INSA 1er cycle

Analyse

Équations différentielles

Exercice 1 Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

a) $y'(x)+2\,y(x)=x^2-x+3$ b) $x\,y'(x)-2\,y(x)=\ln|x|$

c) $y'(x)+\dfrac{6}{x+2}\,y(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ d) $x\,y'(x)+(x+1)\,y(x)=e^x$

e) $(x^2-4)\,y'(x)+x\,y(x)=1$ f) $(x-1)\,y'(x)=y(x)+(x-2)\,e^x$

g) $\sqrt{x^2+1}\,y'(x)-y(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

Exercice 2 Déterminer pour chacune des équations différentielles suivantes la solution générale sur $]0,+\infty[$ et celle sur $]-\infty,0[$. Admettent-elles des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

a) $x\,y'(x)-2\,y(x)=x^2$ b) $x^2\,y'(x)-x\,y(x)=1$

Exercice 3 Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

a) $y''(x)+y'(x)-6\,y(x)=2\,e^{3x}$

b) $y''(x)-4\,y'(x)+3\,y(x)=6x+1+4e^x+7e^{-x}$

c) $y''(x)-2\,y'(x)+y(x)=e^{3x}\cos x$

d) $y''(x)+y(x)=\operatorname{ch}x$

e) $y''(x)+3\,y'(x)+2\,y(x)=\dfrac{x-1}{x^2}\,e^{-x}$

f) $x^2\,y''(x)+x\,y'(x)+y(x)=0$

g) $x^2\,y''(x)+x\,y'(x)-4\,y(x)=4x^2$

Exercice 4 Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes :

a) $y'''(x)-3\,y''(x)+3\,y'(x)-y(x)=6(4x+1)e^x+e^{2x}$

b) $y''''(x)-y(x)=e^{-x}$

Exercice 5 Soient $\omega\in\mathbb{R}^*$ et $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle
$$y''(x)-\omega^2y(x)=-f(x).$$
2. Montrer que la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant les conditions aux limites $y(0)=y(1)=0$ est donnée par
$$y(x)=\int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt$$
où $G:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ est la fonction continue symétrique définie par (*fonction de Green*)
$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}(\omega(1-x))\operatorname{sh}(\omega t)}{\omega\operatorname{sh}\omega} & \text{si } 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh}(\omega x)\operatorname{sh}(\omega(1-t))}{\omega\operatorname{sh}\omega} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$
Indication : on écrira $\displaystyle\int_0^1=\int_0^x+\int_x^1$.

Exercice 6 Déterminer la solution générale des équations différentielles non linéaires suivantes :

a) $y'(x)-\dfrac{5}{4x}\,y(x)=10\,x^2y(x)^5$

b) $\sqrt{x}\,y'(x)-y(x)+(x+2\sqrt{x})\sqrt{y(x)}=0$

c) $2\,x^2y'(x)=(x-1)(y(x)^2-x^2)+2\,x\,y(x)$

d) $(1-\sin x\cos x)y'(x)+y(x)^2\cos x-y(x)+\sin x=0$

Exercice 7 Déterminer la solution générale des équations différentielles non linéaires suivantes :

a) $y'(x)=e^{y(x)+x}$ b) $y'(x)=\dfrac{y(x)^2+1}{x^2+1}$ c) $\dfrac{e^{y(x)}-1}{e^{y(x)}-2}\,y'(x)=\dfrac{1}{x}$