

Factorielle et binôme de Newton

Cours

Définition 1. — On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \quad (\text{« factorielle } n \text{ »})$$

et l'on pose $0! = 1$. On peut définir $n!$ par récurrence selon $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Rappel. — Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles (par exemple succès et échec). Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Supposons que l'on répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Notons p la probabilité de succès à chaque épreuve. On obtient ainsi un schéma de Bernoulli de paramètres n et p que l'on peut représenter par un arbre.

Définition 2. — Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, le nombre de chemins fournissant k succès sur les n répétitions est $\binom{n}{k}$ (« k parmi n »).

On peut démontrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

On peut aussi montrer que $\binom{n}{k}$ représente le nombre de sous-ensembles de k éléments d'un ensemble ayant n éléments, ou encore le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble ayant n éléments.

On peut établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (formule du binôme de Newton),

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\ &= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k y^{n-k}. \end{aligned}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont encore appelés « coefficients binomiaux ». Ils vérifient les propriétés suivantes :

- pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$;
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$;
- pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (formule du triangle de Pascal).

Pour calculer $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k et n , on peut utiliser le triangle de Pascal :

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------|---|---|----|----|----|----|----|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

Notation. — Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $u_p, u_{p+1}, \dots, u_{q-1}, u_q$ des nombres. On note

$$\prod_{i=p}^q u_i = u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_{q-1} \times u_q.$$

Par exemple, $n! = \prod_{i=1}^n i$, $e^{\sum_{i=1}^n u_i} = \prod_{i=1}^n e^{u_i}$ et si $u_1, \dots, u_n > 0$, $\ln\left(\prod_{i=1}^n u_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln u_i$.

Application 1 : linéarisation. — À l'aide du binôme de Newton et de la formule d'Euler, pour tout entier $n \geq 2$, on peut transformer $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ en sommes de termes de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple : par la formule d'Euler, $\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$. Donc, grâce au binôme,

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \frac{1}{-8i} [(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(-e^{-ix}) + 3(e^{ix})(-e^{-ix})^2 + (-e^{-ix})^3] \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{8i} [2i \sin(3x) - 3 \times 2i \sin(x)] \\ &= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x). \end{aligned}$$

Application 2 : antilinéarisation. — À l'aide du binôme de Newton et de la formule de De Moivre, pour tout entier $n \geq 2$, on peut transformer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en sommes de termes de la forme $\cos^k(x) \sin^l(x)$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Exemple : on a $\cos(3x) = \Re e(e^{i(3x)})$ et $\sin(3x) = \Im m(e^{i(3x)})$. Or, par la formule de De Moivre et le binôme de Newton,

$$\begin{aligned} e^{3ix} &= (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3 \cos^2 x (i \sin x) + 3 \cos x (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

D'où, en prenant partie réelle et partie imaginaire,

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \end{aligned}$$

Factorielle et binôme de Newton

Exercices

Exercice 1 (Factorielle)

- Donner la valeur de $n!$ pour $n \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$.
- Calculer $\frac{50!}{46!}$.
- Simplifier $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$.
- Montrer que $\frac{(2n)!}{n!}$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le calculer pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$ et $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
- Montrer que pour $n \geq 10$, $n! \geq 9! \times 10^{n-9}$. En déduire la limite de $\frac{n!}{9^n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Montrer, à l'aide de $k! \geq 2^{k-1}$ valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 2$.
- Trouver le nombre de façons d'ordonner n objets distincts, c'est-à-dire trouver le nombre de permutations de n éléments.
- Trouver le nombre de façons de choisir des suites ordonnées de k objets distincts choisis parmi n objets distincts.

Exercice 2 (Formule du binôme de Newton)

- Calculer $\binom{5}{2}$, $\binom{50}{2}$, $\binom{50}{49}$.
- Développer $(a+b)^6$, $(2x-1)^5$.
- Soit P la fonction définie sur \mathbb{R} par $P(x) = x^4 + 2x^3 - 1$. Calculer $P(x+1)$.
- Déterminer les coefficients de $a^4b^2c^3$ et $a^4b^3c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.
- Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $1.01^{10} \approx 1.105$. Trouver de même une valeur approchée de 0.99^8 à 10^{-3} près.
- Linéariser $\cos^6 x$. En déduire une primitive de $x \mapsto \cos^6 x$.
- Écrire $\cos(5x)$ sous la forme $P(\cos x)$ où P est une fonction polynomiale à déterminer.
- En considérant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$ ($n \in \mathbb{N}$), calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, S_3 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, S_4 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Pour les insatiables...

Exercice 3 (Factorielle)

On suppose que $u_0 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -n u_{n-1}$. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 4 (Formule du binôme de Newton et sommes)

- Soit k et n deux entiers tel que $1 \leq k \leq n$. À l'aide de l'inégalité $k! \geq 2^{k-1}$, montrer que $\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
 - Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
 - montrer que $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$.
 - Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq 3$.
- Question annexe. — Calculer la limite de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 5 (Formule du binôme de Newton et sommes)

- À l'aide de l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
- En écrivant $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n}{k-1} + \binom{2n}{k}$ pour tout entier positif $k \leq 2n$, obtenir la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Combien vaut S_4 ?
- En écrivant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ pour tout entier $k \geq p+1$, obtenir la valeur de la somme $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$.

Application. — Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1}$ (pour $n \geq 1$) et $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2}$ (pour $n \geq 2$).
- En déduire les valeurs des sommes $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1)$, puis $\sum_{k=0}^n k^2$.

Exercice 6 (Quelques probabilités)

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, \dots, x_n . On rappelle que la loi de probabilité de X est la donnée des nombres $p_k = \mathbb{P}\{X = x_k\}$, $1 \leq k \leq n$ et que son espérance et sa variance sont respectivement données par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n p_k x_k, \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{k=1}^n p_k [x_k - \mathbb{E}(X)]^2.$$

Une autre expression de la variance est

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n p_k x_k^2.$$

1. Loi uniforme discrète

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ de loi de probabilité définie par

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{n}.$$

Toutes les valeurs de 1 à n sont équiprobables. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2. Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ de loi de probabilité définie par

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

C'est la probabilité du nombre de succès obtenus au cours d'une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.