INSA 1er cycle

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels euclidiens, algèbre bilinéaire

Exercice 1 Caractériser géométriquement les isométries du $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ dont les matrices relativement à une base orthonormée directe sont données par

$$\text{a) } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soient les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. En interprétant A comme la matrice d'une rotation, trouver une matrice de rotation $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
2. En déduire une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = B$. On pourra diagonaliser la matrice B.

Exercice 3

1. Déterminer la nature de la conique d'équation $P(x, y) = 0$, puis la représenter dans un repère orthonormé dans chacun des cas suivants :
   (a) $P(x, y) = 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5$;
   (b) $P(x, y) = xy + 3x - 5y - 4$;
   (c) $P(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7$.
2. Calculer pour chacun des cas ci-dessus $\overrightarrow{\text{grad}}\, P(x, y)$, puis résoudre l'équation $\overrightarrow{\text{grad}}\, P(x, y) = \vec{0}$.

Exercice 4 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et l'on considère le sous-ensemble

$$F = \{f \in E : \int_0^1 f(x)^2 \frac{dx}{x} \text{ est convergente}\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. On pourra utiliser l'inégalité $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$.
2. On pose pour $(f, g) \in F \times F$, $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) \frac{dx}{x}$. Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur F.
3. Soit $(P_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de polynômes définie par $P_n(x) = x^n$.
   (a) Trouver les trois premiers polynômes Q_1, Q_2, Q_3 de la suite de polynômes orthogonaux $(Q_n)_{n \geqslant 1}$ construite à partir de la suite de polynômes $(P_n)_{n \geqslant 1}$ par le procédé de Gram-Schmidt :
   $$Q_1 = P_1, \quad Q_2 = P_2 - \lambda Q_1, \quad Q_3 = P_3 - \mu Q_1 - \nu Q_2.$$
   (b) En déduire les trois premiers polynômes $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$ de la suite orthonormée $(\tilde{Q}_n)_{n \geqslant 1}$ générée par la suite de polynômes $(P_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 5 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et on considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la forme quadratique

$$q_a(x, y) = (\operatorname{ch} a)\, x^2 + 2\, (\operatorname{sh} a)\, xy + (\operatorname{ch} a)\, y^2.$$

Soit φ_a la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q_a et A_a sa matrice dans la base canonique de E.

1. Écrire la matrice A_a ainsi que la forme bilinéaire φ_a.
2. Montrer que φ_a définit un produit scalaire sur E.
3. (a) Montrer que l'ensemble des matrices A_a, $a \in \mathbb{R}$, est un sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre 2 inversibles. Déterminer A_a^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Résoudre le système différentiel
   $$\begin{cases} x'(t) &= (\operatorname{ch} a)\, x(t) + (\operatorname{sh} a)\, y(t) \\ y'(t) &= (\operatorname{sh} a)\, x(t) + (\operatorname{ch} a)\, y(t) \end{cases}$$
   avec les conditions initiales $x(0) = 2$ et $y(0) = 0$.
4. (a) Donner la forme réduite de la forme quadratique q_a dans une base orthonormée.
   (b) Déterminer la nature de la conique $(\mathcal{C}_a)$ d'équation $q_a(x, y) = 1$, puis représenter les courbes $(\mathcal{C}_a)$ pour $a \in \{-\ln 8, \ln 2, 0, \ln 2, \ln 8\}$ dans un même repère orthonormé du plan.