INSA 1er cycle

Algèbre linéaire

Applications linéaires

Exercice 1 Dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$ rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j}\}$ et $\mathcal{B}'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, on considère les applications $f:E\to F$ et $g:F\to E$ définies par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x+y, x-y, x+2y),\\ g(x,y,z) &= (x+y+z, x-y-z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Écrire les matrices de f et g relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer les noyaux et images de f et g.
4. Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$, puis déterminer leurs matrices relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, ainsi que leurs noyaux et images que l'on comparera (au sens de l'inclusion) à ceux de f et g.

Exercice 2 Dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\mathbb{R}^4$ rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ et $\mathcal{B}'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$, on considère l'application linéaire $f:E\to F$ telle que

$$f(\vec{i})=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4,\quad f(\vec{j})=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3-\vec{e}_4,\quad f(\vec{k})=\vec{e}_1+\vec{e}_3.$$

1. Donner l'expression analytique de f.
2. Déterminer les noyau et image de f en précisant pour chacun une base et la dimension.

Exercice 3 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

1. Montrer que le système de vecteurs $\mathcal{B}_a=\{1,X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n\}$ est une base de E, a étant un réel fixé.
2. Calculer les coordonnées de X^k dans la base $\mathcal{B}_a$ pour $0\leqslant k\leqslant n$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton, ou la celle de Taylor).
3. Écrire les deux matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_a$. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ? On pourra introduire la base $\mathcal{B}_{-a}$.
4. Montrer que l'application f définie sur E par $f(P(X))=P(X+a)$ est un automorphisme de E dont on déterminera l'automorphisme réciproque.
5. Écrire les matrices $M(f;\mathcal{B}_a,\mathcal{B}_0)$, $M(f;\mathcal{B}_0)$ et $M(f;\mathcal{B}_a)$.

Exercice 4 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on considère les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$f_1(x)=e^{ax}\cos(bx)\ \text{ et }\ f_2(x)=e^{ax}\sin(bx)$$

où a et b sont des réels fixés, b non nul. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs f_1 et f_2, puis φ l'application définie sur F par $\varphi(f)=f'$.

1. Montrer que le système de vecteurs $\mathcal{B}=\{f_1,f_2\}$ est une base de F.
2. Montrer que φ est un automorphisme de F dont on calculera la matrice dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que l'automorphisme réciproque φ^{-1}.
3. Donner une primitive de la fonction $x\mapsto e^{ax}\cos(bx+\theta)$ sans calcul d'intégrale.

Exercice 5 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$.

1. Soit p l'endomorphisme de E défini par
$$p(x,y,z)=(x, x+\tfrac12 y-\tfrac12 z, x-\tfrac12 y+\tfrac12 z).$$
Montrer que p est une projection vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.
2. Soit s l'endomorphisme de E défini par
$$s(x,y,z)=(\tfrac13(5x+2y-4z), y, \tfrac13(4x+4y-5z)).$$
Montrer que s est une symétrie vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.

Exercice 6 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$.

1. Soit P le plan vectoriel de E d'équation $x-2y+3z=0$ et D la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Déterminer la représentation analytique de la projection vectorielle p de E sur P parallèlement à D. En déduire celle de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D.
2. Soit P le plan vectoriel de E d'équation $x+2y+3z=0$ et D la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. Déterminer la représentation analytique de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D. En déduire celle de la projection vectorielle s de E sur P parallèlement à D.

Exercice 7 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3, on considère l'application f définie sur E par

$$f(P(X))=\tfrac12[P(X)+P(1-X)].$$

1. Montrer que l'application f est un endomorphisme de E dont on déterminera la matrice dans la base canonique de E.
2. Déterminer les noyau et image de f.
3. Calculer $f\circ f$. Préciser alors géométriquement l'endomorphisme f.