INSA 1er cycle

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Exercice 1 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, les systèmes de vecteurs suivants sont-ils libres ? générateurs de E ? des bases de E ?

a) $\{(1,-1,3),(0,1,-1),(0,3,-2)\}$; *b)* $\{(1,3,-5),(1,-2,3),(1,8,-13)\}$;
c) $\{(1,a,b),(1,1,0),(0,a-1,c)\}$.

Exercice 2 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, on considère le système de vecteurs $\mathcal{B}' = \{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{j}+\vec{k}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer l'ensemble F des vecteurs de E qui ont mêmes coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$F_1 = \{(-2\lambda, 3\lambda, 4\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 = \{(x,y,z) \in E : x + 6y - z = 0\},$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in E : (x+2y=0) \text{ et } (3x+2y+z=0)\}.$$

1. Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont des sous-espaces vectoriels de E dont on déterminera pour chacun une base.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_i \cap F_j$ et $F_i + F_j$ pour $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3\}$.

Exercice 4 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(\lambda+\mu, -\lambda, \lambda+2\mu, \mu+\nu), \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}\}, \\ F_2 &= \{(x,y,z,t) \in E : (3x+4y+z+2t=0) \\ &\quad \text{et } (6x+8y+2z+5t=0) \text{ et } (9x+12y+3z+10t=0)\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E dont on déterminera pour chacun une base ainsi que sa dimension.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$. Les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Déterminer un sous-espace vectoriel G_1 de F_1 tel que G_1 et F_2 soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Déterminer de même un sous-espace vectoriel G_2 de F_2 tel que F_1 et G_2 soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 5 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, on considère les vecteurs

$$\vec{u}_1 = -\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, \quad \vec{u}_2 = \vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}, \quad \vec{u}_3 = 3\vec{i}-\vec{j}+a\vec{k}, \quad \vec{u}_4 = 2\vec{i}+3\vec{j}+b\vec{k}.$$

Déterminer les réels a et b de telle sorte que les systèmes de vecteurs $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ et $\{\vec{u}_3,\vec{u}_4\}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6 Déterminer le rang des systèmes de vecteurs suivants :

a) $\{(2,-1,3),(-1,0,1),(7,5,4),(-2,6,8)\}$;
b) $\{(1,1,\alpha),(1,\alpha,1),(\alpha,1,1)\}$;
c) $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$;
d) $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,7),(3,2,0,1),(0,0,1,1)\}$.

Exercice 7 Soient a et b deux réels distincts. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $F_\lambda = \{P \in E : P(\lambda) = 0\}$.

1. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera une base ainsi que la dimension.
2. Déterminer une base ainsi que la dimension du sous-espace vectoriel $F_a \cap F_b$.
3. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $F_a + F_b$. A-t-on $E = F_a + F_b$? La somme est-elle directe ?
4. Donner tous les sous-espaces vectoriels supplémentaires de F_a dans E.

Exercice 8 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et on considère le sous-ensemble F des fonctions $f_{a,\varphi} \in E$ définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f_{a,\varphi}(x) = a\cos(x+\varphi)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ; on pourra écrire $f_{a,\varphi}$ sous une autre forme.
2. Déterminer une base de F et calculer sa dimension.

Exercice 9 Soient $a,b \in \mathbb{C}$ et E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes de classe C^∞.

1. Déterminer l'ensemble F des solutions dans E de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Déterminer une base de F, puis en déduire sa dimension.

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{C}^2$.

1. Définir sur E la structure d'espace vectoriel "canonique" sur le corps $\mathbb{C}$.
2. Déterminer une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
3. Le sous-ensemble $\{(z_1,z_2) \in E : z_1 + z_2 \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Dans l'affirmative, en déterminer une base.
4. Le système de vecteurs $\{(1,0),(1,i),(1,2)\}$ est-il libre ? générateur de E ?
5. Reprendre les questions précédentes en prenant $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$ pour corps de scalaires.