INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Espaces vectoriels

Exercice 1 Dans les cas suivants, déterminer si l'ensemble E muni de la loi interne $\oplus$ et de la loi externe $*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

1. $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, *)$ avec $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \forall v \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} u \oplus v = uv \\ \alpha * u = u^\alpha \end{cases}$
2. $E = (\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ avec
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y') \\ \alpha * (x,y) = (\alpha x, 0) \end{cases}$$

Exercice 2 Déterminer si les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

1. $E = \mathbb{R}^2$:
   $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\}$ $\quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 1\}$
   $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$:
   $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0 \text{ et } z = -3x\}$
   $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$
3. $E = \mathbb{R}_4[X]$:
   A : ensemble des polynômes de degré 2 $\quad B = \{P \in E : P(0) = 2\}$
   $C = \{P \in E : P' - 2P = 0\}$ $\quad D = \{P \in E : P(0) = P'(1)\}$
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites réelles) :
   A : ensemble des suites croissantes $\quad B$: ensemble des suites monotones
   C : ensemble des suites bornées $\quad D$: ensemble des suites de limite ℓ (fixée)
   $\tilde{E}$: ensemble des suites arithmétiques $\quad F$: ensemble des suites géométriques
5. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :
   A : ensemble des fonctions 2π-périodiques $\quad B = \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant 3\}$
   $C = \{f \in E : f(1) + f(-1) = 1\}$ $\quad D = \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\}$
   $\tilde{E} = \{f \in E : f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + xf(x) = 0\}$
   $F = \left\{f \in E : f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_2^5 f(x)\,dx = 0\right\}$

Exercice 3 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles suivants :
$$F_1 = \{(2\lambda, 3\lambda, 5\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 = \{(x,y,z) \in E : x + 6y - z = 0\},$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in E : (x + 2y = 0) \text{ et } (3x + 2y + z = 0)\}.$$

1. Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_i \cap F_j$ pour $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3\}$.

Exercice 4 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ($\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$), on considère les vecteurs
$$\vec{u}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{u}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{u}_3 = 3\vec{i} - \vec{j} + a\vec{k}, \quad \vec{u}_4 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + b\vec{k}.$$
Déterminer les réels a et b de telle sorte que les familles de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E. On pourra introduire les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \mathrm{vect}(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

Exercice 5 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? génératrices de E ? des bases de E ?

a) $\mathcal{E} = \big((1,-1,3,4), (0,1,-1,2), (0,3,-2,1)\big)$;
b) $\mathcal{F} = \big((1,1,1,1), (1,1,1,-1), (1,1,-1,1), (1,-1,1,1), (-1,1,1,1)\big)$;
c) $\mathcal{G} = \big((1,1,1,a), (3,4,2,b), (2,4,1,c), (5,6,5,d)\big)$, a,b,c,d étant des paramètres réels.

Exercice 6 Dans l'espace vectoriel donné, les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E} = \big((-4,2), (2,1)\big)$.
b) Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F} = \big((-1,1,2), (2,0,1), (6,2,0)\big)$.
c) Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^3$: $\mathcal{G} = \big((1, 1+i, 0), (2i, 0, -i), (3-4i, 3+3i, 2i)\big)$.
d) Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{H} = \big(1, X(\alpha X - 1), X^2(X+1), X(X-1)^2\big)$ (faire une discussion suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 7 Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

a) $\mathcal{E} = \big((2,-1,3), (-1,0,1), (7,5,4), (-2,6,8)\big)$;
b) $\mathcal{F} = \big((1,1,\alpha), (1,\alpha,1), (\alpha,1,1)\big)$ (faire une discussion suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$) ;
c) $\mathcal{G} = \big((1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1)\big)$;
d) $\mathcal{H} = \big((1,0,2,3), (7,4,-2,1), (5,2,4,7), (3,2,0,1), (0,0,1,1)\big)$.

Exercice 8 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :
$$\begin{aligned} F_1 &= \{(\lambda + \mu, -\lambda, \lambda + 2\mu, \mu + \nu), \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}, \\ F_2 &= \{(x,y,z,t) \in E : (3x + 4y + z + 2t = 0) \\ &\quad \text{et } (6x + 8y + 2z + 5t = 0) \text{ et } (9x + 12y + 3z + 10t = 0)\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E dont on déterminera pour chacun une base $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ainsi que sa dimension.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F_1 \cap F_2$.
3. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ de F_2 tel que $\mathcal{B}_1 \cup (\vec{w})$ soit une base de E.
   Déterminer deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de F_1 tels que $\mathcal{B}_2 \cup (\vec{u}, \vec{v})$ soit une base de E.

Exercice 9 Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et soit $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit $\mathcal{C} = \big((X-2)^k\big)_{0 \leqslant k \leqslant 4}$.

1. Rappeler la formule de Taylor pour les fonctions polynômes de degré n.
2. Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E.
3. Soit $P = X^4 - X^3 - 2X^2 + 5$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 10 Dans $\mathbb{R}[X]$, soit $\mathcal{F} = (P, Q)$ avec $P = 3X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 - 4$.
Soit $\mathcal{G} = (R, S, T)$ avec $R = 5X^3 - 2X - 7$, $S = X^3 - 2X + 9$, et $T = 2X - 13$.

1. Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont-elles libres ? Quels sont leurs rangs respectifs ?
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.

Exercice 11 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'on considère le sous-ensemble F des fonctions $f_{a,\varphi} \in E$ où a et φ sont des paramètres réels définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f_{a,\varphi}(x) = a\cos(x-\varphi)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ; on pourra écrire $f_{a,\varphi}$ sous une autre forme.
2. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.

Exercice 12 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et les deux vecteurs de E : $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. On pose $H = \mathrm{Vect}(f,g)$.

1. Soit $\mathcal{B} = \big(f,g\big)$. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de H et en déduire $\dim(H)$.
2. Montrer que les fonctions ch et sh sont éléments de H et donner leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. La famille $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ est-elle une base de H ?

Pour les insatiables...

Exercice 13 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \big(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\big)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = \big(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}+2\vec{k}, 2\vec{j}+\vec{k}\big)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer l'ensemble F des vecteurs de E qui ont mêmes coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 14 Soit $E = \mathbb{C}^2$.

1. Définir sur E la structure d'espace vectoriel « canonique » sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
3. Le sous-ensemble $\{(z_1,z_2) \in E : z_1+z_2 \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Dans l'affirmative, en déterminer une base.
4. La famille de vecteurs $\big((1,0),(1,i),(1,2)\big)$ est-elle libre ? génératrice de E ?
5. Reprendre les questions précédentes en prenant $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$ pour corps de scalaires.

Exercice 15 L'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ auquel on adjoint la somme de matrices et la multiplication externe naturelle a une structure d'espace vectoriel isomorphe à celle de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer une base et la dimension de l'ensemble des matrices :

1. triangulaires supérieures ;
2. diagonales $(b = c = 0)$;
3. des homothéties de $\mathbb{R}^2$;
4. à *trace* nulle $(a+d = 0)$.

Reprendre l'exercice avec l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles $n\times n$ pour un entier $n \geqslant 2$. La structure naturelle d'espace vectoriel est dans ce cas isomorphe à celle de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 16 Pour tout $a > 0$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f_a(x) = \ln(ax)$. Montrer que (f_1,f_2,f_3) est une famille liée de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{R})$.

Exercice 17 Pour tout $x \in [-1,1]$, on note $\arccos(x)$ (resp. $\arcsin(x)$) l'unique angle appartenant à $[0,\pi]$ (resp. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$) dont le cosinus (resp. sinus) vaut x. On définit ainsi deux applications arccos et arcsin de $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x)+\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. En déduire que $(\arccos,\arcsin,\mathbf{1})$ est une famille liée de $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice 18 On note $(\mathcal{F},+,\cdot)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}^2$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ des fonctions deux fois dérivables.
On considère $E = \{f \in \mathcal{D}^2 : f''+f = 0\}$ et $F = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie. Donner une base de E et préciser la dimension de E.
2. Montrer que F est un espace vectoriel.
3. Justifier que $E\cap F$ est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer sa dimension.

Exercice 19 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F,G deux sous-espaces vectoriels de E. On pose $F+G = \{\vec{u}+\vec{v}, (\vec{u},\vec{v}) \in F\times G\}$.

1. Dans cette question seulement : soit $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big)$, $G_1=\mathrm{Vect}\big((0,1,0)\big)$ et $G_2=\mathrm{Vect}\big((0,1,0);(0,0,1)\big)$.
   Quels sont les vecteurs de $F+G_1$ et de $F+G_2$? Décrire géométriquement $F+G_1$.
2. Montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $F\cup G$.
3. Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F\cup G$. On montrera que si H est un sous-espace vectoriel de E contenant $F\cup G$, alors H contient nécessairement $F+G$.
   On dit que $F+G$ est le sous-espace vectoriel de E *engendré* par $F\cup G$, c'est-à-dire $F+G=\mathrm{vect}(F\cup G)$, et que c'est la *somme* des deux sous-espaces vectoriels F et G.
4. Soit $\mathcal{F} = \big(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p}\big)$ une base de F et $\mathcal{G} = \big(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q\big)$ une base de G. On pose $\mathcal{H} = \big(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p},\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q\big)$.
   (a) Justifier le fait que $\mathcal{H}$ est une famille génératrice de $F+G$.
   (b) Montrer que $\mathcal{H}$ est une famille libre si et seulement si $F\cap G = \big\{\vec{0}_E\big\}$.
   - Lorsque $F\cap G = \big\{\vec{0}_E\big\}$, on dit que F et G sont en *somme directe* et on note leur somme $F\oplus G$. Dans ce cas, la famille $\mathcal{H}$ est une base de $F\oplus G$. De plus, on a $\dim(F\oplus G) = \dim(F)+\dim(G)$.
   - Lorsque $F\oplus G = E$, on dit que F et G sont *supplémentaires* dans E.

   (c) Montrer que dans l'exemple de la question 1, F et G_1 sont en somme directe, et F et G_2 sont supplémentaires dans E.

Exercice 20 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On pose $F+G = \{\vec{u}+\vec{v}, (\vec{u},\vec{v}) \in F \times G\} = \text{vect}(F \cup G)$ (voir exercice 19).
On admet la formule suivante (*formule de Grassmann*) : lorsque F et G sont de dimensions finies,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
   Répondre par VRAI ou FAUX, justifier, commenter.
   (a) On peut en déduire que $F = G$
   (b) On a $2 \leqslant \dim(F+G) \leqslant 4$
   (c) On a $1 \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant 2$
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, $\dim(F) = 3$ et $\dim(G) = 2$.
   Compléter :
   (a) $\cdots \leqslant \dim(F+G) \leqslant \cdots$ et $\cdots \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \cdots$
   (b) Si $\dim(F \cap G) = 2$ alors $F + G = \cdots$ et $F \cap G = \cdots$
3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.
   Compléter :
   (a) $\cdots \leqslant \dim(F+G) \leqslant \cdots$ et $\cdots \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \cdots$
   (b) Si F et G sont distincts, alors $F + G = \cdots$ et $F \cap G = \cdots$

Exercice 21 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si λ et μ sont deux réels, alors les familles suivantes sont libres :
   — $\{x \mapsto e^{\lambda x}, x \mapsto e^{\mu x}\}$ (avec $\lambda \neq \mu$) ;
   — $\{x \mapsto e^{\lambda x}, x \mapsto x e^{\lambda x}\}$;
   — $\{x \mapsto e^{\lambda x}\cos(\mu x), x \mapsto e^{\lambda x}\sin(\mu x)\}$ (avec $\mu \neq 0$).
2. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle dans E $y'' + ay' + by = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Déterminer une base de F ainsi que sa dimension dans les cas $[a = -3, b = 2]$, $[a = 2, b = 1]$ et $[a = 4, b = 5]$.

Exercice 22 Soit a et b deux réels distincts et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n et l'on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $F_\lambda = \{P \in E : P(\lambda) = 0\}$.

1. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base $\mathcal{B}_a$ de F_a puis donner sa dimension (on pourra utiliser la formule de Taylor).
2. Déterminer un polynôme P_0 de E tel que $(P_0) \cup \mathcal{B}_a$ soit une base de E. On pourra utiliser une division euclidienne par $(X - a)$.
3. Décrire le sous-espace vectoriel $F_a \cap F_b$. Déterminer une base de $F_a \cap F_b$ puis donner sa dimension (on pourra utiliser la formule de Taylor).
4. À l'aide d'une division euclidienne par $(X-a)(X-b)$ et de l'écriture d'un polynôme de degré au plus 1 comme combinaison linéaire de $(X - a)$ et $(X - b)$, obtenir une décomposition d'un polynôme quelconque de E en la somme d'un polynôme de F_a et d'un polynôme de F_b.

Exercice 23 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des suites réelles.
Soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Écrire la forme générale des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F en fonction des premiers termes u_0 et u_1.
3. En déduire une base de F.

Exercice 24 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des suites réelles.
Soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer deux suites géométriques dans F qui forment une famille libre.
3. (a) Pour tout couple de réels (a, b), montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant $u_0 = a$ et $u_1 = b$.
   (b) On introduit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant $v_0 = 1, v_1 = 0$ et $w_0 = 0$, $w_1 = 1$. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F, on a $u_n = u_0 v_n + u_1 w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner alors une base de F ainsi que sa dimension.
4. En déduire qu'à chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F, on peut associer un unique couple de réels (λ, μ) tel que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.

Exercice 25

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *récurrente linéaire* lorsque ses termes vérifient une relation de type $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n$ pour un $a \in \mathbb{R}$.
   Dans $\mathbb{R}^4$, on dit que (x_0, x_1, x_2, x_3) est une condition initiale valide pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque x_0, x_1, x_2, x_3 sont les quatre premiers termes d'une suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n$.
   Montrer que l'ensemble C_a des conditions initiales valides de la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En déterminer une base.
2. Faire de même, avec l'ensemble $C_{a,b}$ des conditions initiales valides de la récurrence double $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ pour des $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Faire de même pour une récurrence triple.

Exercice 26

1. On considère un sous-espace vectoriel F de d'un espace vectoriel E qui est distinct de E et de $\{\vec{0}_E\}$. On note $\overline{F}$ le complémentaire de F dans E, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de E qui ne sont pas dans F. On définit $\Omega_F = \overline{F} \cup \{\vec{0}_E\}$.
2. Ω_F est-il stable par multiplication externe ?
3. Ω_F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
4. Montrer que $\text{vect}(\Omega_F) = E$, c'est-à-dire que le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant Ω_F est E lui-même.