INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Applications linéaires

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto |x| + |y|$;
2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto 3x - 4yz + yz^2$;
3. $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (2x+y-z, x+2y-1)$;
4. $m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto \max(x,y,z)$;
5. t est la translation de $\mathbb{R}^3$ de vecteur $(1,2,3)$;
6. r est la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$;
7. l est la transformation de $\mathbb{R}^2$ qui passe l'échelle des abscisses en échelle logarithmique.

Exercice 2 On fixe $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f\big((x,y,z)\big) = ax + by + cz$ et $g\big((x,y,z)\big) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

Déterminer les différentielles de f et g au point (x_0,y_0,z_0).

Exercice 3 Pour chacune des applications linéaires suivantes,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longmapsto (3x+6y, x+2y) \\ f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \longmapsto (y+z, x+z, x+y) \\ f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \longmapsto (2x+3y, 5x-2z) \end{aligned}$$

1. déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (en donner des bases) ;
2. f est-elle injective, surjective ? Quel est son rang ?
3. si f est bijective, déterminer sa réciproque.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$ de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, l'endomorphisme f est défini par

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \qquad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \qquad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

1. Déterminer le rang de f et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Soit $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Déterminer les coordonnées de $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer une base du noyau de f.

Exercice 5

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$$f\big((1,0,0)\big) = (0,1) \qquad f\big((1,1,0)\big) = (2,0) \qquad f\big((1,1,1)\big) = (1,1)$$
2. Déterminer $f\big((x,y,z)\big)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 6 Soit f l'application linéaire définie par

$$f\big((x_1,x_2,x_3)\big) = (x_1 + x_3, -x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $G = \{(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Est-ce que $G = \mathrm{Im}(f)$? Justifier.

Exercice 7 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f\big((x,y)\big) = (x-y, ax+y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. On suppose $a \neq -1$. Déterminer les noyaux et images de f. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose que $a = -1$. Déterminer les noyaux et images de f. Que peut-on en déduire ? Calculer $f \circ f$ dans ce cas, puis exprimer le résultat en fonction de f.

Exercice 8

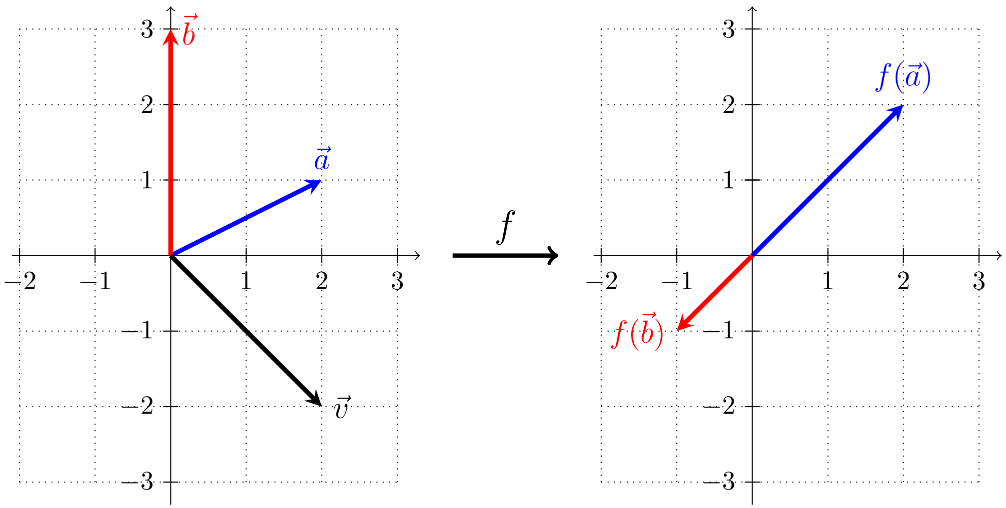
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$, et m un réel. On définit l'endomorphisme f de E par :

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = m\vec{u} + (m+2)\vec{v} \\ f(\vec{v}) = (m-2)\vec{u} + (m-1)\vec{v} \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il un isomorphisme ?
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ en fonction des valeurs de m.

Exercice 9 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui envoie le vecteur bleu $\vec{a}$ de gauche sur le vecteur bleu $f(\vec{a})$ de droite, et le vecteur rouge $\vec{b}$ de gauche sur le vecteur rouge $f(\vec{b})$ de droite.

1. Dessiner sur le graphique de droite l'image par f du vecteur noir $\vec{v}$, notée $f(\vec{v})$ (*on ne fera aucun calcul*).
2. Déterminer si f est bijective (on attend une justification en une phrase).
3. Déterminer à l'aide du graphique de droite l'image et le noyau de f.



Exercice 10 L'endomorphisme f_a a pour matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\mathrm{Im}(f_a)$ et $\mathrm{Ker}(f_a)$ en fonction de a.

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit $E_\lambda = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$.

1. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de E_0 ?
   Si $E_\lambda \neq \{\vec{0}_E\}$, on dit que λ est une *valeur propre* de l'endomorphisme f et que E_λ est le *sous-espace propre* associé à λ.
2. Montrer que si λ et μ sont deux réels distincts, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.
3. Exemple : on condidère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\big((x,y)\big) = (x+2y, -x+4y)$.
   (a) À l'aide de systèmes linéaires, déterminer l'ensemble E_λ pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ (on distinguera trois cas).
   (b) Montrer que $E_{-2} \oplus E_{-3} = \mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans une base adaptée à $E_{-2} \oplus E_{-3}$.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f((x,y)) = (x-2y, -2x+y)$.

1. Montrer que l'endomorphisme f vérifie une relation du type $f \circ f + \alpha f = \beta \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est un isomorphisme et exprimer f^{-1} à l'aide de f et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 13 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ (f \circ f)(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{rang}(f) \notin \{0, 3\}$.
3. En déduire le rang de f et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 14 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ f)$ et que $\mathrm{Im}(f \circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$, alors $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.
   Qu'en déduit-on dans ce cas pour $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

Exercice 15 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

1. Donner les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que pour tout vecteur $\vec{v} \in E$, on a $(f \circ f)(\vec{v}) = \vec{0}_E$.
3. Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et soit $(\vec{u}_3, \vec{u}_4) \in E^2$ des vecteurs tels que $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1$ et $f(\vec{u}_4) = \vec{v}_2$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est une base de E.
4. Donner la matrice de f par rapport à la base B.

Exercice 16 Déterminer l'expression analytique de la projection sur $\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$.

Exercice 17 On considère l'application $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y, -x + \frac{1}{2}y)$. Montrer que p est une projection. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$.

Exercice 18 Soit $\vec{u} = (1,-2)$, $G = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$.

1. Montrer que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\vec{v} = (x,y)$. Déterminer la projection $p(\vec{v})$ de $\vec{v}$ sur F parallèlement à G.
3. Mêmes questions dans $\mathbb{R}^3$ avec $\vec{u} = (0,1,0)$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$.

Exercice 19 Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$p\big((x,y,z)\big) = \left(x, x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)$$

Montrer que p est une projection vectorielle. Déterminer les éléments géométriques de p.

Exercice 20 L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$. Soit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression analytique des applications linéaires f, g, h associées aux matrices F, G, H dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les matrices et l'expression analytique de f, g, h dans la base $\mathcal{C} = (\vec{e}_2; \vec{e}_1)$.
3. Déterminer les matrices et l'expression analytique de f, g, h dans la base $\mathcal{D} = (\vec{e}_1; \vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.
4. (a) Soit k un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ qui commute avec f, g et h. Montrer que k est une homothétie.
   (b) Soit k une homothétie de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que k commute avec tout endomorphisme φ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ commute avec tout autre endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 21 On considère l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b,c,d) & \longmapsto & \int_0^1 (at^3 + bt^2 + ct + d)\,dt \end{array}$.

1. Montrer que u est une forme linéaire non nulle.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 22 Dans $\mathbb{R}_2[X]$ considéré comme un espace vectoriel réel de dimension 3, on définit l'application f :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad P \longmapsto \big(P(1), P(2), P(4)\big)$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est un isomorphisme.
3. Interpréter la proposition :

« Dans un repère orthonormé, par trois points d'abscisses distinctes, il passe toujours une parabole d'axe vertical ».