INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Applications linéaires

Exercice 1 On se place dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire ou non :

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-2y, x+4y+1) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \big(x+\sin(y+z), \ln(x^2+1)\big) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y^2, \mathrm{e}^x-2y-1, x+4y) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x+y+z) \end{array}$$

Exercice 2 Dans les cas ci-dessous, l'application $f : E \to F$ est-elle une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F ? Une forme linéaire ?

1. $E = F = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = X^2P'(X)$.
2. $E = F = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P'(X) + X^2$.
3. $E = \{\text{fonctions continues de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{R}$ et $f(\varphi) = \int_0^1 e^t\varphi(t)\,dt$.
4. $E = \{\text{suites réelles}\}$, $F = \mathbb{R}$ et $f\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = u_0 + 4u_5$.

Exercice 3 Dans chacun des cas ci-dessous, existe-t-il une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes ? Si oui, est-elle unique ?

1. $f(1,0,0) = (2,3,-1)$, $f(0,1,0) = (1,0,2)$, $f(0,0,1) = (2,-3,1)$.
2. $f(1,0,0) = (2,3,-1)$, $f(0,1,0) = (1,0,2)$, $f(1,1,0) = (3,3,0)$.
3. $f(1,0,0) = (2,3,-1)$, $f(0,1,0) = (1,0,2)$, $f(1,1,0) = (3,3,1)$.

Exercice 4 On fixe $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f\big((x,y,z)\big) = ax+by+cz$ et $g\big((x,y,z)\big) = ax^2+by^2+cz^2$.

Déterminer les différentielles de f et g au point (x_0,y_0,z_0).

Exercice 5 On se place dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Pour chacune des applications linéaires suivantes, indiquer sans calcul si elle est injective, surjective :

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, -x-y) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x+2y, 3x+3y) \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y-3z, 2x-4y-6z) \end{array}$$

Exercice 6 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f\big((x,y)\big) = (x-y, ax+y)$.

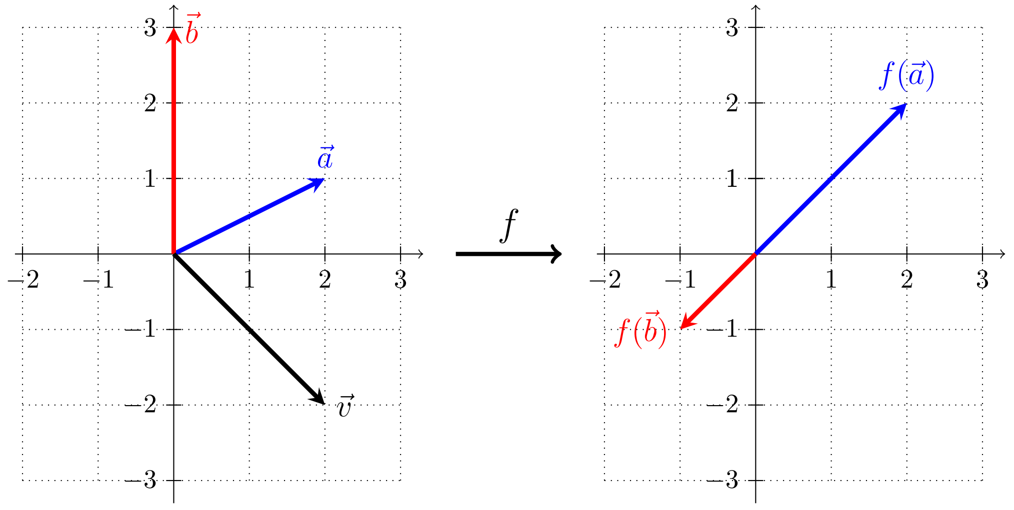
1. Montrer que f est une application linéaire.
2. On suppose $a \neq -1$. Déterminer les noyaux et images de f. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose que $a = -1$. Déterminer les noyaux et images de f. Que peut-on en déduire ? Calculer $f \circ f$ dans ce cas, puis exprimer le résultat en fonction de f.

Exercice 7 On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (iz, 2x-(1+i)z, -3y) \end{array}$.

Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 8 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui envoie le vecteur bleu $\vec{a}$ de gauche sur le vecteur bleu $f(\vec{a})$ de droite, et le vecteur rouge $\vec{b}$ de gauche sur le vecteur rouge $f(\vec{b})$ de droite.

1. Dessiner sur le graphique de droite l'image par f du vecteur noir $\vec{v}$, notée $f(\vec{v})$ (*on ne fera aucun calcul*).
2. Déterminer si f est bijective (on attend une justification en une phrase).
3. Déterminer à l'aide du graphique de droite l'image et le noyau de f.



Exercice 9 Dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B} = \big(\vec{i}, \vec{j}\big)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to E$ définies par

$$f\big((x,y)\big) = (2x+y, x-y, x+2y) \quad \text{et} \quad g\big((x,y,z)\big) = (x+y+z, x-y-z).$$

1. Écrire les matrices de f et g relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer les noyaux et images de f et g.
3. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, puis déterminer leurs matrices relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, ainsi que leurs noyaux et images que l'on comparera (au sens de l'inclusion) à ceux de f et g (cf. exercice 15, question 1a).

Exercice 10 Dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^4$ rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = \big(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\big)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère l'application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$f(\vec{i}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \quad f(\vec{j}) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \quad f(\vec{k}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

1. Donner l'expression analytique de f.
2. Déterminer les noyau et image de f en précisant pour chacun une base et la dimension.

Exercice 11 Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par

$$\varphi\big((a,b,c)\big) = aX^3 + (b-a)X^2 + cX + b.$$

1. Vérifier que φ est linéaire. Sans aucun calcul, dire si φ est surjective.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. Peut-on trouver une application linéaire $\psi_1 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\varphi \circ \psi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$?
4. Peut-on trouver une application linéaire $\psi_2 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\psi_2 \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$?

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}_2[X]$ soit l'ensemble $\mathcal{P}_{1,2}$ des polynômes ayant 1 et 2 pour racines. Soit l'isomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(aX^2+bX+c) = (a,b,c)$.

1. Montrer que $\varphi(\mathcal{P}_{1,2})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une base.
2. Reprendre la démarche en définissant maintenant $\mathcal{P}_{1,2}$ et φ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 13 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4.

1. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}_a = \big(1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3, (X-a)^4\big)$ est une base de E, a étant un réel fixé.
2. Calculer les coordonnées de X^k dans la base $\mathcal{B}_a$ pour $0 \leqslant k \leqslant 4$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton, ou celle de Taylor).
3. Montrer que l'application f définie sur E par $f\big(P(X)\big) = P(X+a)$ est un automorphisme de E dont on déterminera l'automorphisme réciproque.
4. Écrire les matrices $M(f;\mathcal{B}_a,\mathcal{B}_0)$, $M(f;\mathcal{B}_0)$ et $M(f;\mathcal{B}_a)$.

Exercice 14 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on considère les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$f_1(x) = e^{ax}\cos(bx) \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$$

où a et b sont des réels fixés, b non nul. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs f_1 et f_2, puis φ l'application définie sur F par $\varphi(f) = f'$.

1. Montrer que le système de vecteurs $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de F.
2. Montrer que φ est un automorphisme de F dont on calculera la matrice dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que l'automorphisme réciproque φ^{-1}.
3. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax}\cos(bx-\theta)$ sans calcul d'intégrale.

Exercice 15

1. Soit E, F, G trois espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
   (a) Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g\circ f)$, puis $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g\circ f)$.
   (b) Montrer que si g est injective, alors $\mathrm{Ker}(g\circ f) = \mathrm{Ker}(f)$, et que si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
   (c) Montrer que $g\circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f\circ f = 0$.
   (a) En discutant selon les valeurs possibles du rang de f, en déduire les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Construire une application f vérifiant les hypothèses de l'exercice.

Exercice 16 Soit $n \geqslant 1$ et φ la fonction définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P - XP'$.

1. Montrer que φ est définit un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   L'endomorphisme φ est-il bijectif ?

Exercice 17 On considère l'application $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 P(t)\,dt \end{array}$.

1. Montrer que u est une forme linéaire non nulle.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 18 Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $D(P) = P'$ et $I(P)$ la primitive de P s'annulant en 0.

1. Vérifier que D et I sont des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer leur noyau et leur image. Sont-ils injectifs ? surjectifs ? bijectifs ?
3. Déterminer $I\circ D$ et $D\circ I$.

Exercice 19

1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u, v deux endomorphismes de V tels que $u\circ v = \mathrm{id}_V$. Montrer que u et v sont bijectifs et $u = v^{-1}$.
2. Montrer que le résultat est faux en dimension infinie à l'aide de V l'espace des suites dans $\mathbb{K}$ et de I (resp. D) l'application qui envoie toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(0, u_0, u_1, u_2, \dots)$ resp. $(u_1, u_2, u_3, \dots)$.

Pour les insatiables...

Exercice 20 (Polynôme d'interpolation de Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels distincts deux à deux. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)\big) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire et injective. En déduire que f est bijective.
2. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $f^{-1}(e_i)$.
3. Que fait l'application f^{-1} ?

Exercice 21 On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $\vec{u}=(1,1), \vec{v}=(2,-1), \vec{w}=(1,4)$.

1. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(\vec{u})=(2,1)$, $f(\vec{v})=(1,-1)$ et $f(\vec{w})=(5,a)$?

Exercice 22 Soit E un plan vectoriel de base $(\vec{u},\vec{v})$ et $m\in\mathbb{R}$. On définit l'endomorphisme f de E par

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = m\vec{u}+(m+2)\vec{v} \\ f(\vec{v}) = (m-2)\vec{u}+(m-1)\vec{v} \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il un isomorphisme ?
2. Déterminer les noyaux et images de f en fonction des valeurs de m.

Exercice 23 Soit E et F deux espaces vectoriels et $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow E$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)=f\big(\mathrm{Ker}(g\circ f)\big)$.

Exercice 24 Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $f:E\longrightarrow E$ une application linéaire telle que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(f)$.

1. Donner les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que pour tout vecteur $\vec{v}\in E$, on a $(f\circ f)(\vec{v})=\vec{0}_E$.
3. Soit $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et soit $(\vec{u}_3,\vec{u}_4)\in E^2$ des vecteurs tels que $f(\vec{u}_3)=\vec{v}_1$ et $f(\vec{u}_4)=\vec{v}_2$. Montrer que $\mathcal{B}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4)$ est une base de E.
4. Donner la matrice de f par rapport à la base B.

Exercice 25 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $f\in\mathcal{L}(E)$.

Pour $\lambda\in\mathbb{K}$, on définit l'ensemble $E_\lambda=\{\vec{u}\in E : f(\vec{u})=\lambda\vec{u}\}$.

1. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
   Si $E_\lambda\neq\{\vec{0}_E\}$, on dit que λ est une *valeur propre* de l'endomorphisme f et que E_λ est le *sous-espace propre* associé à λ.
2. À quel sous-espace vectoriel l'ensemble E_0 est-il égal ?
3. Soit λ et μ deux réels distincts. Montrer que $E_\lambda\cap E_\mu=\{\vec{0}_E\}$.
4. (a) **Exemple 1** : soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\big((x,y)\big)=(x+2y,-x+4y)$.
   À l'aide de systèmes linéaires, déterminer l'ensemble E_λ pour tout réel $\lambda\in\mathbb{R}$ (on distinguera trois cas).
   (b) **Exemple 2** : soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ définie par $\forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ f\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)=(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   Déterminer l'ensemble E_λ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.
   (c) **Exemple 3** : soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables une infinité de fois, et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ définie par $\forall\varphi\in E,\ f(\varphi)=\varphi'$.
   Déterminer l'ensemble E_λ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 26 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f:E\longrightarrow E$ une application linéaire telle que pour tout $\vec{v}\in E$, les vecteurs $\vec{v}$ et $f(\vec{v})$ soient colinéaires.

1. Justifier que pour tout $\vec{v}\in E$, il existe $\lambda_{\vec{v}}\in\mathbb{R}$ tel que $f(\vec{v})=\lambda_{\vec{v}}\vec{v}$.
2. Soit $(\vec{u},\vec{v})\in E^2$ deux vecteurs non nuls.
   (a) Montrer que si $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille liée alors $\lambda_{\vec{u}}=\lambda_{\vec{v}}$.
   (b) Montrer que si $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille libre alors $\lambda_{\vec{u}}=\lambda_{\vec{v}}$ (on pourra écrire $f(\vec{u}+\vec{v})$ de deux manières différentes).
3. En déduire que f est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire que le coefficient $\lambda_{\vec{u}}$ est indépendant du vecteur de E considéré : il existe un réel λ tel que pour tout $\vec{u}\in E$, $\lambda_{\vec{u}}=\lambda$ et l'on a alors pour tout $\vec{u}\in E$, $f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$.

Exercice 27 Soit a et b deux nombres complexes. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E des suites complexes vérifiant la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.

En considérant l'application $f:E\longrightarrow\mathbb{C}^2$ définie par $f\big((u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}=(u_0,u_1)$, déterminer $\dim(E)$.

Exercice 28 Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. On fixe un entier $p\geqslant 1$.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} f:\mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1,\dots,u_{p-1}) \end{array}$ est linéaire.
2. Est-elle surjective ? injective ? Déterminer son noyau.

Exercice 29 Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $T:\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{S}$ l'« opérateur de décalage », qui envoie toute suite $u=(u_0,u_1,u_2,\dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n=u_{n+1}$, c'est-à-dire $T(u)=(u_1,u_2,u_3,\dots)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
2. T est-il surjectif ? injectif ? Déterminer son noyau.

Exercice 30 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$.

1. Soit p l'endomorphisme de E défini par
$$p\big((x,y,z)\big)=(x,x+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}z,x-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}z).$$
   Montrer que p est une projection vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.
2. Soit s l'endomorphisme de E défini par
$$s\big((x,y,z)\big)=\big(\tfrac{1}{3}(5x+2y-4z),y,\tfrac{1}{3}(4x+4y-5z)\big).$$
   Montrer que s est une symétrie vectorielle dont on précisera les sous-espaces vectoriels caractéristiques.

Exercice 31 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$.

1. Soit P le plan vectoriel de E d'équation $x-2y+3z=0$ et D la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Déterminer la représentation analytique de la projection vectorielle p de E sur P parallèlement à D. En déduire celle de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D.
2. Soit P le plan vectoriel de E d'équation $x+2y+3z=0$ et D la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. Déterminer la représentation analytique de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D. En déduire celle de la projection vectorielle s de E sur P parallèlement à D.