

Applications linéaires

Exercice 1 On se place dans les \mathbb{R} -espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire ou non :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - 2y, x + 4y + 1) & (x, y, z) \longmapsto (x + \sin(y + z), \ln(x^2 + 1)) \\ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y^2, e^x - 2y - 1, x + 4y) & (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, 2x + y + z) \end{array}$$

Exercice 2 Dans les cas ci-dessous, l'application $f : E \rightarrow F$ est-elle une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F ? Une forme linéaire?

1. $E = F = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = X^2 P'(X)$.
2. $E = F = \mathbb{R}[X]$ et $g(P) = P'(X) + X^2$.
3. $E = \{\text{fonctions continues de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{R}$ et $h(\varphi) = \int_0^1 e^t \varphi(t) dt$.
4. $E = \{\text{suites réelles}\}$, $F = \mathbb{R}$ et $k((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = u_0 + 4u_5$.

Exercice 3 Dans chacun des cas ci-dessous, existe-t-il une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 vérifiant les conditions suivantes? Si oui, est-elle unique?

1. $f(1, 0, 0) = ((2, 3, -1))$, $f((0, 1, 0)) = (1, 0, 2)$, $f(0, 0, 1) = ((2, -3, 1))$.
2. $g(1, 0, 0) = ((2, 3, -1))$, $g((0, 1, 0)) = (1, 0, 2)$, $g(1, 1, 0) = ((3, 3, 0))$.
3. $h(1, 0, 0) = ((2, 3, -1))$, $h((0, 1, 0)) = (1, 0, 2)$, $h(1, 1, 0) = ((3, 3, 1))$.

Exercice 4 On fixe $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = ax + by + cz \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

Déterminer les différentielles de f et g au point (x_0, y_0, z_0) .

Exercice 5 On se place dans les \mathbb{R} -espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Pour chacune des applications linéaires suivantes, indiquer sans calcul si elle est injective, surjective :

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, y, 0) & (x, y, z) \longmapsto (x, y) & (x, y) \longmapsto (x + y, -x - y) \\ k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & l : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \\ (x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y) & (x, y, z) \longmapsto (x - 2y - 3z, 2x - 4y - 6z) & \end{array}$$

Exercice 6 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f((x, y)) = (x - y, ax + y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. On suppose $a \neq -1$. Déterminer les noyaux et images de f . Que peut-on en déduire?
3. On suppose que $a = -1$. Déterminer les noyaux et images de f . Que peut-on en déduire? Calculer $f \circ f$ dans ce cas, puis exprimer le résultat en fonction de f .

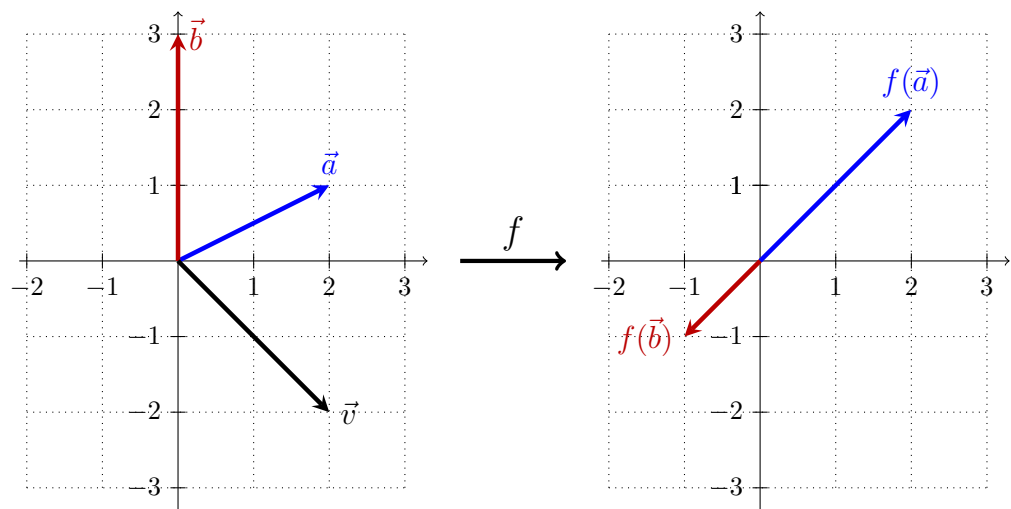
Exercice 7 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$.

$$(x, y, z) \longmapsto (iz, 2x - (1 + i)z, -3y)$$

Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 8 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 qui envoie le vecteur bleu \vec{a} de gauche sur le vecteur bleu $f(\vec{a})$ de droite, et le vecteur rouge \vec{b} de gauche sur le vecteur rouge $f(\vec{b})$ de droite.

1. Dessiner sur le graphique de droite l'image par f du vecteur noir \vec{v} , notée $f(\vec{v})$ (on ne fera aucun calcul).
2. Déterminer si f est bijective (on attend une justification en une phrase).
3. Déterminer à l'aide du graphique de droite l'image et le noyau de f .



Exercice 9 Dans les \mathbb{R} -espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les applications linéaires $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ définies par

$$f((x, y)) = (2x + y, x - y, x + 2y) \quad \text{et} \quad g((x, y, z)) = (x + y + z, x - y - z).$$

1. Écrire les matrices de f et g relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .
2. Déterminer les noyaux et images de f et g .
3. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, puis déterminer leurs matrices relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , ainsi que leurs noyaux et images que l'on comparera (au sens de l'inclusion) à ceux de f et g (cf. exercice 15, question 1a).

Exercice 10 Dans les \mathbb{R} -espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^4$ rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que

$$f(\vec{i}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \quad f(\vec{j}) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \quad f(\vec{k}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

1. Donner l'expression analytique de f .
2. Déterminer les noyau et image de f en précisant pour chacun une base et la dimension.

Exercice 11 Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par

$$\varphi((a, b, c)) = aX^3 + (b - a)X^2 + cX + b.$$

1. Vérifier que φ est linéaire. Sans aucun calcul, dire si φ est surjective.
2. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.
3. Peut-on trouver une application linéaire $\psi_1 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\varphi \circ \psi_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$?
4. Peut-on trouver une application linéaire $\psi_2 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\psi_2 \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$?

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}_2[X]$ soit l'ensemble $\mathcal{P}_{1,2}$ des polynômes ayant 1 et 2 pour racines. Soit l'isomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 défini par $\varphi(aX^2 + bX + c) = (a, b, c)$.

1. Montrer que $\varphi(\mathcal{P}_{1,2})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En donner une base.
2. Reprendre la démarche en définissant maintenant $\mathcal{P}_{1,2}$ et φ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 13 On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4.

1. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}_a = (1, X - a, (X - a)^2, (X - a)^3, (X - a)^4)$ est une base de E , a étant un réel fixé.
2. Calculer les coordonnées de X^k dans la base \mathcal{B}_a pour $0 \leq k \leq 4$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton, ou celle de Taylor).
3. Montrer que l'application f définie sur E par $f(P(X)) = P(X + a)$ est un automorphisme de E dont on déterminera l'automorphisme réciproque.
4. Écrire les matrices $M(f; \mathcal{B}_a, \mathcal{B}_0)$, $M(f; \mathcal{B}_0)$ et $M(f; \mathcal{B}_a)$.

Exercice 14 Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel E des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs réelles, on considère les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$f_1(x) = e^{ax} \cos(bx) \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{ax} \sin(bx)$$

où a et b sont des réels fixés, b non nul. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs f_1 et f_2 , puis φ l'application définie sur F par $\varphi(f) = f'$.

1. Montrer que le système de vecteurs $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de F .
2. Montrer que φ est un automorphisme de F dont on calculera la matrice dans la base \mathcal{B} ainsi que l'automorphisme réciproque φ^{-1} .
3. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax} \cos(bx - \theta)$ sans calcul d'intégrale.

Exercice 15

1. Soit E, F, G trois espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
 - (a) Comparer (au sens de l'inclusion) $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(g \circ f)$, puis $\text{Im}(g)$ et $\text{Im}(g \circ f)$.
 - (b) Montrer que si g est injective, alors $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$, et que si f est surjective, alors $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
 - (c) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f \circ f = 0$.
 - (a) En discutant selon les valeurs possibles du rang de f , en déduire les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
 - (b) Construire une application f vérifiant les hypothèses de l'exercice.

Exercice 16 Soit $n \geq 1$ et φ la fonction définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P - XP'$.

1. Montrer que φ est défini un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.
L'endomorphisme φ est-il bijectif ?

Exercice 17 On considère l'application $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$P \longmapsto \int_0^1 P(t) dt$$

1. Montrer que u est une forme linéaire non nulle.
2. En déduire la dimension de $\text{Ker}(u)$, puis déterminer une base de $\text{Ker}(u)$.

Exercice 18 Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $D(P) = P'$ et $I(P)$ la primitive de P s'annulant en 0.

1. Vérifier que D et I sont des endomorphismes du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer leur noyau et leur image. Sont-ils injectifs ? surjectifs ? bijectifs ?
3. Déterminer $I \circ D$ et $D \circ I$.

Exercice 19

1. Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit u, v deux endomorphismes de V tels que $u \circ v = \text{id}_V$. Montrer que u et v sont bijectifs et $u = v^{-1}$.
2. Montrer que le résultat est faux en dimension infinie à l'aide de V l'espace des suites dans \mathbb{K} et de I (resp. D) l'application qui envoie toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(0, u_0, u_1, u_2, \dots)$ resp. (u_1, u_2, u_3, \dots) .

Pour les insatiables...

Exercice 20 (Polynôme d'interpolation de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels distincts deux à deux. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P \longmapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n))$$

1. Montrer que f est linéaire et injective. En déduire que f est bijective.
2. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Déterminer, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $f^{-1}(e_i)$.
3. Que fait l'application f^{-1} ?

Exercice 21 On considère dans \mathbb{R}^2 les trois vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (2, -1)$, $\vec{w} = (1, 4)$.

1. Démontrer que (\vec{u}, \vec{v}) est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(\vec{u}) = (2, 1)$, $f(\vec{v}) = (1, -1)$ et $f(\vec{w}) = (5, a)$?

Exercice 22 Soit E un plan vectoriel de base (\vec{u}, \vec{v}) et $m \in \mathbb{R}$. On définit l'endomorphisme f de E par

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = m\vec{u} + (m+2)\vec{v} \\ f(\vec{v}) = (m-2)\vec{u} + (m-1)\vec{v} \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il un isomorphisme ?
2. Déterminer les noyaux et images de f en fonction des valeurs de m .

Exercice 23 Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications linéaires. Montrer que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(g \circ f))$.

Exercice 24 Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $f : E \rightarrow E$ une application linéaire telle que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

1. Donner les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
2. Montrer que pour tout vecteur $\vec{v} \in E$, on a $(f \circ f)(\vec{v}) = \vec{0}_E$.
3. Soit (\vec{v}_1, \vec{v}_2) une base de $\text{Ker}(f)$ et soit $(\vec{u}_3, \vec{u}_4) \in E^2$ des vecteurs tels que $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1$ et $f(\vec{u}_4) = \vec{v}_2$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une base de E .
4. Donner la matrice de f par rapport à la base \mathcal{B} .

Exercice 25 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit l'ensemble $E_\lambda = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$.

1. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E .
Si $E_\lambda \neq \{\vec{0}_E\}$, on dit que λ est une *valeur propre* de l'endomorphisme f et que E_λ est le *sous-espace propre* associé à λ .
2. À quel sous-espace vectoriel l'ensemble E_0 est-il égal ?
3. Soit λ et μ deux réels distincts. Montrer que $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}_E\}$.
4. (a) **Exemple 1** : soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x+2y, -x+4y)$.
À l'aide de systèmes linéaires, déterminer l'ensemble E_λ pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ (on distinguera trois cas).
(b) **Exemple 2** : soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans \mathbb{R} , et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, f((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
Déterminer l'ensemble E_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) **Exemple 3** : soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivables une infinité de fois, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall \varphi \in E, f(\varphi) = \varphi'$.
Déterminer l'ensemble E_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 26 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f : E \rightarrow E$ une application linéaire telle que pour tout $\vec{v} \in E$, les vecteurs \vec{v} et $f(\vec{v})$ soient colinéaires.

1. Justifier que pour tout $\vec{v} \in E$, il existe $\lambda_{\vec{v}} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\vec{v}) = \lambda_{\vec{v}}\vec{v}$.
2. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ deux vecteurs non nuls.
(a) Montrer que si (\vec{u}, \vec{v}) est une famille liée alors $\lambda_{\vec{u}} = \lambda_{\vec{v}}$.
(b) Montrer que si (\vec{u}, \vec{v}) est une famille libre alors $\lambda_{\vec{u}} = \lambda_{\vec{v}}$ (on pourra écrire $f(\vec{u} + \vec{v})$ de deux manières différentes).
3. En déduire que f est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire que le coefficient $\lambda_{\vec{u}}$ est indépendant du vecteur de E considéré : il existe un réel λ tel que pour tout $\vec{u} \in E, \lambda_{\vec{u}} = \lambda$ et l'on a alors pour tout $\vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

Exercice 27 Soit a et b deux nombres complexes. On considère le \mathbb{C} -espace vectoriel E des suites complexes vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

En considérant l'application $f : E \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $f((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_0, u_1)$, déterminer $\dim(E)$.

Exercice 28 Soit \mathcal{S} le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles. On fixe un entier $p \geq 1$.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{array}$$
 est linéaire.
2. Est-elle surjective ? injective ? Déterminer son noyau.

Exercice 29 Soit \mathcal{S} le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ l'« opérateur de décalage », qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, c'est-à-dire $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de \mathcal{S} .
2. T est-il surjectif ? injectif ? Déterminer son noyau.

Exercice 30 On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit p l'endomorphisme de E défini par

$$p((x, y, z)) = (x, x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z).$$

Montrer que p est une projection vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.

2. Soit s l'endomorphisme de E défini par

$$s((x, y, z)) = (\frac{1}{3}(5x + 2y - 4z), y, \frac{1}{3}(4x + 4y - 5z)).$$

Montrer que s est une symétrie vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.

Exercice 31 On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit P le plan vectoriel de E d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et D la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Déterminer la représentation analytique de la projection vectorielle p de E sur P parallèlement à D . En déduire celle de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D .
2. Soit P le plan vectoriel de E d'équation $x + 2y + 3z = 0$ et D la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Déterminer la représentation analytique de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D . En déduire celle de la projection vectorielle s de E sur P parallèlement à D .