

Vers un enseignement thématique (1)

Thèmes et notions

Aimé Lachal

22 mai 2008

THÈME : cinématique

- **modélisation** : courbes paramétrées
- **outils analytiques** : calcul différentiel vectoriel, formule de Taylor-Young, intégrale curviligne, intégrale double, intégrale de surface ; courbes particulières : coniques, cycloïdes, trochoïdes ; analyse vectorielle
- **applications** : dynamique d'un mobile...

THÈME : équations différentielles linéaires

- **outils analytiques** : calcul différentiel à une variable, calcul de primitives, séries de fonctions
- **résolution** :
 - * par intégration
 - * par séries entières ou séries de Fourier
 - * approche numérique (schémas de Runge-Kunta)
 - * cas d'un second membre « harmonique » (sinusoïdal) : utilisation des complexes
- **aspects algébriques** : espaces vectoriels, bases, dimension
- **applications** : circuits RLC, systèmes visco-élastiques, diagrammes de Nyquist et Cole-Cole, pendule simple (linéarisé)...

THÈME : systèmes différentiels non (nécessairement) linéaires

- **outil algébrique** : linéarisation (algèbre linéaire, matrices, réduction des endomorphismes)
- **outil géométrique** : courbes paramétrées
- **approche qualitative** : stabilité (algèbre bilinéaire)
- **applications** : évolution d'une population (approche continue), dynamique d'une particule soumise à un champ électro-magnétique...

THÈME : systèmes dynamiques

- **modélisation** : suites récurrentes
- **outils analytiques** : nombres réels, limites, suites numériques, point fixe (aller-retour entre le discret et le continu)
- **cas multidimensionnel** : linéarisation, calcul différentiel à plusieurs variables
- **applications** : évolution d'une population (approche discrète), mathématiques financières...

THÈME : approximation, optimisation

- **outils analytiques** : nombres réels (majoration, minoration, valeur absolue), calcul différentiel à une et plusieurs variables, formule de Taylor-Lagrange, extremums libres et liés
- **outils algébriques** : algèbre linéaire et bilinéaire (espaces vectoriels normés, calcul matriciel, formes quadratiques)
- **aspects numériques** : schéma numérique, programmation numérique
- **applications** : gestion d'une production...

THÈME : probabilités et statistiques

- **outil algébrique** : combinatoire
- **outils analytiques** : séries numériques (calculs d'espérances, de variances), séries de fonctions (fonctions génératrices), intégrales simples ou multiples, généralisées
- **aspects numériques** : statistiques, analyse des données
- **applications innombrables!** Par exemple : marche aléatoire (récurrence linéaire à trois indices), transmission de l'information dans un canal bruité (récurrence vectorielle, diagonalisation), contrôle de fabrication, files d'attente...

Vers un enseignement thématique (2)

Thèmes et exemples

Aimé Lachal

22 mai 2008

THÈME : cinématique, courbes paramétrées

- fil pesant (chaînette)
- cercles roulant sur d'autres cercles (courbes cycloïdales et trochoïdales)
- porte de garage coulissante (courbes cycloïdales)
- potentiel newtonien, mouvement des planètes (problème des deux corps), lois de Képler (équations différentielles, ellipses), mise en orbite d'un satellite (coniques)
- potentiel coulombien, déviation de Rutherford (équations différentielles, hyperboles)
- systèmes optiques (coniques, caustiques)
- oscillateur harmonique plan, forces élastiques perpendiculaires (équations différentielles, courbes de Lissajou)

THÈME : séries

Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, séries de Fourier, séries entières

- flocon de neige de Von Koch et triangle de Sierpinski (séries géométriques)
- rebonds élastiques d'une balle avec amortissement (séries géométriques)
- reproduction des lapins avec Fibonacci, évolution démographique dans une population d'abeilles (récurrences linéaires à trois indices)
- jeux de pile ou face, ruine du joueur (probabilités, séries géométriques)
- porte-à-faux d'un empilement de dominos (série harmonique)
- potentiel coulombien d'un cristal de NaCl constitué d'une juxtaposition d'ions alternativement positifs et négatifs (série harmonique alternée)
- problème du collectionneur (série harmonique)
- marche aléatoire, problème de récurrence/transience (probabilités, séries géométriques, série de Riemann, séries produits)
- équations des cordes vibrantes, de la conduction de la chaleur, des télégraphistes (EDP et séries de Fourier)
- onde linéaire réfléchie, superposition de l'onde incidente et de ses réfléchies (séries de Fourier)
- fonctions génératrices en combinatoire, en probabilités, calcul d'espérances et de variances (séries entières)

THÈME : équations différentielles linéaires et non linéaires

- désintégration nucléaire spontanée, réaction chimique d'ordre 1 (équations linéaires 1er ordre)
- tir d'un obus, calcul de la portée du tir (équations linéaires 2nd ordre)
- circuits RLC et systèmes visco-élastiques, problèmes de résonance, régimes transitoire et stationnaire (équations linéaires 2nd ordre)
- modèle démographique de Verhulst (équations de Bernoulli et Riccati)
- écoulement d'une cuve dans un tuyau horizontal (équations de Riccati et à variables séparables)
- interactions proies-prédateurs (équations à variables séparables)
- réactions chimiques d'ordre 2, cinétique chimique : loi de Guldberg & Waage (équations à variables séparables)

THÈME : algèbre linéaire

Espaces vectoriels, applications linéaires, calcul matriciel (déterminants, systèmes d'équations linéaires, diagonalisation, systèmes différentiels linéaires)

- espace de Minkowski : quadrivecteurs de la relativité restreinte (espaces vectoriels)
- statistique de Maxwell pour les gaz : espace des phases (espaces vectoriels)
- carrés magiques (espaces vectoriels, matrices)
- lois d'Ohm, Faraday et de Kirchhoff (applications linéaires)
- transformation de Lorentz en relativité restreinte (applications linéaires)
- optique matricielle sous l'approximation de Gauss (matrices)
- quadripôles linéaires : matrices de transfert, matrice-impédance, treillis simple (matrices)
- tables de mortalité : matrices de Leslie (matrices)
- fiabilité d'un équipement industriel (matrices)
- modélisation d'un polymère, composition de rotations aléatoires (matrices, isométries)
- pont de Weathstone (systèmes linéaires)
- filtres électriques (diagonalisation)
- transmission d'un signal binaire à travers un canal bruité (probabilités conditionnelles, diagonalisation)
- mouvement d'une particule dans un champ électro-magnétique (systèmes différentiels)
- cinétique chimique : point d'équilibre des isotopes du butène (systèmes différentiels)
- systèmes masses-ressorts ou fils de torsion (matrices tridiagonales, systèmes différentiels)
- phylogénie : évolution d'un nucléotide d'ADN en temps discret et continu (probabilités conditionnelles, récurrences linéaires et systèmes différentiels)

THÈME : algèbre bilinéaire, formes quadratiques

- puissance électrique, travail mécanique
- énergie cinétique, moments d'inertie
- optimisation : fonction de coût quadratique
- variance en statistiques
- forme quadratique de Lorentz en relativité restreinte

Vers un enseignement thématique (3)

Autour de l'algèbre linéaire

Aimé Lachal

22 mai 2008

THÈME : algèbre linéaire

Espaces vectoriels, applications linéaires, calcul matriciel

Motivation 1 : équations différentielles linéaires

D'innombrables phénomènes physiques conduisent (de manière exacte ou simplifiée) à des équations différentielles linéaires homogènes de la forme $y' = ay$ ou $y'' + ay' + by = 0$.

- On a le principe de « superposition » suivant (sans nécessairement parler de second membre) : si y_1 et y_2 sont deux solutions et α un réel, alors $y_1 + y_2$ et αy_1 sont également des solutions.
- Les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{ax}$ ou $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ (dans le cas le plus simple).

Cet exemple motive les notions de stabilité par combinaison linéaire et de base et peut servir d'introduction au chapitre d'espaces vectoriels.

Motivation 2 : quadripôles électriques linéaires

Un quadripôle linéaire est un appareil électrique comportant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. On dispose ainsi d'un couple courant-tension (I_e, U_e) en entrée et d'un couple courant-tension (I_s, U_s) en sortie. Les lois d'Ohm et de Kirchhoff expriment des relations linéaires entre ces deux couples :

$$I_s = a I_e + b U_e$$

$$U_s = c I_e + d U_e$$

qui s'écrivent sous la forme de relation matricielle (via une matrice de transfert)

$$\begin{pmatrix} I_s \\ U_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_e \\ U_e \end{pmatrix}.$$

Problème : juxtaposition de deux ou plusieurs dipôles en série (pour constituer un filtre par exemple)

→ conduit au produit matriciel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ou à la puissance n^e : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$.

Cet exemple motive les applications linéaires, le calcul matriciel et la diagonalisation.

Motivation 3 : géométrie élémentaire de la droite et du plan

- Représentation cartésienne d'une droite dans le plan $\mathcal{P} : ax + by = c$.

Problèmes :

- intersection de deux droites de \mathcal{P} : résolution d'un système 2×2
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

→ conduit à un système de Cramer ou non, calcul de déterminants.

- intersection de trois droites de \mathcal{P} : résolution d'un système
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$$

→ conduit à un système « sur-abondant » en équations (discussion sur la compatibilité à faire).

- Représentation cartésienne d'un plan dans l'espace $\mathcal{E} : ax + by + cz = d$.

Problèmes :

- intersection de deux plans de \mathcal{E} : résolution d'un système
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

→ conduit à des systèmes « sous-abondants » en équations (ici, représentation cartésienne d'une droite dans l'espace \mathcal{E})

- intersection de trois plans de \mathcal{E} : résolution d'un système 3×3
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

→ conduit à un système de Cramer ou non, calcul de déterminants.

Cet exemple motive l'étude des systèmes linéaire, le calcul matriciel et les déterminants, ainsi que les approches numériques (pivot de Gauss, Cholesky, Jacobi, Gauss-Seidel...).