Divertissements mathématiques

Aimé Lachal

Exposé 1 : Emprunt financier

Lorsqu'on place un capital S_0 au taux annuel α ($= 100\,\alpha\%$), les intérêts produits par S_0 au bout d'un an sont de αS_0, d'où le capital revalorisé $S_1 = (1+\alpha)S_0$. Plus généralement, si S_n est la valeur du capital à l'issue de la n^{e} année, on a $S_{n+1} = S_n(1+\alpha)$, et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $(1+\alpha)$ et le montant du capital au bout de n années est $S_n = S_0(1+\alpha)^n$.

Problème. — Un consommateur emprunte auprès d'un organisme financier une somme S au taux mensuel α à rembourser sur une période de N mois. Quel est le montant de la mensualité m à rembourser ?

1. Soit u_n la somme restant à rembourser à la fin du n^{e} mois. En écrivant qu'entre les n^{e} et $(n+1)^{\text{e}}$ mois, cette somme produit des intérêts au profit de l'organisme prêteur puis que le consommateur verse une mensualité à l'issue du n^{e} mois, obtenir une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$. (Il s'agit d'une suite *arithmético-géométrique*.)
2. En introduisant le point fixe de cette relation (c'est le nombre u vérifiant $u = au+b$) puis $v_n = u_n - u$, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n.
3. À l'issue du N^{e} mois, l'emprunt doit avoir été intégralement remboursé ce qui se traduit par $u_N = 0$. En déduire le montant de la mensualité m.
4. Calculer le coût du crédit.

Exposé 2 : Le flocon de neige de Von Koch

On part d'un segment de longueur 1 que l'on divise en trois segments de longueur 1/3. On enlève le segment du milieu que l'on remplace par deux segments de longueur 1/3 de façon à former un triangle équilatéral (sans base) compris entre les deux segments restants. On obtient ainsi une ligne brisée composée de quatre segments. On recommence le procédé avec chacun de ces segments, et ce ainsi de suite indéfiniment. En temps fini, on obtient une ligne brisée reposant sur le segment de départ, et en temps infini on obtient un ensemble appelé *courbe de Von Koch*.

Problème. — Calculer la longueur L de la courbe de Von Koch et l'aire A de la surface délimitée par cette courbe et le segment d'appui initial.

On note à l'issue de la n^{e} étape : p_n le nombre de segments, q_n le nombre de triangles, l_n la longueur d'un segment, L_n la longueur de la ligne polygonale, A_n l'aire de la surface comprise entre la ligne polygonale et le segment de base.

1. Calculer p_n, q_n et l_n à l'aide de suites géométriques.
2. En déduire L_n et A_n.
3. Calculer les limites $L = \lim_{n\to+\infty} L_n$ et $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$.

Exposé 3 : Le triangle de Sierpiński

On part d'un triangle équilatéral plein de côté de longueur 1. En traçant les trois segments parallèles aux côtés de ce triangle passant par les milieux des autres côtés, on divise en quatre triangles équilatéraux identiques (de côté 1/2). On retire le triangle central et on recommence avec chacun des trois triangles restants. On reproduit ce procédé indéfiniment. On obtient ainsi en temps fini un triangle « troué » et en temps infini un ensemble appelé triangle de Sierpiński (Sierpiński's gasket) contenu dans le triangle initial.

Problème. — Calculer la longueur totale L de tous les triangles restants et l'aire A du triangle de Sierpiński.

On note à l'issue de la n^{e} étape : p_n le nombre de triangles restants, p'_n le nombre de triangles retirés, l_n la longueur d'un côté, L_n la longueur de la ligne polygonale contenue dans le triangle de départ (ce dernier étant inclus), A_n l'aire totale de la surface des triangles restants, A'_n l'aire totale de la surface des triangles retirés.

1. Calculer p_n, q_n et l_n à l'aide de suites géométriques.
2. En déduire L_n et A_n.
3. Calculer les limites $L = \lim_{n\to+\infty} L_n$ et $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$.

Exposé 4 : Un problème de partage

Problème. — De combien de manières peut-on réaliser la somme de n € avec des pièces de 1, 2, 3 € (avec 5 au lieu de 3, c'est un peu plus long à calculer...).

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle
$$F = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}.$$
2. On donne la formule $\dfrac{1}{1-X} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} X^p$. Remplir les trous manquants dans les égalités
$$\frac{1}{(1-X)^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \cdots\, X^p, \qquad \frac{1}{(1-X)^3} = \sum_{p=0}^{\infty} \cdots\, X^p.$$
3. En développant le produit $\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} X^p\right)\left(\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty} X^{2q}\right)\left(\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} X^{3r}\right)$, écrire la fraction F sous la forme $F = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X^n$.
4. Faire de même à partir de la décomposition en éléments simples de F.
5. En confrontant les deux expressions ainsi obtenues, résoudre le problème posé.

Exposé 5 : Un problème de géométrie

On considère un cercle de diamètre $[A, B]$ et une corde CD du cercle de milieu M. On note H le pied de la hauteur issue de B perpendiculairement à CD et K le point d'intersection de BH et AM.

Problème. — Démontrer que $ACKD$ est un parallélogramme.

1. Introduire les affixes des points A, B, C et D. On choisira 1 et -1 pour celles de A et B (on suppose le cercle de rayon 1). Calculer les affixes du point M et des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2. Écrire les équations des droites BH et AM.
3. En déduire les coordonnées (ou l'affixe) du point K.
4. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MK}$. En déduire que M est le milieu du segment $[A, K]$ puis conclure.

Remarque : il y a aussi une démonstration géométrique très simple...

Exposé 6 : Les cars de Hilbert

Un lieu étrange où règne une atmosphère mystico-sibylline attire une telle foule de personnages interlopes issus de milieux divers et variés (pandémoniums, bouges, clandés...) qu'il a fallu construire un séminaire contenant une infinité de loges ayant vocation à faire purger le karma de tous ces tristes sires. Un jour (probablement apocalyptique) arrivent des hordes de cars amenant une infinité de futurs prosélytes.

Problème. — En supposant tous ces individus immortels, l'hôtel pourra-t-il héberger tous ces cénobites potentiels enclins à une récollection ataraxique collective et aspirant éventuellement à la béatification suprême : lorsqu'il arrive deux cars ? trois cars ? N cars ? une infinité de cars ?

1. Pour deux cars : on numérote $n_1, n_2, n_3, \ldots$ les premier, deuxième, troisième... individus (les sybarites) du premier car et $n'_1, n'_2, n'_3, \ldots$ ceux (les dipsomanes) du deuxième. On pourra également numéroter n_0 et n'_0 les conducteurs (les affidés stipendiés) de ces convois destinés à la purification. Quel numéro de loge attribuer au j^{e} individu du premier car ? du deuxième car ? (On loge aussi les conducteurs.)
(Il s'agit de construire une bijection de $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ sur $\mathbb{N}$...)
2. Pour trois cars : on numérote $n_1, n_2, n_3, \ldots$ les premier, deuxième, troisième... individus (les ploutocrates) du premier car, $n'_1, n'_2, n'_3, \ldots$ ceux du deuxième (les satrapes), $n''_1, n''_2, n''_3, \ldots$ ceux (les zélateurs) du troisième et enfin n_0, n'_0 et n''_0 les conducteurs (les automédons psychopompes). Quel numéro de loge attribuer au j^{e} individu du premier car ? du deuxième ? du troisième ?
(Il s'agit de construire une bijection de $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$ sur $\mathbb{N}$...)
3. Pour une infinité de cars : on numérote $0, 1, 2, \ldots$ les premier, deuxième, troisième... cars et n_{i0} le chauffeur, $n_{i1}, n_{i2}, n_{i3}, \ldots$ les premier, deuxième, troisième... individus du i^{e} car. Quel numéro de loge attribuer au j^{e} individu du i^{e} car (individu n° n_{ij}) ?
(Il s'agit de construire une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$...)

Quelques rappels élémentaires de probabilités

- Si $A \cap B = \emptyset$ (A et B sont des événements *incompatibles*), $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;
dans le cas général, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
si $\overline{A}$ est l'événement *contraire* de A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
si $B \subset A$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.
- Probabilité *conditionnelle* de A sachant B : $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.
Les événements A et B sont *indépendants* si et seulement si $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- Formule de *Bayes* : $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)/\mathbb{P}(B)$.
- Formule des *probabilités totales* : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\,\mathbb{P}(A|\overline{B})$.
- *Espérance* d'une variable aléatoire entière N :
  - si N prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(N = k)$;
  - si N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N = k)$.
- Lors d'une succession de n jeux de Pile ou Face, « Pile » étant obtenu à chaque jeu avec probabilité p (et donc « Face » est obtenu avec probabilité $1-p$), le nombre N de « Pile » obtenus est une variable aléatoire suivant la *loi binomiale* de paramètres n, p : pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(N = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exposé 7 : Un test médical

Pour dépister une maladie, on applique un test. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais, le test n'étant pas fiable à 100%, il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le patient est sain, et ceci se produit dans 2% des cas. Enfin, on sait que dans la population sous observation, un individu sur 1000 en moyenne est atteint par la maladie à dépister.

Problème. — Calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que son test a été positif. Déterminer le nombre de tests à appliquer sur un même individu pour déclarer qu'il est très probablement malade.

1. Introduire les événements M : « le patient est malade », T^+ : « le test est positif », T^- : « le test est négatif ». Si le test est positif, calculer la probabilité que le patient soit malade $\mathbb{P}(M|T^+)$ en utilisant la formule de Bayes.
2. Si on réalise n tests et que k d'entre eux se révèlent positifs (et donc les $n-k$ autres sont négatifs), calculer la probabilité que le patient soit malade : $\mathbb{P}(M|(T^+)^k(T^-)^{n-k})$. On pourra utiliser une loi binomiale.
3. Déterminer le nombre minimal n de tests pour déclarer le patient malade avec une probabilité au moins égale à 99% (n dépend des k tests révélés positifs).

Exposé 8 : Le problème de l'ivrogne

Problème. — Arrivé devant la porte de son domicile, un noctambule éméché se trouve confronté au redoutable problème consistant à trouver la bonne clé parmi les n qui composent son trousseau.

1. Travaillant sans méthode, c'est-à-dire prenant une clé au hasard sans prendre soin de l'isoler après l'avoir testée, calculer la probabilité qu'il parvienne à ouvrir la porte au premier essai ; au deuxième ; après le n^{e} essai. Au bout de combien d'essais peut-il espérer ouvrir la porte ? On introduira le n° (aléatoire) N de la clé essayée.
2. Reprendre le problème dans le cas où, dans un indicible éclair de lucidité, il met au fur et à mesure de côté les clés testées.
3. Reprendre le problème dans le cas où deux clés du trousseau permettent d'ouvrir la porte.
4. Il s'avère que l'état d'ébriété de notre pauvre hère est endémique et qu'il est régulièrement ivre avec une certaine probabilité $p \in]0,1[$. Lorsqu'il est ivre il opère sans méthode, alors que lorsqu'il est sobre il opère avec méthode. Un jour, un contrôleur des services sociaux observe qu'il réussit à ouvrir la porte au k^{e} essai. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ce jour-là ?

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exposé 9 : Une transmission de l'information

On considère une chaîne de n individus $I_1, I_2, \ldots, I_n$. L'individu I_1 possède une information ; celle-ci ou son contraire, va être transmise de la manière suivante : pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, l'individu I_i donne à I_{i+1} l'information qu'il reçoit avec la probabilité $p \in]0,1[$, et il transmet le contraire avec la probabilité $q = 1 - p$.

Problème. — Quelle est la probabilité que l'individu I_n reçoive l'information.

Soit p_n cette probabilité.

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, trouver une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} de la forme $p_n = ap_{n-1} + b$. (Il s'agit d'une suite *arithmético-géométrique*.)
2. En introduisant le point fixe de cette relation (c'est le nombre p vérifiant $p = ap+b$) puis $\pi_n = p_n - p$, montrer que $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire l'expression de π_n puis celle de π_n.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Exposé 10 : Les urnes de minuit

Question préliminaire. — On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. En utilisant l'inégalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$ valable pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$, prouver que $\forall \alpha > 0$, $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) = +\infty$, puis que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+\alpha} = 0$.

Problème. — On dispose d'une urne infiniment grande et d'une collection infinie de boules numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$

1. Peu avant le couvre-feu, un individu doué de nyctalopie se livre à l'expérience insolite suivante : à minuit moins une, il place les boules numérotées de 1 à 10 dans l'urne et en retire instantanément la boule n° 10. A minuit moins 30 secondes, il place les boules 11 à 20 dans l'urne et en retire la boule n° 20. A minuit moins 15 secondes, il introduit les boules 21 à 30 et enlève la n° 30. A minuit moins 7 secondes et demie, etc. Une question métaphysique que se pose notre individu : combien y a-t-il de boules dans l'urne à minuit ?
2. L'individu modifie l'expérience précédente en retirant, au lieu des boules n° $10, 20, 30\ldots$, les boules n° $1, 2, 3\ldots$ Dans cette nouvelle expérience, combien reste-t-il de boules dans l'urne à minuit ?
3. Supposons que notre individu soit acculé à la situation méphistophélique suivante où le hasard fait son apparition édictant inexorablement ses lois : dès qu'il s'agit de retirer une boule, celle-ci est prise au hasard parmi les boules déjà présentes dans l'urne.
   (a) On définit l'événement A_n : « la boule n° 1 est encore dans l'urne après voir effectué les n premiers retraits ». Calculer $\mathbb{P}(A_n)$, puis la probabilité de l'événement « la boule n° 1 se trouve dans l'urne à minuit » :
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(An).$$
   (b) On définit l'événement B_i : « la boule n° i se trouve dans l'urne à minuit ». Calculer $\mathbb{P}(B_i)$, puis la probabilité d'avoir au mois une boule dans l'urne à minuit : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$. On utilisera la majoration $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(B_i\right)$.
   (c) Combien de boules reste-t-il dans l'urne à minuit dans ce cas ?