

# Applications linéaires

**Exercice 1** On se place dans les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ . Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire ou non :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, x + 4y + 1)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + \sin(y + z), \ln(x^2 + 1))$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x + y^2, e^x - 2y - 1, x + 4y)$$

$$k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2x + y + z)$$

**Exercice 2** Dans les cas ci-dessous, l'application  $f : E \rightarrow F$  est-elle une application linéaire entre les espaces vectoriels  $E$  et  $F$ ? Une forme linéaire?

$$1. E = F = \mathbb{R}[X] \text{ et } f(P) = X^2 P'(X).$$

$$2. E = F = \mathbb{R}[X] \text{ et } g(P) = P'(X) + X^2.$$

$$3. E = \{\text{fonctions continues de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}\}, F = \mathbb{R} \text{ et } h(\varphi) = \int_0^1 e^t \varphi(t) dt.$$

$$4. E = \{\text{suites réelles}\}, F = \mathbb{R} \text{ et } k((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = u_0 + 4u_5.$$

**Exercice 3** Dans chacun des cas ci-dessous, existe-t-il une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  vérifiant les conditions suivantes? Si oui, est-elle unique?

$$1. f(1, 0, 0) = ((2, 3, -1)), \quad f((0, 1, 0)) = (1, 0, 2), \quad f(0, 0, 1) = ((2, -3, 1)).$$

$$2. g(1, 0, 0) = ((2, 3, -1)), \quad g((0, 1, 0)) = (1, 0, 2), \quad g(1, 1, 0) = ((3, 3, 0)).$$

$$3. h(1, 0, 0) = ((2, 3, -1)), \quad h((0, 1, 0)) = (1, 0, 2), \quad h(1, 1, 0) = ((3, 3, 1)).$$

**Exercice 4** On fixe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = ax + by + cz \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

Déterminer les différentielles de  $f$  et  $g$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**Exercice 5** On se place dans les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ . Pour chacune des applications linéaires suivantes, indiquer sans calcul si elle est injective, surjective :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, -x - y)$$

$$k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$$

$$\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2y - 3z, 2x - 4y - 6z)$$

**Exercice 6** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $f((x, y)) = (x - y, ax + y)$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.

2. On suppose  $a \neq -1$ . Déterminer les noyaux et images de  $f$ . Que peut-on en déduire?

3. On suppose que  $a = -1$ . Déterminer les noyaux et images de  $f$ . Que peut-on en déduire? Calculer  $f \circ f$  dans ce cas, puis exprimer le résultat en fonction de  $f$ .

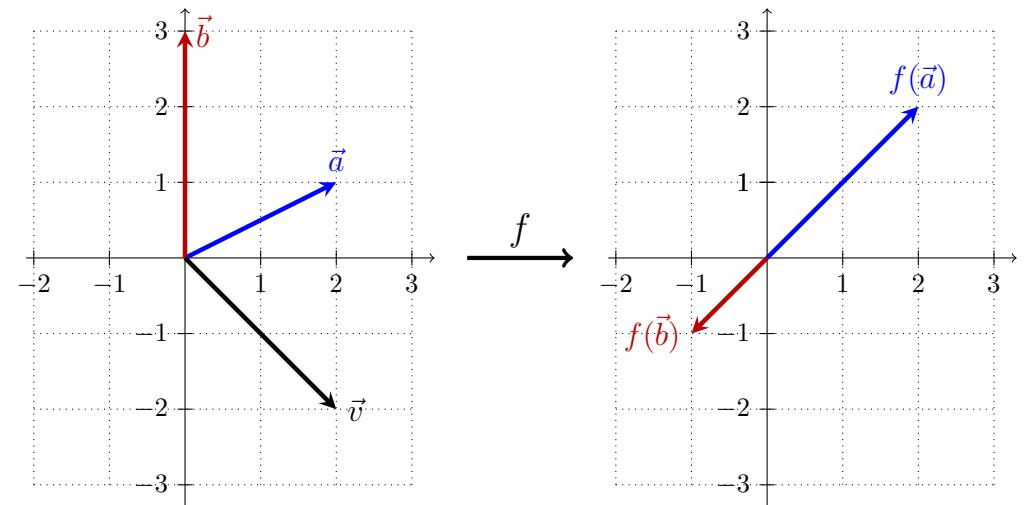
**Exercice 7** On considère l'application linéaire  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (iz, 2x - (1+i)z, -3y)$$

Montrer que  $f$  est bijective et déterminer son application réciproque.

**Exercice 8** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui envoie le vecteur bleu  $\vec{a}$  de gauche sur le vecteur bleu  $f(\vec{a})$  de droite, et le vecteur rouge  $\vec{b}$  de gauche sur le vecteur rouge  $f(\vec{b})$  de droite.

1. Dessiner sur le graphique de droite l'image par  $f$  du vecteur noir  $\vec{v}$ , notée  $f(\vec{v})$  (on ne fera aucun calcul).
2. Déterminer si  $f$  est bijective (on attend une justification en une phrase).
3. Déterminer à l'aide du graphique de droite l'image et le noyau de  $f$ .



**Exercice 9** Dans les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $E = \mathbb{R}^2$  et  $F = \mathbb{R}^3$  rapportés à leurs bases canoniques respectives  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on considère les applications linéaires  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  définies par

$$f((x, y)) = (2x + y, x - y, x + 2y) \quad \text{et} \quad g((x, y, z)) = (x + y + z, x - y - z).$$

1. Écrire les matrices de  $f$  et  $g$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
2. Déterminer les noyaux et images de  $f$  et  $g$ .
3. Calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ , puis déterminer leurs matrices relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , ainsi que leurs noyaux et images que l'on comparera (au sens de l'inclusion) à ceux de  $f$  et  $g$  (cf. exercice 15, question 1a).

**Exercice 10** Dans les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \mathbb{R}^4$  rapportés à leurs bases canoniques respectives  $\mathcal{B}_E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $\mathcal{B}_F = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère l'application linéaire  $f : E \rightarrow F$  telle que

$$f(\vec{i}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \quad f(\vec{j}) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \quad f(\vec{k}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

1. Donner l'expression analytique de  $f$ .
2. Déterminer les noyau et image de  $f$  en précisant pour chacun une base et la dimension.

**Exercice 11** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  l'application définie par

$$\varphi((a, b, c)) = aX^3 + (b - a)X^2 + cX + b.$$

1. Vérifier que  $\varphi$  est linéaire. Sans aucun calcul, dire si  $\varphi$  est surjective.
2. Déterminer  $\text{Ker}(\varphi)$  et  $\text{Im}(\varphi)$ .
3. Peut-on trouver une application linéaire  $\psi_1 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\varphi \circ \psi_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$  ?
4. Peut-on trouver une application linéaire  $\psi_2 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\psi_2 \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  ?

**Exercice 12** Dans  $\mathbb{R}_2[X]$  soit l'ensemble  $\mathcal{P}_{1,2}$  des polynômes ayant 1 et 2 pour racines. Soit l'isomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$  défini par  $\varphi(aX^2 + bX + c) = (a, b, c)$ .

1. Montrer que  $\varphi(\mathcal{P}_{1,2})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . En donner une base.
2. Reprendre la démarche en définissant maintenant  $\mathcal{P}_{1,2}$  et  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 13** On se place dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_4[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4.

1. Montrer que la famille de vecteurs  $\mathcal{B}_a = (1, X - a, (X - a)^2, (X - a)^3, (X - a)^4)$  est une base de  $E$ ,  $a$  étant un réel fixé.
2. Calculer les coordonnées de  $X^k$  dans la base  $\mathcal{B}_a$  pour  $0 \leq k \leq 4$  (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton, ou celle de Taylor).
3. Montrer que l'application  $f$  définie sur  $E$  par  $f(P(X)) = P(X + a)$  est un automorphisme de  $E$  dont on déterminera l'automorphisme réciproque.
4. Écrire les matrices  $M(f; \mathcal{B}_a, \mathcal{B}_0)$ ,  $M(f; \mathcal{B}_0)$  et  $M(f; \mathcal{B}_a)$ .

**Exercice 14** Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles, on considère les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies par

$$f_1(x) = e^{ax} \cos(bx) \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{ax} \sin(bx)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels fixés,  $b$  non nul. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $f_1$  et  $f_2$ , puis  $\varphi$  l'application définie sur  $F$  par  $\varphi(f) = f'$ .

1. Montrer que le système de vecteurs  $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$  est une base de  $F$ .
2. Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $F$  dont on calculera la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  ainsi que l'automorphisme réciproque  $\varphi^{-1}$ .
3. Donner une primitive de la fonction  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx - \theta)$  sans calcul d'intégrale.

**Exercice 15**

1. Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications linéaires.
  - (a) Comparer (au sens de l'inclusion)  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Ker}(g \circ f)$ , puis  $\text{Im}(g)$  et  $\text{Im}(g \circ f)$ .
  - (b) Montrer que si  $g$  est injective, alors  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ , et que si  $f$  est surjective, alors  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$ .
  - (c) Montrer que  $g \circ f = 0$  si et seulement si  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ .

2. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension 3 tel que  $f \circ f = 0$ .
  - (a) En discutant selon les valeurs possibles du rang de  $f$ , en déduire les dimensions de  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
  - (b) Construire une application  $f$  vérifiant les hypothèses de l'exercice.

**Exercice 16** Soit  $n \geq 1$  et  $\varphi$  la fonction définie sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$  par  $\varphi(P) = P - XP'$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est définit un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer une base de  $\text{Ker}(\varphi)$  et une base de  $\text{Im}(\varphi)$ . L'endomorphisme  $\varphi$  est-il bijectif ?

**Exercice 17** On considère l'application  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$$

1. Montrer que  $u$  est une forme linéaire non nulle.
2. En déduire la dimension de  $\text{Ker}(u)$ , puis déterminer une base de  $\text{Ker}(u)$ .

**Exercice 18** Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on note  $D(P) = P'$  et  $I(P)$  la primitive de  $P$  s'annulant en 0.

1. Vérifier que  $D$  et  $I$  sont des endomorphismes du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Déterminer leur noyau et leur image. Sont-ils injectifs ? surjectifs ? bijectifs ?
3. Déterminer  $I \circ D$  et  $D \circ I$ .

**Exercice 19**

1. Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $u, v$  deux endomorphismes de  $V$  tels que  $u \circ v = \text{id}_V$ . Montrer que  $u$  et  $v$  sont bijectifs et  $u = v^{-1}$ .
2. Montrer que le résultat est faux en dimension infinie à l'aide de  $V$  l'espace des suites dans  $\mathbb{K}$  et de  $I$  (resp.  $D$ ) l'application qui envoie toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $(0, u_0, u_1, u_2, \dots)$  resp.  $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ .

## Pour les insatiables...

**Exercice 20 (Polynôme d'interpolation de Lagrange)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels distincts deux à deux. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P \mapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n))$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire et injective. En déduire que  $f$  est bijective.
2. Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Déterminer, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f^{-1}(e_i)$ .
3. Que fait l'application  $f^{-1}$  ?

**Exercice 21** On considère dans  $\mathbb{R}^2$  les trois vecteurs  $\vec{u} = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, -1)$ ,  $\vec{w} = (1, 4)$ .

1. Démontrer que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $a$  existe-t-il une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(\vec{u}) = (2, 1)$ ,  $f(\vec{v}) = (1, -1)$  et  $f(\vec{w}) = (5, a)$  ?

**Exercice 22** Soit  $E$  un plan vectoriel de base  $(\vec{u}, \vec{v})$  et  $m \in \mathbb{R}$ . On définit l'endomorphisme  $f$  de  $E$  par

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = m\vec{u} + (m+2)\vec{v} \\ f(\vec{v}) = (m-2)\vec{u} + (m-1)\vec{v} \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de  $m$  l'endomorphisme  $f$  est-il un isomorphisme ?
2. Déterminer les noyaux et images de  $f$  en fonction des valeurs de  $m$ .

**Exercice 23** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  deux applications linéaires. Montrer que  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(g \circ f))$ .

**Exercice 24** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire telle que  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$ .

1. Donner les dimensions de  $\text{Ker}(f)$  et de  $\text{Im}(f)$ .
2. Montrer que pour tout vecteur  $\vec{v} \in E$ , on a  $(f \circ f)(\vec{v}) = \vec{0}_E$ .
3. Soit  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  une base de  $\text{Ker}(f)$  et soit  $(\vec{u}_3, \vec{u}_4) \in E^2$  des vecteurs tels que  $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1$  et  $f(\vec{u}_4) = \vec{v}_2$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$  est une base de  $E$ .
4. Donner la matrice de  $f$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 25** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on définit l'ensemble  $E_\lambda = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$ .

1. Montrer que  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Si  $E_\lambda \neq \{\vec{0}_E\}$ , on dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de l'endomorphisme  $f$  et que  $E_\lambda$  est le *sous-espace propre* associé à  $\lambda$ .
2. À quel sous-espace vectoriel l'ensemble  $E_0$  est-il égal ?
3. Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels distincts. Montrer que  $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}_E\}$ .
4. (a) **Exemple 1 :** soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  définie par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f((x, y)) = (x+2y, -x+4y)$ .  
À l'aide de systèmes linéaires, déterminer l'ensemble  $E_\lambda$  pour tout réel  $\lambda \in \mathbb{R}$  (on distinguera trois cas).  
(b) **Exemple 2 :** soit  $E$  l'espace vectoriel des suites à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  définie par  $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ ,  $f((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .  
Déterminer l'ensemble  $E_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
(c) **Exemple 3 :** soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivables une infinité de fois, et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  définie par  $\forall \varphi \in E$ ,  $f(\varphi) = \varphi'$ .  
Déterminer l'ensemble  $E_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 26** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f : E \rightarrow E$  une application linéaire telle que pour tout  $\vec{v} \in E$ , les vecteurs  $\vec{v}$  et  $f(\vec{v})$  soient colinéaires.

1. Justifier que pour tout  $\vec{v} \in E$ , il existe  $\lambda_{\vec{v}} \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\vec{v}) = \lambda_{\vec{v}}\vec{v}$ .
2. Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$  deux vecteurs non nuls.
  - (a) Montrer que si  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une famille liée alors  $\lambda_{\vec{u}} = \lambda_{\vec{v}}$ .
  - (b) Montrer que si  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une famille libre alors  $\lambda_{\vec{u}} = \lambda_{\vec{v}}$  (on pourra écrire  $f(\vec{u} + \vec{v})$  de deux manières différentes).
3. En déduire que  $f$  est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire que le coefficient  $\lambda_{\vec{u}}$  est indépendant du vecteur de  $E$  considéré : il existe un réel  $\lambda$  tel que pour tout  $\vec{u} \in E$ ,  $\lambda_{\vec{u}} = \lambda$  et l'on a alors pour tout  $\vec{u} \in E$ ,  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ .

**Exercice 27** Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes. On considère le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  des suites complexes vérifiant la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .

En considérant l'application  $f : E \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par  $f((u_n))_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1)$ , déterminer  $\dim(E)$ .

**Exercice 28** Soit  $\mathcal{S}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles. On fixe un entier  $p \geq 1$ .

1. Montrer que l'application  $\begin{aligned} f : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{aligned}$  est linéaire.
2. Est-elle surjective ? injective ? Déterminer son noyau.

**Exercice 29** Soit  $\mathcal{S}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Soit  $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  l'« opérateur de décalage », qui envoie toute suite  $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$  sur la suite  $T(u)$  définie par  $T(u)_n = u_{n+1}$ , c'est-à-dire  $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ .

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}$ .
2.  $T$  est-il surjectif ? injectif ? Déterminer son noyau.

**Exercice 30** On se place dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ .

1. Soit  $p$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  
$$p((x, y, z)) = (x, x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z).$$
Montrer que  $p$  est une projection vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.
2. Soit  $s$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  
$$s((x, y, z)) = (\frac{1}{3}(5x + 2y - 4z), y, \frac{1}{3}(4x + 4y - 5z)).$$
Montrer que  $s$  est une symétrie vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.

**Exercice 31** On se place dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ .

1. Soit  $P$  le plan vectoriel de  $E$  d'équation  $x - 2y + 3z = 0$  et  $D$  la droite vectorielle de  $E$  engendrée par le vecteur  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Déterminer la représentation analytique de la projection vectorielle  $p$  de  $E$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ . En déduire celle de la symétrie vectorielle  $s$  par rapport à  $P$  parallèlement à  $D$ .
2. Soit  $P$  le plan vectoriel de  $E$  d'équation  $x + 2y + 3z = 0$  et  $D$  la droite vectorielle de  $E$  engendrée par le vecteur  $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ . Déterminer la représentation analytique de la symétrie vectorielle  $s$  par rapport à  $P$  parallèlement à  $D$ . En déduire celle de la projection vectorielle  $p$  de  $E$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .