Espaces vectoriels

Exercice 1 Représenter chaque ensemble ci-dessous et déterminer si c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x-2y=0\} \qquad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x-2y=1\}$$
$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\geqslant 0\} \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$$
$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leqslant y\} \qquad F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0\}$$
$$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=0\} \qquad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=9\}$$

Exercice 2 L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. Écrire l'équation cartésienne du plan passant par $A(2,1,-4)$ de vecteur normal $\vec{n}(1,2,1)$. Cette équation caractérise-t-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. Le point $O(0,0,0)$ peut-il être décrit en tant que barycentre de $A(2,1,-4)$ et $B(-2,3,1)$? L'ensemble des coordonnées des barycentres de A et B est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ non vide, stable par multiplication externe et par différence. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ des solutions du système homogène Σ ci-dessous. Montrer qu'il existe $u\in\mathbb{R}^4$ tel que $S=\mathrm{Vect}(u)$.

$$\Sigma : \begin{cases} x+y+z-t=0 \\ 2x+y+2z+2t=0 \\ 3x+2y-4z+t=0 \end{cases}$$

Exercice 5 Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y-z=0\}$.

1. Déterminer deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ tels que $E=\mathrm{Vect}(\mathbf{u};\mathbf{v})$.
2. Déterminer deux autres vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ tels que $E=\mathrm{Vect}(\mathbf{a};\mathbf{b})$, de sorte qu'au moins un des deux ne soit colinéaire ni à $\mathbf{u}$ ni à $\mathbf{v}$.

Exercice 6

1. Le vecteur $\mathbf{u}=(1,2,3)$ appartient-il à $F_1=\mathrm{Vect}\big((0,1,0);(1,1,1)\big)$?
2. $\mathbf{u}$ appartient-il à $F_2=\mathrm{Vect}\big((-1,-1,0);(0,1,3)\big)$?
3. $\mathbf{u}$ appartient-il à $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y+z=0\}$?
4. Déterminer une famille $\mathcal{S}$ de deux vecteurs tels que $F_3=\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$.

Exercice 7 Soit $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}$, $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$ et $E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0\}$.

1. Démontrer que E_1, E_2 et E_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E_1\cap E_3$ et $E_2\cap E_3$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3=E_1+E_2$.

Exercice 8 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Montrer que le sous-ensemble $\{(x,y,z,t)\in E : x+y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^3$ les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

$\mathcal{S}_1=\{(2,1,-2)\}$ $\quad\mathcal{S}_2=\{(3,0,0);(0,-1,0);(0,0,4)\}$ $\quad\mathcal{S}_3=\{(1,0,0);(0,0,0)\}$

$\mathcal{S}_4=\{(0,4,1);(1,0,3);(-1,8,-1)\}$ $\quad\mathcal{S}_5=\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1);(4,1,3)\}$

Exercice 10 Dans $\mathbb{R}^3$, soit les vecteurs $\mathbf{u}=(1,1,1)$, $\mathbf{v}=(1,2,3)$ et $\mathbf{w}=(1,-2,k)$ et soit la famille $\mathcal{F}=(\mathbf{u};\mathbf{v};\mathbf{w})$.

1. Déterminer la valeur du réel k pour que la famille $\mathcal{F}$ soit liée. Donner dans ce cas une combinaison linéaire de la forme $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}=0_{\mathbb{R}^3}$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
2. Même question dans $\mathbb{R}^4$ avec $\mathcal{G}=(\mathbf{u};\mathbf{v};\mathbf{w})$ où $\mathbf{u}=(3,1,-4,6)$, $\mathbf{v}=(1,1,4,4)$, $\mathbf{w}=(1,0,-4,k)$.

Exercice 11

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}=\big((0,1,2);(-1,0,1);(3,2,0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathbf{u}=(x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer ses coordonnées $(a,b,c)_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer les coordonnées de $\mathbf{v}=(0,2,1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer les coordonnées de $\mathbf{w}=(4,-7,-2)_{\mathcal{B}}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathbf{u}=(1,1,\lambda)$, $\mathbf{v}=(1,\lambda,1)$, $\mathbf{w}=(\lambda,1,1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le rang de la famille $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$.
2. Pour quelles valeurs de λ, la famille $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 13 Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ et soit la famille $\mathcal{S}=\big((1,a,a^2);(1,b,b^2);(1,c,c^2)\big)$. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a,b,c pour que $\mathcal{S}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14 Montrer que pour tous vecteurs $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, on a $\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathrm{Vect}(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+2y+z=0\}$.

1. Déterminer une base de G.
2. Soit $\mathbf{u}=(1,2,-7)$, $\mathbf{v}=(1,1,-5)$, $\mathbf{w}=(1,3,-9)$. Montrer que $\mathcal{B}=(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une famille liée, puis en déduire une base de $F=\mathrm{Vect}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$.
3. Montrer que $F=G$.

Exercice 16 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathbf{e}=(-1,1,-1)$, $\mathbf{f}=(1,-1,0)$ et $\mathbf{g}=(-1,0,0)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}=(\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}=(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 17 Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ et les vecteurs

$$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta), \mathbf{v} = (\sin\theta, \cos\theta), \mathbf{w} = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

1. Représenter les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Faire de même avec la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

Exercice 18 Les sous-espaces vectoriels $E = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 19 On considère les sous-ensembles du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ suivants :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 20 Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 3y - z \text{ et } z = 4t\}$.

1. Trouver une base de F et en déduire sa dimension.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$ et donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 21 Soit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$E = \text{Vect}\big((1, 0, 0, 0); (-1, 1, 0, 0); (1, 1, -1, 0)\big)$ et $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\}$.

Démontrer que $E = F$. Déterminer un supplémentaire de E.

Exercice 22 Calculer le rang des familles ci-dessous :

1. $\mathcal{G} = (\mathbf{g}_1; \mathbf{g}_2; \mathbf{g}_3)$ où $\mathbf{g}_1 = (1, 2, 6, -1)$, $\mathbf{g}_2 = (3, 6, 5, -6)$, $\mathbf{g}_3 = (2, 4, -1, -2)$.
2. $\mathcal{L} = (\mathbf{l}_1; \mathbf{l}_2; \mathbf{l}_3)$ où $\mathbf{l}_1 = (1, 1, a)$, $\mathbf{l}_2 = (1, a, 1)$, $\mathbf{l}_3 = (a, 1, 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$ (on discutera suivant les valeurs de a).
3. (a) $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2; \mathbf{f}_3; \mathbf{f}_4)$ où $\mathbf{f}_1 = (1, 2, -4, 3)$, $\mathbf{f}_2 = (2, 5, -3, 4)$, $\mathbf{f}_3 = (6, 17, -7, 10)$, $\mathbf{f}_4 = (1, 3, -3, 2)$.
   (b) $\mathcal{H}_a = (\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2; \mathbf{h}_3)$ où $\mathbf{h}_1 = (1, 1, a, 0)$, $\mathbf{h}_2 = (1, a, 1, 0)$, $\mathbf{h}_3 = (a, 1, 1, 0)$ avec $a \in \mathbb{R}$ (on discutera suivant les valeurs de a).
   (c) Déterminer $\dim\big(\text{Vect}(\mathcal{F}) + \text{Vect}(\mathcal{H}_a)\big)$ puis $\dim\big(\text{Vect}(\mathcal{F}) \cap \text{Vect}(\mathcal{H}_a)\big)$.

Exercice 23 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \text{Vect}\big((2, 3, 1); (1, -1, 2)\big) \text{ et } G = \text{Vect}\big((3, 7, 0); (5, 0, 7)\big).$$

1. Montrer que $F = G$.
2. Déterminer une équation cartésienne de F.
3. Proposer une autre méthode pour montrer que $F = G$.

Exercice 24

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
   Répondre par VRAI ou FAUX, justifier, commenter.
   (a) On peut en déduire que $F = G$
   (b) On a $2 \leqslant \dim(F + G) \leqslant 4$
   (c) On a $1 \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant 2$
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, $\dim(F) = 3$ et $\dim(G) = 2$.
   Compléter :
   (a) $\cdots \leqslant \dim(F + G) \leqslant \cdots$ et $\cdots \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \cdots$
   (b) Si $\dim(F \cap G) = 2$ alors $F + G = \cdots$ et $F \cap G = \cdots$
3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.
   Compléter :
   (a) $\cdots \leqslant \dim(F + G) \leqslant \cdots$ et $\cdots \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \cdots$
   (b) Si F et G sont distincts, alors $F + G = \cdots$ et $F \cap G = \cdots$

Exercice 25 Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = 0 \text{ et } 5x - 3z - t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base $\mathcal{B}$ de F.
2. Soit $\mathbf{a} = (0, 3, -2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 1)$ et $G = \text{Vect}\big(\mathbf{a}; \mathbf{b}\big)$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 26 Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.
Pour chaque valeur de d de 0 à 3, indiquer s'il est possible d'avoir $\text{rang}(\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{u} + \mathbf{v}) = d$, et donner les conditions sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ correspondantes.

Exercice 27

1. Soit $n \geqslant 2$. On considère un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ qui est distinct de $\mathbb{R}^n$ et de $\{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$. On note $\overline{F}$ le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas dans F. On définit $\Omega_F = \overline{F} \cup \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.
2. Ω_F est-il stable par multiplication externe ?
3. Ω_F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 28

1. Donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Établir une condition nécessaire et suffisante pour que la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 29 Dans $\mathbb{R}_2[X]$ soit l'ensemble $\mathcal{P}_{1,2}$ des polynômes ayant 1 et 2 pour racines.
Soit l'isomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(aX^2 + bX + c) = (a, b, c)$.

1. Montrer que $\varphi(\mathcal{P}_{1,2})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une base.
2. Reprendre la démarche en définissant maintenant $\mathcal{P}_{1,2}$ et φ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 30

1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et la matrice carrée $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Montrer que
$$\text{rang}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \text{rang}\big((a, c); (b, d)\big).$$
2. Soit $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ et la matrice 3×3 : $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que dans la matrice A le rang des vecteurs colonnes est égal à 3 si et seulement si le rang des vecteurs lignes est égal à 3.
   (b) Faire de même avec le rang égal à 1.
   (c) Montrer que le rang des vecteurs colonnes est toujours égal au rang des vecteurs lignes.

Exercice 31

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *récurrente linéaire* lorsque ses termes vérifient une relation de type $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$ pour un $a \in \mathbb{R}$.
   Dans $\mathbb{R}^4$, on dit que (x_0, x_1, x_2, x_3) est une condition initiale valide pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque x_0, x_1, x_2, x_3 sont les quatre premiers termes d'une suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$.
   Montrer que l'ensemble C_a des conditions initiales valides de la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En déterminer une base.
2. Faire de même, avec l'ensemble $C_{a,b}$ des conditions initiales valides de la récurrence double $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour des $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Faire de même pour une récurrence triple.

Exercice 32 L'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ auquel on adjoint la somme de matrices et la multiplication externe naturelle a une structure d'espace vectoriel isomorphe à celle de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer une base et la dimension de l'ensemble des matrices :

1. triangulaires supérieures ;
2. diagonales ($b = c = 0$) ;
3. des homothéties de $\mathbb{R}^2$;
4. à *trace* nulle ($a + d = 0$).

Reprendre l'exercice avec l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles $n \times n$ pour un entier $n \geqslant 2$. La structure naturelle d'espace vectoriel est dans ce cas isomorphe à celle de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 33 Un carré 3×3 est un tableau de 3 lignes et 3 colonnes dont chaque case contient un réel. L'ensemble C des carrés 3×3 a la même structure que $\mathbb{R}^9$ lorsqu'on le munit de l'addition naturelle (on additionne case à case) et d'une multiplication externe (on multiplie chaque réel du carré).

— $\mathcal{M}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ des carrés magiques ($m \in \mathcal{M}$ s'il existe un réel k_m tel que la somme de chaque ligne de m et de chaque colonne de m soit égale à k_m).

— $\mathcal{S}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ des sudoku 3×3 ($s \in \mathcal{S}$ s'il existe 3 réels distincts a, b, c tels que dans chaque ligne et dans chaque colonne il apparait exactement une fois chacun des réels a, b, c).

1. $\mathcal{M}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$?
2. $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$?
3. L'un des deux est-il inclus dans l'autre ? Si oui est-ce un sous-espace vectoriel de l'autre ?