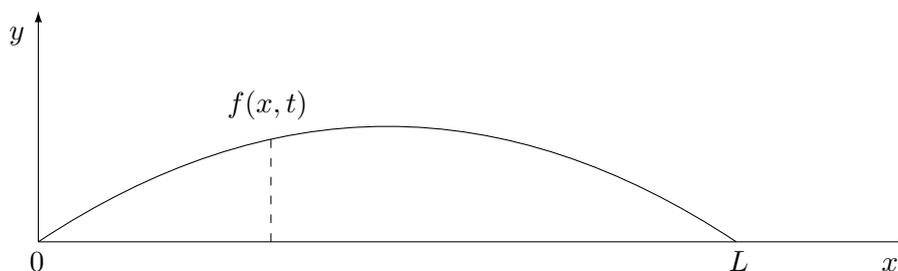


FIGURE 5.5 – Oscillations latérales d'une corde : forme de la corde à l'instant  $t$

En faisant appel aux lois de la physique, on démontre que, dans le cas de petites oscillations, l'écart latéral  $f$  de la corde à sa position au repos, qui est fonction de la position du point sur la corde et du temps, est approximativement solution de l'équation aux dérivées partielles (obtenue par d'Alembert en 1746)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (\text{EDP})$$

La corde étant fixée à ses extrémités, la fonction  $f$  vérifie les conditions aux limites

$$\forall t \geq 0, f(0, t) = f(L, t) = 0. \quad (\text{CL})$$

La corde a une certaine forme initiale  $\varphi$  ainsi qu'une certaine vitesse initiale  $\psi$ , ce qui se traduit par les conditions initiales

$$\forall x \in [0, L], f(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \quad (\text{CI})$$

On démontre que le problème (EDP)–(CL)–(CI) est un *problème bien posé*, c'est-à-dire qu'il possède une unique solution.

L'unicité peut se voir en introduisant une fonction d'énergie

$$E(t) = \frac{T}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right] dx.$$

En effet, en dérivant formellement par rapport à  $t$  sous le signe intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) &= T \int_0^L \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) \right] dx \\ &= T \int_0^L \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right] dx \\ &= T \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right) dx \\ &= T \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right]_{x=0}^{x=L}. \end{aligned}$$

D'après (CL), ceci vaut  $0 : E'(t) = 0$ . L'énergie est donc constante au cours du temps et sa valeur est  $E(t) = E(0) = E$  avec, d'après (CI),

$$E = \frac{T}{2} \int_0^L \left[ \varphi'(x)^2 + \frac{1}{c^2} \psi(x)^2 \right] dx.$$

Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont deux solutions du problème (EDP)–(CL)–(CI), alors la fonction  $h = f - g$  est une solution du problème (EDP)–(CL) et (CI) devient

$$\forall x \in [0, L], h(x, 0) = \frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

L'énergie associée à ce nouveau problème est nulle, donc  $h$  est constante et cette constante est en fait nulle d'après (CL), d'où  $f = g$  ce qui prouve l'unicité du problème.

On va maintenant construire une solution de manière empirique selon la *méthode de séparation des variables*. Cette méthode est due à Bernoulli<sup>9</sup>. Celui-ci eut l'idée en 1753 de chercher des solutions élémentaires puis de les superposer. Cela étant, la décomposition de Fourier n'était pas encore connue à cette époque et cette approche resta sans suite pendant plusieurs décennies...

## 4.2 Construction d'une solution

### 4.2.1 Recherche de solutions élémentaires

Cherchons des solutions de (EDP)–(CL) sous la forme  $f(x, t) = u(x)v(t)$ . On tombe sur

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{v''(t)}{v(t)} \quad \text{avec} \quad u(0) = u(L) = 0.$$

On en déduit que les fonctions  $\frac{u''}{u}$  et  $\frac{v''}{v}$  sont constantes :

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = K \quad \text{et} \quad \frac{v''(t)}{v(t)} = Kc^2,$$

la constante  $K$  étant nécessairement négative pour pouvoir satisfaire les conditions aux limites  $u(0) = u(L) = 0$  (sinon, seule la solution triviale  $u = 0$  conviendrait). Posons donc  $K = -\lambda^2 < 0$ . La fonction  $u$ , qui est solution de l'équation différentielle  $u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0$ , est de la forme

$$u(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x)$$

et les conditions aux limites impliquent que  $a = 0$  puis que  $\sin(\lambda L) = 0$ , i.e.  $\lambda = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $v$  est ensuite solution de  $v''(x) + (\lambda c)^2 v(x) = 0$ . On obtient ainsi une famille de solutions de la forme

$$f_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La partie spatiale  $x \mapsto \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$  fournit une période spatiale  $\frac{2L}{n}$  et la partie temporelle  $x \mapsto a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$  fournit une fréquence temporelle  $\frac{nc}{2L}$ .

9. Bernoulli, Daniel : mathématicien néerlandais (Groningue 1700–Bâle 1782)

- Pour  $n = 1$ , on obtient le *fondamental* associé à la fréquence  $\frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  qui définit la *hauteur* du son.
- Pour  $n \geq 2$ , on obtient les *harmoniques* associés aux fréquences  $\frac{nc}{2L}$ , multiples entiers du fondamental. Ils constituent le *timbre* de l'instrument.

Calculons l'énergie correspondante. À l'instant  $t = 0$ , on a

$$\begin{aligned} f_n(x, 0) &= \varphi_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ \frac{\partial f_n}{\partial t}(x, 0) &= \psi_n(x) = \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

et alors

$$E_n = \frac{T}{2} \int_0^L \left[ \varphi_n'(x)^2 + \frac{1}{c^2} \psi_n'(x)^2 \right] dx = \frac{\pi^2 T}{4L} n^2 (a_n^2 + b_n^2).$$

#### 4.2.2 Recherche d'une solution

Cherchons à présent une solution de la forme  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Les coefficients  $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}^*$ , sont déterminés par (CI). Sans se soucier des problèmes de convergence et de dérivabilité, on trouve formellement les équations

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \psi(x) \end{cases} \quad \text{pour } x \in [0, L].$$

Ces équations sont des développements des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  en série de sinus. De plus, ces développements sont des fonctions impaires  $2L$ -périodiques ce qui suggère de développer en série de Fourier les prolongements impairs  $2L$ -périodiques des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ . Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont donc donnés par les formules

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \\ b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx. \end{cases}$$

La solution ainsi obtenue peut s'écrire

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{L} (x + ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L} (x - ct)\right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} b_n \int_{x-ct}^{x+ct} \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) dy. \end{aligned}$$

Remarquons que cela se simplifie en la formule

$$f(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

C'est la formule que d'Alembert donnait antérieurement à Bernoulli (en 1745) pour solution générale du problème des cordes vibrantes. En fait, il recherchait des solutions de la forme  $(x, t) \mapsto F(x + ct) + G(x - ct)$ .

En conclusion, on a construit une fonction candidate à la solution (unique) du problème (EDP)–(CL)–(CI). Ce devrait donc être la solution, encore faudrait-il vérifier que cette fonction est bien solution *a posteriori* du problème car les calculs ont été menés de manière formelle et plusieurs justifications seraient nécessaires ; c'est une tâche qui peut s'avérer très délicate.

Rappelons que l'énergie associée à  $f$  est donnée par

$$E = \frac{T}{2} \int_0^L \left[ \varphi'(x)^2 + \frac{1}{c^2} \psi(x)^2 \right] dx.$$

D'après l'égalité de Bessel-Parseval, puisque

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

on obtient

$$\frac{2}{L} \int_0^L \varphi'(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} a_n\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{L} b_n\right)^2.$$

D'où l'énergie globale

$$E = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

### 4.3 Corde de guitare

Étudions maintenant plus en détails le cas de la guitare. Une corde de guitare peut être « pincée » de plusieurs manières : à l'aide d'un médiator ou avec un doigt.

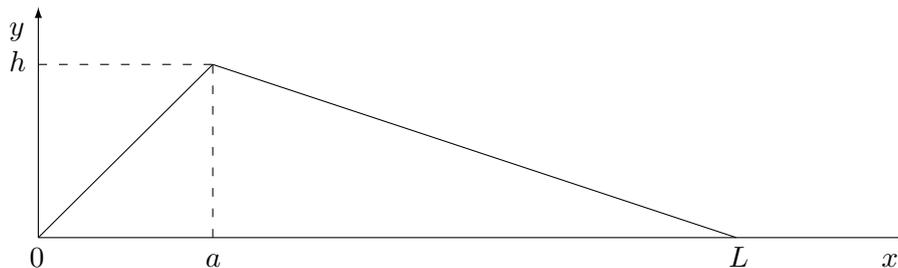
#### 4.3.1 Avec médiator

Avec le médiator, on amène la corde à une position initiale d'allure « triangulaire » sans vitesse. On choisit sa forme initiale selon (voir Fig. 5.6)

$$\varphi(x) = \begin{cases} h \frac{x}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ h \frac{L-x}{L-a} & \text{si } a \leq x \leq L, \end{cases}$$

$a$  étant le point de la corde où le coup de médiator est donné et  $\psi = 0$ . Le développement en série de Fourier de  $\varphi$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ , a pour coefficients

$$a_n = \frac{2hL^2}{a(L-a)\pi^2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L} a\right)}{n^2}$$

FIGURE 5.6 – Corde de guitare pincée avec un médiator : graphe de  $\varphi$ 

et alors

$$f(x, t) = \frac{2hL^2}{a(L-a)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L} a\right)}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right).$$

Lorsque le coup de médiator est donné au milieu de la corde ( $a = L/2$ ), on obtient en particulier

$$f(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{(2p+1)\pi c}{L} t\right).$$

L'énergie du  $p^{\text{e}}$  terme correspondante vaut

$$E_{2p+1} = \frac{\pi^2 T}{4L} (2p+1)^2 a_{2p+1} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C}{p^2}.$$

REMARQUE.

Comme  $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{L} (x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L} (x-ct)\right) \right]$ , la fonction  $f$  peut s'écrire sous la forme (formule de d'Alembert déjà signalée)

$$f(x, t) = \varphi(x+ct) + \varphi(x-ct).$$

Cette relation exprime que le signal est la superposition de deux signaux identiques, l'un retardé (correspondant au point  $x-ct$ ) et l'autre avancé (correspondant au point  $x+ct$ ) : c'est le *principe de Huyghens*<sup>10</sup>.

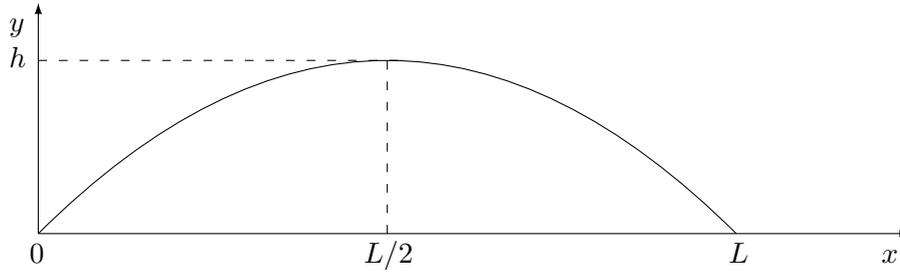
### 4.3.2 Sans médiator

À l'aide d'un doigt placé au milieu de la corde, on amène celle-là à une position initiale d'allure plus arrondie. On choisit sa forme initiale selon l'arc de parabole (voir Fig. 5.7)

$$\varphi(x) = \frac{4h}{L^2} x(L-x) \quad \text{si } 0 \leq x \leq L$$

et  $\psi = 0$ . Le développement en série de Fourier de  $\varphi$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x$ , a pour coefficients

10. Huygens, Christiaan : physicien et astronome néerlandais (La Haye 1629–La Haye 1695)

FIGURE 5.7 – Corde de guitare pincée avec un doigt : graphe de  $\varphi$ 

$$a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{32h}{\pi^3} \frac{1}{(2p+1)^3}$$

et alors

$$f(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^3} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{(2p+1)\pi c}{L} t\right).$$

L'énergie du  $p^{\text{e}}$  terme correspondante vaut

$$E_{2p+1} = \frac{\pi^2 T}{4L} (2p+1)^2 a_{2p+1}^2 \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C}{p^4}.$$

Notons la décroissance plus rapide dans le cas sans médiateur (en  $\frac{1}{p^4}$ ) par rapport au cas avec médiateur (en  $\frac{1}{p^2}$ ). Le son contient donc moins d'harmoniques dans le cas sans médiateur et le son est alors plus sourd, par contre le fondamental a une énergie plus puissante :  $\frac{32h}{\pi^3} > \frac{8h}{\pi^2}$ .

#### 4.4 Corde de piano

Le piano est un instrument à cordes frappées. En appuyant sur une touche, on actionne un petit marteau de feutre qui percute la corde, ce qui correspond à une forme initiale au repos  $\varphi = 0$  et une vitesse initiale « impulsionnelle » de graphe (voir Fig. 5.8)

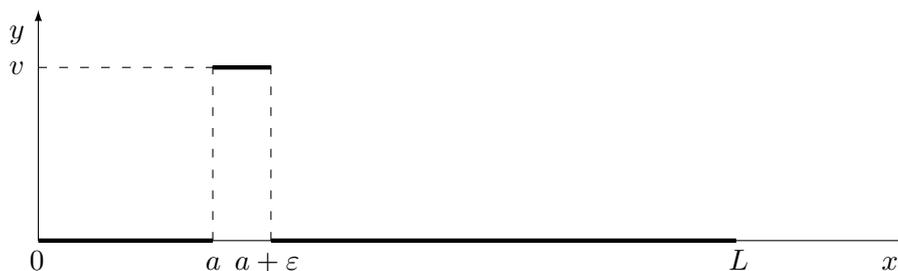
$$\psi(x) = \begin{cases} v & \text{si } a \leq x \leq a + \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$a$  étant l'endroit de frappe du marteau sur la corde,  $\varepsilon$  l'épaisseur du marteau et  $v$  la vitesse de frappe du marteau. Le développement en série de Fourier de  $\psi$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ , a pour coefficients

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{4v}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2L} \varepsilon\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \approx \frac{2\varepsilon v}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} a\right) \text{ si } \varepsilon \ll L.$$

Alors

$$f(x, t) \approx \frac{2\varepsilon v}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L} a\right)}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right).$$

FIGURE 5.8 – Corde de piano : graphe de  $\psi$ 

L'énergie du  $n^{\text{e}}$  terme correspondante vaut

$$E_n = \frac{\pi^2 T}{4L} n^2 b_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} a \right).$$

Remarquons qu'il n'y a pas de perte d'énergie à tous les niveaux harmoniques : le son est très riche en harmoniques. Le 7<sup>e</sup> harmonique est en général jugé dissonant par les musiciens, on arrive à l'éliminer naturellement en choisissant  $a = L/7$  pour point d'impact du marteau sur la corde ( $E_7 = 0$ ).

## 5 Application à la propagation de la chaleur

En 1822, Fourier écrivit son fameux traité de *Théorie analytique de la chaleur* dans lequel on vit apparaître pour la première fois l'expression des coefficients connus aujourd'hui sous son nom. On put dès lors résoudre outre le problème de la chaleur décrit ci-dessous, celui des cordes vibrantes posé antérieurement (vers 1750) et bien d'autres encore...

### 5.1 Position du problème

Considérons une barre métallique de longueur  $L$ , portée à une température initiale  $\varphi$ . On suppose que les extrémités sont maintenues à une température constante que l'on supposera nulle. On étudie la propagation de la chaleur le long de cette barre au cours du temps. Les lois de la thermodynamique montrent que la température  $f$  de la barre est approximativement solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{EDP})$$

où la constante  $1/a^2$  est la constante de diffusion ; c'est la *conductibilité thermométrique*, soit encore le rapport entre la conductibilité thermique et la capacité calorifique par unité de longueur. La fonction  $f$  vérifie de plus les conditions aux limites

$$\forall t \geq 0, f(0, t) = f(L, t) = 0 \quad (\text{CL})$$

ainsi que la condition initiale

$$\forall x \in [0, L], f(x, 0) = \varphi(x). \quad (\text{CI})$$

Le problème (EDP)–(CL)–(CI) possède une unique solution.

L'unicité peut se voir en introduisant une fonction d'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L f(x, t)^2 dx.$$

En effet, en dérivant formellement par rapport à  $t$  sous le signe intégrale, on obtient

$$E'(t) = \int_0^L f(x, t) \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx = a^2 \int_0^L f(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dx = -a^2 \int_0^L \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right]^2 dx \leq 0.$$

Ceci montre que l'énergie est décroissante au cours du temps. En particulier,  $0 \leq E(t) \leq E(0)$ . Maintenant, si  $f$  et  $g$  sont deux solutions du problème (EDP)–(CL)–(CI), alors la fonction  $h = f - g$  est une solution du problème (EDP)–(CL) et (CI) devient

$$\forall x \in [0, L], h(x, 0) = 0.$$

L'énergie associée à ce nouveau problème est nulle, donc  $h$  est constante et cette constante est en fait nulle d'après (CL), d'où  $f = g$  ce qui prouve l'unicité du problème.

On va à présent construire une solution du problème selon la méthode de séparation des variables.

## 5.2 Construction d'une solution

### 5.2.1 Recherche de solutions élémentaires

Cherchons des solutions de (EDP)–(CL) sous la forme  $f(x, t) = u(x)v(t)$ . Cela conduit à

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v'(t)}{v(t)} \quad \text{avec} \quad u(0) = u(L) = 0.$$

Comme dans l'étude des cordes vibrantes, on en déduit que les fonctions  $\frac{u''}{u}$  et  $\frac{v''}{v}$  sont constantes :

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = K \quad \text{et} \quad \frac{v'(t)}{v(t)} = Ka^2,$$

où la constante  $K$  est négative. Les conditions aux limites conduisent à des fonctions  $u$  de la forme

$$u(x) = \alpha \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

La fonction  $v$  est ensuite solution de  $v'(t) + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 v(t) = 0$ . On obtient ainsi une famille de solutions de la forme

$$f_n(x, t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

### 5.2.2 Recherche d'une solution

Cherchons maintenant une solution de la forme  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Les coefficients  $a_n$  sont déterminés par (CI). On trouve formellement l'équation

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \varphi(x) \quad \text{pour } x \in [0, L],$$

laquelle suggère de développer en série de Fourier le prolongement impair  $2L$ -périodique de la fonction  $\varphi$ . Les coefficients  $a_n$  sont donc donnés par

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

On a ainsi construit une fonction candidate à la solution (unique) du problème (EDP)–(CL)–(CI) :

$$f(x, t) = \int_0^L \varphi(y) K(x, y, t) dy \quad \text{avec} \quad K(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right).$$

La fonction  $K$  est le *noyau de la chaleur*.

## Exercices sur les séries de Fourier

### Exercice 1

1. (a) Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie par  $f(x) = -1$  si  $x \in [-\pi, 0[$ ,  $f(x) = 1$  si  $x \in [0, \pi[$ .  
 (b) En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .
2. (a) Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie par  $f(x) = |x|$  si  $x \in [-\pi, \pi[$ .  
 (b) Intégrer la série de Fourier de  $f$  sur l'intervalle  $[0, x]$ , puis intégrer la série ainsi obtenue sur  $[\frac{\pi}{2}, x]$  pour  $x \in [-\pi, \pi[$ .  
 (c) En déduire la valeur des sommes  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .
3. (a) Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie par  $f(x) = x(\pi - |x|)$  si  $x \in [-\pi, \pi[$ .  
 (b) En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ .

**Exercice 2** On considère la série de fonctions  $(\sum f_n)$  de terme général donné par  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n!}$ .

1. Montrer que la série est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit alors  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  sa fonction somme.
  - (a) La fonction  $S$  est-elle périodique ?
  - (b) La fonction  $S$  est-elle continue ? dérivable ?
3. En utilisant l'écriture complexe  $f_n(x) = \Im \left( \frac{e^{inx}}{n!} \right)$ , exprimer la fonction  $S$  à l'aide de fonctions usuelles.
4. Quel est le développement en série de Fourier de la fonction  $x \mapsto e^{\cos x} \sin(\sin x)$  ?

**Exercice 3** Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi[$  par  $f(x) = \cos(ax)$ .

1. Vérifier que la fonction  $f$  est continue.
2. Déterminer le développement de  $f$  en série de Fourier.
3. Montrer que la série de Fourier de  $f$  est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  coïncide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier ?
4. Déduire de ce qui précède l'égalité

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}.$$

5. Montrer que la série de fonctions  $(\sum f_n)$  de terme général donné par  $f_n(a) = \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}$  est uniformément convergente sur  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

**Exercice 4** On rappelle que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ .

1. Écrire la fraction  $\frac{1+z}{1-z}$  sous la forme d'une série de puissances de  $z$ .
2. En posant  $z = re^{i\theta}$  avec  $r, \theta \in \mathbb{R}$ , ainsi que  $K(r, \theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$ , déduire de la question précédente la formule suivante, valable pour tout  $r \in ]-1, 1[$ ,

$$K(r, \theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta).$$

3. Donner alors la série de Fourier de la fonction  $y \mapsto K(r, x-y)$ , puis en déduire les relations suivantes, valables pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(r, x-y) \cos(ny) dy = 2r^n \cos(nx), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(r, x-y) \sin(ny) dy = 2r^n \sin(nx). \end{aligned}$$

4. On considère l'équation intégrale d'inconnue la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} K(r, x-y) \varphi(y) dy = 2\pi r^p \varphi(x), \quad x \in [0, 2\pi],$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in ]-1, 1[$  sont fixés. Chercher les solutions de cette équation développables en série de Fourier.