INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Espaces vectoriels

Exercice 1 Dans les cas suivants, déterminer si l'ensemble E muni de la loi interne $\oplus$ et de la loi externe $*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

1. $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, *)$ avec $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \forall v \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u \oplus v = uv \\ \alpha * u = u^\alpha \end{cases}$
2. $E = (\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ avec
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \\ \alpha * (x, y) = (\alpha x, 0) \end{cases}$$

Exercice 2 Les sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, .)$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 1\}$;
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

Exercice 3 Les sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{F}, +, .)$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$?

$F_1 = \{f \in \mathcal{F} :\ f(1) + f(-1) = 0\}$; $F_2 = \{f \in \mathcal{F} :\ f(1) + f(-1) = 1\}$;
$F_3 = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\}$; $F_4 = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x - 1) = f(x) - f(1)\}$.

Exercice 4 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$F_1 = \{(2\lambda, 3\lambda, 5\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 = \{(x, y, z) \in E : x + 6y - z = 0\},$$
$$F_3 = \{(x, y, z) \in E : (x + 2y = 0) \text{ et } (3x + 2y + z = 0)\}.$$

1. Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_i \cap F_j$ et $F_i + F_j$ pour $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 5 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ($\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$), on considère les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{u}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{u}_3 = 3\vec{i} - \vec{j} + a\vec{k}, \quad \vec{u}_4 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + b\vec{k}.$$

Déterminer les réels a et b de telle sorte que les systèmes de vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ et $\{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E. On pourra introduire les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ et $G = \mathrm{vect}\{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$.

Exercice 6 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, les systèmes de vecteurs suivants sont-ils libres ? générateurs de E ? des bases de E ?

a) $\{(1, -1, 3, 4), (0, 1, -1, 2), (0, 3, -2, 1)\}$;
b) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 1, -1, 1), (1, -1, 1, 1), (-1, 1, 1, 1)\}$;
c) $\{(1, 1, 1, a), (3, 4, 2, b), (2, 4, 1, c), (5, 6, 5, d)\}$, a, b, c, d étant des paramètres réels.

Exercice 7 Déterminer le rang des systèmes de vecteurs suivants :

a) $\{(2, -1, 3), (-1, 0, 1), (7, 5, 4), (-2, 6, 8)\}$;
b) $\{(1, 1, \alpha), (1, \alpha, 1), (\alpha, 1, 1)\}$ (faire une discussion suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$) ;
c) $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$;
d) $\{(1, 0, 2, 3), (7, 4, -2, 1), (5, 2, 4, 7), (3, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$.

Exercice 8

1. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. En déduire que $(\arccos, \arcsin, \mathbf{1})$ est une famille liée de $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 9 Pour tout $a > 0$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f_a(x) = \ln(ax)$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille liée de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$.

Exercice 10 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(\lambda + \mu, -\lambda, \lambda + 2\mu, \mu + \nu), \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}, \\ F_2 &= \{(x, y, z, t) \in E : (3x + 4y + z + 2t = 0) \\ &\quad \text{et } (6x + 8y + 2z + 5t = 0) \text{ et } (9x + 12y + 3z + 10t = 0)\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E dont on déterminera pour chacun une base ainsi que sa dimension.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$. Les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Déterminer un sous-espace vectoriel G_1 de F_1 tel que G_1 et F_2 soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Déterminer de même un sous-espace vectoriel G_2 de F_2 tel que F_1 et G_2 soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{C}^2$.

1. Définir sur E la structure d'espace vectoriel « canonique » sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
3. Le sous-ensemble $\{(z_1, z_2) \in E : z_1 + z_2 \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Dans l'affirmative, en déterminer une base.
4. Le système de vecteurs $\{(1, 0), (1, i), (1, 2)\}$ est-il libre ? générateur de E ?
5. Reprendre les questions précédentes en prenant $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$ pour corps de scalaires.

Exercice 12 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'on considère le sous-ensemble F des fonctions $f_{a,\varphi} \in E$ où a et φ sont des paramètres réels définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f_{a,\varphi}(x) = a\cos(x + \varphi)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ; on pourra écrire $f_{a,\varphi}$ sous une autre forme.
2. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.

Pour les insatiables...

Exercice 13 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

1. l'ensemble des fonctions 1-périodiques ;
2. l'ensemble des fonctions croissantes ;
3. l'ensemble des fonctions monotones ;
4. l'ensemble des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante (appelées *fonctions à variation bornée*) ;
5. l'ensemble des fonctions majorées ;
6. l'ensemble des fonctions bornées.

Exercice 14 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, on considère le système de vecteurs $\mathcal{B}' = \{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{j} + 2\vec{k}, 2\vec{j} + \vec{k}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer l'ensemble F des vecteurs de E qui ont mêmes coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 15 Soit $E = \mathbb{R}^5[X]$ et soit $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit $\mathcal{C} = \big((X-2)^k\big)_{0 \leqslant k \leqslant 5}$.

1. Rappeler la formule de Taylor pour les fonctions polynômes de degré n.
2. Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E.
3. Soit $P = X^5 + X^4 - X^3 - 2X^2 + 5$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 16

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-ensemble $F = \left\{ f \in \mathcal{C} : \forall x \in \mathbb{R},\ 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$? Déterminer explicitement les éléments de F.
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-ensemble $G = \{f \in \mathcal{D} : \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3f(x) - 2f(0)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$? Déterminer explicitement les éléments de G.

Exercice 17 On note $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}^2$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ des fonctions deux fois dérivables.
On considère $E = \{f \in \mathcal{D}^2 : f'' + f = 0\}$ et $F = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie. Donner une base de E et préciser la dimension de E.
2. Montrer que F est un espace vectoriel.
3. Justifier que $E \cap F$ est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer sa dimension.

Exercice 18 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si λ et μ sont deux réels, alors les familles suivantes sont libres :
   - $\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}, x \mapsto \mathrm{e}^{\mu x}\}$ (avec $\lambda \neq \mu$) ;
   - $\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}, x \mapsto x\mathrm{e}^{\lambda x}\}$;
   - $\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\cos(\mu x), x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\sin(\mu x)\}$ (avec $\mu \neq 0$).
2. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle dans E $y'' + ay' + by = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Déterminer une base de F ainsi que sa dimension dans les cas $[a = -3, b = 2]$, $[a = 2, b = 1]$ et $[a = 4, b = 5]$.

Exercice 19 Soit a et b deux réels distincts et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n et l'on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $F_\lambda = \{P \in E : P(\lambda) = 0\}$.

1. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base de F_a puis donner sa dimension (on pourra utiliser la formule de Taylor).
2. Trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_a dans E. On pourra utiliser une division euclidienne par $(X - a)$.
3. Décrire le sous-espace vectoriel $F_a \cap F_b$. Déterminer une base de $F_a \cap F_b$ puis donner sa dimension (on pourra utiliser la formule de Taylor).
4. Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $F_a + F_b$. En déduire $F_a + F_b$. Cette somme est-elle directe ?
5. À l'aide d'une division euclidienne par $(X - a)(X - b)$ et de l'écriture d'un polynôme de degré au plus 1 comme combinaison linéaire de $(X - a)$ et $(X - b)$, obtenir une décomposition d'un polynôme quelconque de E en la somme d'un polynôme de F_a et d'un polynôme de F_b.

Exercice 20 Soit E l'ensemble de suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer deux suites géométriques dans E qui forment une famille libre.
3. (a) Pour tout couple de réels (a, b), montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E vérifiant $u_0 = a$ et $u_1 = b$.
   (b) On introduit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E vérifiant $v_0 = 1, v_1 = 0$ et $w_0 = 0, w_1 = 1$. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E, on a $u_n = u_0 v_n + u_1 w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner alors une base de E ainsi que sa dimension.
4. En déduire qu'à chaque suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E, on peut associer un unique couple de réels (λ, μ) tel que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.