INSA $1^{\text{er}}$ cycle

# Algèbre linéaire

## *Diagonalisation*

**Exercice 1** Les matrices ci-dessous sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ? Dans l'affirmative, donner une base de vecteurs propres.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2** Soient $a$ et $b$ des nombres réels non nuls. Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\det(A) = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ (voir la fiche sur les déterminants).

**Exercice 3 (Une matrice de permutation)** Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On pourra introduire la notation $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

**Exercice 4** Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}.$$

Applications.

1. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{14}{5} u_n - \frac{2}{5} v_n \\ v_{n+1} = -\frac{2}{5} u_n + \frac{11}{5} v_n \end{cases}$$
en fonction de leurs premiers termes $u_0$ et $v_0$.
2. Déterminer les fonctions $x$ et $y$ telles que
$$\begin{cases} x'(t) = \frac{14}{5} x(t) - \frac{2}{5} y(t) \\ y'(t) = -\frac{2}{5} x(t) + \frac{11}{5} y(t) \end{cases}$$
en fonction de $x(0)$ et $y(0)$. Tracer les courbes intégrales dans un repère orthonormé.
3. Déterminer la nature de la conique d'equation $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 5$, puis la représenter dans un repère orthonormé.

Reprendre l'exercice avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5** On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?
2. Déterminer une base dans laquelle $f$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3. Applications.
   (a) Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + 3v_n \end{cases}$$
   en fonction de leurs premiers termes $u_0$, $v_0$ et $w_0$.
   (b) Déterminer la solution générale du système différentiel
   $$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$