Transmission d'un signal aléatoire binaire dans un canal bruité

Aimé Lachal

22 mai 2008

Avertissement : ce problème repose sur la diagonalisation d'une matrice 2×2 symétrique et nécessite quelques connaissances élémentaires en probabilités qui sont rappelées dans la section 2. Les deux problèmes (sections 3.1 et 3.2) peuvent être traités séparément.

1 Présentation du problème

Une source émet des signaux binaires 0–1 à travers un canal bruité. La proportion de 0 émis est p ($p \in]0,1[$) et celle de 1 émis est $1-p$. Cette répartition fréquentielle induit un modèle probabiliste de Bernoulli pour l'émission d'un signal générique : la probabilité d'émettre un 0 est p et celle d'émettre un 1 est $1-p$. Le canal est constitué d'une succession de m émetteurs-récepteurs identiques reliés en série qui, agissant comme des sortes de boîtes noires, déforment les signaux avec une certaine probabilité $\varepsilon \in]0,1[$: un 0 (resp. 1) reçu est réémis sans transformation avec probabilité $q = 1-\varepsilon$ et réémis avec modification en 1 (resp. 0) avec probabilité ε (voir Fig. 1). On cherche à évaluer les proportions de 0 et 1 à la sortie du canal, ainsi que la proportion de signaux correctement restitués.

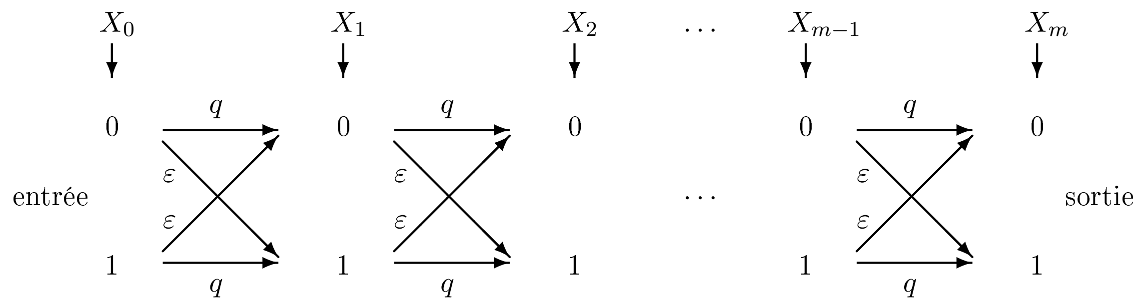

Figure 1 – émission d'un signal binaire dans un canal bruité

2 Rappels de probabilités

Rappelons la définition d'une *probabilité conditionnelle* :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ lorque } \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

En écrivant la partition

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

où $\overline{B}$ dénote le complémentaire de B, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$

et on déduit la *formule des probabilités totales* qui sera utilisée dans la section 3.1

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\,\mathbb{P}(\overline{B}).} \tag{1}$$

On aura également besoin d'une formule de probabilités totales conditionnelles qui sera utilisée dans la section 3.2. Partant de la partition $A \cap B = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$, on tire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C}) \\ &= \mathbb{P}(A|B \cap C)\,\mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A|B \cap \overline{C})\,\mathbb{P}(B \cap \overline{C}) \\ &= \mathbb{P}(A|B \cap C)\,\mathbb{P}(C|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B \cap \overline{C})\,\mathbb{P}(\overline{C}|B)\,\mathbb{P}(B), \end{aligned}$$

puis, en divisant par $\mathbb{P}(B)$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\,\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap \overline{C})\,\mathbb{P}(\overline{C}|B).} \tag{2}$$

3 Formulation du problème

Notons X_0 le signal émis par la source à l'entrée du canal et pour $1 \leqslant i \leqslant m$, X_i le signal reçu à l'issue du i^{e} émetteur-récepteur. Ce sont des variables aléatoires prenant les deux valeurs 0 et 1. Le problème posé consiste à déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X_m = 0)$, $\mathbb{P}(X_m = 1)$ et $\mathbb{P}(X_m = X_0)$. Le transit du signal dans la i^{e} boîte est schématisé par la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(X_i = b | X_{i-1} = a) = \begin{cases} q & \text{si } a = b \\ \varepsilon & \text{si } a \neq b \end{cases}.$$

3.1 Problème 1 : loi du signal de sortie (calcul de $\mathbb{P}(X_m = 0)$ et $\mathbb{P}(X_m = 1)$)

Appliquons la relation (1) aux événements $A = (X_i = a)$ pour $a \in \{0, 1\}$ et $B = (X_{i-1} = 0)$:

$$\mathbb{P}(X_i = a) = \mathbb{P}(X_i = a | X_{i-1} = 0)\,\mathbb{P}(X_{i-1} = 0) + \mathbb{P}(X_i = a | X_{i-1} = 1)\,\mathbb{P}(X_{i-1} = 1).$$

D'après les données, cela conduit, en posant $u_i = \mathbb{P}(X_i = 0)$ et $v_i = \mathbb{P}(X_i = 1)$, à

$$\begin{cases} u_i = q u_{i-1} + \varepsilon v_{i-1} \\ v_i = \varepsilon u_{i-1} + q v_{i-1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = p \\ v_0 = 1 - p \end{cases},$$

ou encore sous forme matricielle

$$U_i = A U_{i-1}$$

avec

$$U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} q & \varepsilon \\ \varepsilon & q \end{pmatrix}, \; U_0 = \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix}.$$

On a $U_m = A^m U_0$ d'où la nécessité de calculer A^m.

Le polynôme caractéristique de A est $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - 2q\lambda + (q^2 - \varepsilon^2)$, ce qui fournit les valeurs propres : $q + \varepsilon = 1$ et $q - \varepsilon = 2q - 1$. La diagonalisation de A donne $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2q-1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} A^m &= PD^mP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2q-1)^m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (2q-1)^m & 1 - (2q-1)^m \\ 1 - (2q-1)^m & 1 + (2q-1)^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et alors

$$U_m = A^m U_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1-p)[1 + (2q-1)^m] + p[1 - (2q-1)^m] \\ (1-p)[1 - (2q-1)^m] + p[1 + (2q-1)^m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - (p - \frac{1}{2})(2q-1)^m \\ \frac{1}{2} + (p - \frac{1}{2})(2q-1)^m \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la loi de probabilité du signal reçu à la sortie du canal :

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{P}(X_m = 0) = \dfrac{1}{2} - \left(p - \dfrac{1}{2}\right)(2q-1)^m \\ \mathbb{P}(X_m = 1) = \dfrac{1}{2} + \left(p - \dfrac{1}{2}\right)(2q-1)^m \end{cases}.}$$

Statistiquement, la proportion de 0 en sortie est de $\frac{1}{2} - (p - \frac{1}{2})(2q-1)^m$ et celle de 1 est de $\frac{1}{2} + (p - \frac{1}{2})(2q-1)^m$. Notons que lorsque $m \longrightarrow +\infty$, ces proportions tendent vers $\frac{1}{2}$ puisque $|2q - 1| < 1$ et donc, quelles que soient les proportions initiales de 0 et 1, les proportions finales sont équilibrées pour m grand et le signal a été complètement brouillé.

3.2 Problème 2 : qualité de la transmission (calcul de $\mathbb{P}(X_m = X_0)$)

Évaluons à présent la probabilité que le signal initial soit correctement restitué en sortie :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_m = X_0) &= \mathbb{P}((X_m = 0) \cap (X_0 = 0)) + \mathbb{P}((X_m = 1) \cap (X_0 = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X_m = 0|X_0 = 0)\,\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_m = 1|X_0 = 1)\,\mathbb{P}(X_0 = 1). \end{aligned}$$

On est amené à calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_m = 0|X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_m = 1|X_0 = 1)$. Posons à cet effet $u_i = \mathbb{P}(X_i = 0|X_0 = a)$ et $v_i = \mathbb{P}(X_i = 1|X_0 = a)$ pour $a \in \{0, 1\}$. L'application de la relation (2) aux événements $A = (X_i = b)$, $B = (X_0 = a)$ et $C = (X_{i-1} = 0)$ $(a, b \in \{0, 1\})$ conduit à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i = b|X_0 = a) = {} & \mathbb{P}(X_i = b|X_{i-1} = 0 \text{ et } X_0 = a)\,\mathbb{P}(X_{i-1} = 0|X_0 = a) \\ & + \mathbb{P}(X_i = b|X_{i-1} = 1 \text{ et } X_0 = a)\,\mathbb{P}(X_{i-1} = 1|X_0 = a). \end{aligned}$$

En supposant que chaque signal en sortie du i^{e} émetteur-récepteur ne subit que l'influence de ce dernier et non des précédents (c'est une propriété de perte de mémoire, on a affaire à une *chaîne de Markov*), on peut écrire

$$\mathbb{P}(X_i = b|X_{i-1} = c \text{ et } X_0 = a) = \mathbb{P}(X_i = b|X_{i-1} = c) \ \text{ pour } c \in \{0, 1\}.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(X_i = b | X_{i-1} = a) = \mathbb{P}(X_1 = b | X_0 = a) = \begin{cases} q & \text{si } a = b \\ \varepsilon & \text{si } a \neq b \end{cases}.$$

Pour $b = 0$ et $b = 1$, cela donne

$$\begin{cases} u_i &= q u_{i-1} + \varepsilon v_{i-1} \\ v_i &= \varepsilon u_{i-1} + q v_{i-1} \end{cases}.$$

On est ainsi confronté au même système de suites récurrentes que dans la partie précédente mais avec des conditions initiales différentes. Ici,

$$u_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}.$$

La solution est donnée cette fois par

$$\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (2q-1)^m \\ 1 - (2q-1)^m \end{pmatrix} \text{ si } a = 0,$$
$$\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - (2q-1)^m \\ 1 + (2q-1)^m \end{pmatrix} \text{ si } a = 1.$$

La probabilité $\mathbb{P}(X_m = 0 | X_0 = 0)$ correspond à u_m avec $a = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_m = 1 | X_0 = 1)$ correspond à v_m avec $a = 1$. En conséquence,

$$\mathbb{P}(X_m = 0 | X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_m = 1 | X_0 = 1) = \frac{1}{2} [1 + (2q-1)^m]$$

d'où il vient immédiatement

$$\boxed{\mathbb{P}(X_m = X_0) = \tfrac{1}{2} [1 + (2q-1)^m].}$$

Lorsque $m \longrightarrow +\infty$, cette probabilité tend vers $\frac{1}{2}$ puisque $|2q-1| < 1$ et donc, quelles que soient les proportions initiales de 0 et 1, pour m grand, le signal initial a une chance sur deux d'être correctement restitué à l'issue de canal.